THOMSON

Raymond A. Serway

John W. Jewett Jr.

FÍSICA

Para ciencias e ingenierías

Volumen I

sexta edición

Materiál chráněný pravem autorskim

Contenido abreviado

PARTE 1 Mecánica 1

1 Física y mediciones 2
2 Movimiento en una dimensión 23
3 Vectores 58
4 Movimiento en dos dimensiones 77
5 Las leyes del movimiento 111
6 Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton 150
7 Energía y transferencia de energía 181
8 Energía potencial 217
9 Cantidad de movimiento lineal y colisiones 251
10 Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo 292
11 Cantidad de movimiento angular 336
12 Equilibrio estático y elasticidad 362
13 Gravitación universal 389
14 Mecánica de fluidos 420

PARTE 2 Oscilaciones y ondas mecánicas 451

15 Movimiento oscilatorio 452
16 Movimiento de ondas 486
17 Ondas de sonido 512
18 Superposición y ondas estacionarias 543

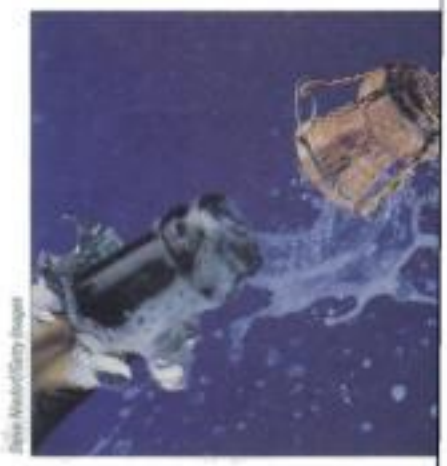
PARTE 3 Termodinámica 579

19 Temperatura 580
20 El calor y la primera ley de la termodinámica 604
21 Teoría cinética de los gases 640
22 Máquinas térmicas, entropía y la segunda ley de la termodinámica 667

Apéndices A.1

Respuestas a los problemas impares R.1

Índice I.1



Materiał chroniony prawem autorskim

Contenido

PARTE 1 Mecánica 1

Capítulo 1 Física y mediciones 2

1.1 Patrones de longitud, masa y tiempo 4
1.2 La materia y construcción de modelos 7
1.3 Densidad y masa atómica 9
1.4 Análisis dimensional 10
1.5 Conversión de unidades 12
1.6 Estimaciones y cálculos de orden de magnitud 13
1.7 Cifras significativas 15

Capítulo 2 Movimiento en una dimensión 23

2.1 Posición, velocidad y rapidez 24
2.2 Velocidad y rapidez instantáneas 28
2.3 Aceleración 31
2.4 Diagramas de movimiento 34
2.5 Movimiento en una dimensión con aceleración constante 36
2.6 Objetos en caída libre 40
2.7 Ecuaciones de cinemática deducidas del cálculo 44

Capítulo 3 Vectores 58

3.1 Sistemas de coordenadas 59
3.2 Cantidades vectoriales y escalares 60
3.3 Algunas propiedades de vectores 61
3.4 Componentes de un vector y unidades vectoriales 65

Capítulo 4 Movimiento en dos dimensiones 77

4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración 78

4.2 Movimiento bidimensional con aceleración constante 80
4.3 Movimiento de proyectiles 83
4.4 Movimiento circular uniforme 91
4.5 Aceleración tangencial y radial 94
4.6 Velocidad y aceleración relativas 96

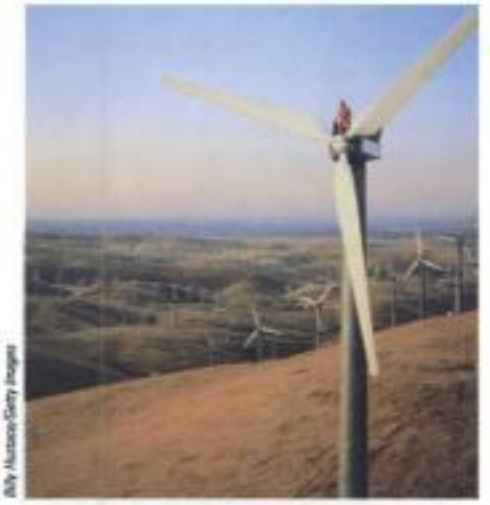
Capítulo 5 Las leyes del movimiento 111

5.1 El concepto de fuerza 112
5.2 Primera ley de Newton y marcos inerciales 114
5.3 Masa 116
5.4 Segunda ley de Newton 116
5.5 La fuerza gravitacional y peso 119
5.6 Tercera ley de Newton 120
5.7 Algunas aplicaciones de las leyes de Newton 122
5.8 Fuerzas de fricción 131

Capítulo 6 Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton 150

6.1 Segunda ley de Newton aplicada al movimiento circular uniforme 151
6.2 Movimiento circular no uniforme 157
6.3 Movimiento en marcos acelerados 159
6.4 Movimiento en presencia de fuerzas resistivas 162
6.5 Modelación numérica en dinámica de partículas 167

Materiał chroniony prawem autorskim


Billy Hustace/Getty Images

Capítulo 7 Energía y transferencia de energía 181

7.1 Sistemas y entornos 182
7.2 Trabajo realizado por una fuerza constante 183
7.3 Producto escalar de dos vectores 186
7.4 Trabajo realizado por una fuerza variable 188
7.5 Energía cinética y el teorema del trabajo y la energía cinética 193
7.6 El sistema no aislado; conservación de la energía 196
7.7 Situaciones que involucran fricción cinética 199
7.8 Potencia 203
7.9 La energía y el automóvil 205

Capítulo 8 Energía potencial 217

8.1 Energía potencial de un sistema 218
8.2 El sistema aislado; conservación de energía mecánica 220
8.3 Fuerzas conservativas y no conservativas 228
8.4 Cambios en la energía mecánica para fuerzas no conservativas 229
8.5 Relación entre fuerzas conservativas y energía potencial 234
8.6 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema 236

Capítulo 9 Cantidad de movimiento lineal y colisiones 251

9.1 Cantidad de movimiento lineal y su conservación 252
9.2 Impulso y cantidad de movimiento 256
9.3 Colisiones en una dimensión 260
9.4 Colisiones en dos dimensiones 267
9.5 El centro de masa 270
9.6 Movimiento de un sistema de partículas 274
9.7 Propulsión de un cohete 277

Capítulo 10 Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo 292

10.1 Posición, velocidad y aceleración angulares 293
10.2 Cinemática rotacional: movimiento rotacional con aceleración angular constante 296
10.3 Cantidades angulares y lineales 297
10.4 Energía cinética rotacional 300
10.5 Cálculo de momentos de inercia 302
10.6 Momento de torsión 306
10.7 Relación entre momento de torsión y aceleración angular 307
10.8 Trabajo, potencia y energía en el movimiento rotacional 312
10.9 Movimiento de rotación de un cuerpo rígido 316

Capítulo 11 Cantidad de movimiento angular 336

11.1 El producto vectorial y par de torsión 337
11.2 Cantidad de movimiento angular 339
11.3 Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido en rotación 343
11.4 Conservación de la cantidad de movimiento angular 345
11.5 El movimiento de giroscopios y trompos 350
11.6 Cantidad de movimiento angular como cantidad fundamental 351

Capítulo 12 Equilibrio estático y elasticidad 362

12.1 Condiciones de equilibrio 363
12.2 Más sobre el centro de gravedad 365
12.3 Ejemplos de cuerpos rígidos en equilibrio estático 366
12.4 Propiedades elásticas de sólidos 373

Capítulo 13 Gravitación universal 389

13.1 Ley de Newton de la gravitación universal 390
13.2 Medición de la constante gravitacional 393
13.3 Aceleración en caída libre y la fuerza gravitacional 394
13.4 Leyes de Kepler y el movimiento de planetas 396
13.5 El campo gravitacional 401

Corbis/Corbis de Tourism Malaysia

Materiał chroniony prawem autorskim

13.6 Energía potencial gravitacional 403
13.7 Consideraciones de energía en el movimiento planetario y de satélites 405

Capítulo 14 Mecánica de fluidos 420

14.1 Presión 421
14.2 Variación de la presión con la profundidad 423
14.3 Mediciones de presión 426
14.4 Empujes hidrostáticos o fuerza boyante y el principio de Arquímedes 427
14.5 Dinámica de fluidos 431
14.6 Ecuación de Bernoulli 433
14.7 Otras aplicaciones de dinámica de fluidos 436

PARTE 2 Oscilaciones y ondas mecánicas 451

Capítulo 15 Movimiento oscilatorio 452

15.1 Movimiento de un cuerpo unido a un resorte 453
15.2 Representación matemática del movimiento armónico simple 454
15.3 Energía del oscilador armónico simple 462

15.4 Comparación del movimiento armónico simple con el movimiento circular uniforme 465
15.5 El péndulo 468
15.6 Oscilaciones amortiguadas 471
15.7 Oscilaciones forzadas 472

Capítulo 16 Movimiento de ondas 486

16.1 Propagación de una perturbación 487
16.2 Ondas senoidales 491
16.3 Rapidez de ondas en cuerdas 496
16.4 Reflexión y transmisión 499
16.5 Rapidez de transferencia de energía por ondas senoidales en cuerdas 501
16.6 La ecuación lineal de onda 503

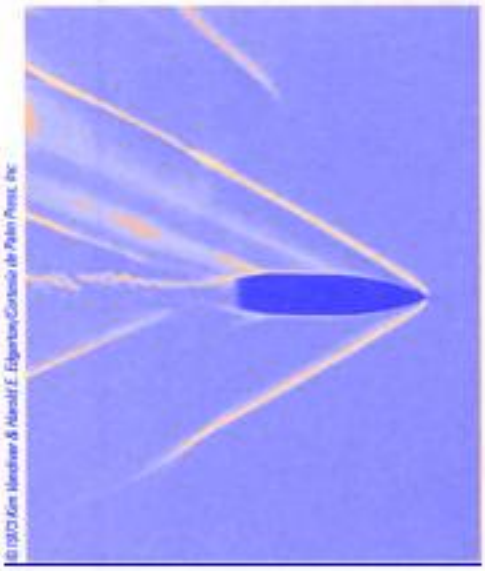
Capítulo 17 Ondas de sonido 512

17.1 Rapidez de las ondas de sonido 513
17.2 Ondas de sonido periódicas 515
17.3 Intensidad de ondas de sonido periódicas 516
17.4 El efecto Doppler 522
17.5 Grabación digital de sonido 528
17.6 Sonido en películas 532

Capítulo 18 Superposición y ondas estacionarias 543

18.1 Superposición e interferencia 544
18.2 Ondas estacionarias 549
18.3 Ondas estacionarias en una cuerda fija en ambos extremos 552
18.4 Resonancia 558
18.5 Ondas estacionarias en columnas de aire 559
18.6 Ondas estacionarias en varillas y membranas 563
18.7 Batimientos: interferencia en el tiempo 564
18.8 Patrones de onda no senoidales 566

Materiał chroniony prawem autorskim



PARTE 3 Termodinámica 579

Capítulo 19 Temperatura *580*

19.1 Temperatura y la ley cero de la termodinámica *581*
19.2 Termómetros y la escala Celsius de temperatura *583*
19.3 El termómetro de gas de volumen constante y la escala absoluta de temperatura *584*
19.4 Expansión térmica de sólidos y líquidos *586*
19.5 Descripción macroscópica de un gas ideal *591*

Capítulo 20 El calor y la primera ley de la termodinámica *604*

20.1 Calor y energía interna *605*
20.2 Calor específico y calorimetría *607*
20.3 Calor latente *611*
20.4 Trabajo y calor en procesos termodinámicos *615*
20.5 Primera ley de la termodinámica *618*
20.6 Algunas aplicaciones de la primera ley de la termodinámica *619*
20.7 Mecanismos de transferencia de energía *623*

Capítulo 21 Teoría cinética de los gases *640*

21.1 Modelo molecular de un gas ideal *641*
21.2 Cálor específico molar de un gas ideal *646*
21.3 Procesos adiabáticos para un gas ideal *649*
21.4 La equipartición de la energía *650*
21.5 La ley de distribución de Boltzmann *654*
21.6 Distribución de la rapidez molecular *655*
21.7 Travectoria libre media *658*

Capítulo 22 Máquinas térmicas, entropía y la segunda ley de la termodinámica *667*

22.1 Máquinas térmicas y la segunda ley de la termodinámica *669*
22.2 Bombas térmicas y refrigeradores *671*
22.3 Procesos reversibles e irreversibles *673*
22.4 La máquina de Carnot *675*
22.5 Motores de gasolina y diesel *679*
22.6 Entropía *683*
22.7 Cambios de entropía en procesos irreversibles *682*
22.8 Entropía a escala microscópica *690*

Apéndice A Tablas *A.1*

Tabla A.1 Factores de conversión *A.1*
Tabla A.2 Símbolos, dimensiones y unidades de las magnitudes físicas *A.2*
Tabla A.3 Tabla de masas atómicas *A.4*

Apéndice B Repaso de matemáticas *A.14*

B.1 Notación científica *A.14*
B.2 Álgebra *A.15*
B.3 Geometría *A.20*
B.4 Trigonometría *A.21*
B.5 Desarrollo en serie *A.23*
B.6 Cálculo diferencial *A.23*
B.7 Cálculo integral *A.25*
B.8 Propagación de la incertidumbre *A.28*

Apéndice C Tabla periódica de los elementos *A.30*

Apéndice D Unidades del Sistema Internacional *A.32*

Apéndice E Premios Nobel *A.33*

Respuestas a los problemas impares *R.1*

Índice *I.1*

Materiał chroniony prawem autorskim

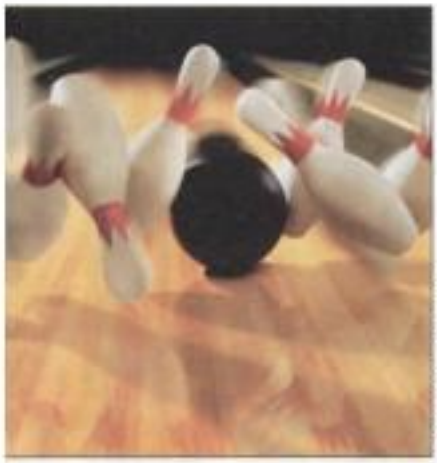
Acerca de los autores

Raymond A. Serway recibió su doctorado del Illinois Institute of Technology, y es Profesor Emérito en la James Madison University. El Doctor Serway inició su carrera de magisterio en la Clarkson University, donde llevó a cabo investigaciones y dio clases de 1967 a 1980. Su segunda cita académica fue en la James Madison University, como profesor de física y jefe del Departamento de Física, de 1980 a 1986. Prosiguió en la James Madison University hasta su retiro en 1997. Recibió el premio Madison Scholar en la James Madison University en 1990, el premio Distinguished Teaching en la Clarkson University en 1977, y el premio Alumni Achievement de la Utica College en 1985. Como científico huésped en el IBM Research Laboratory en Zurich, Suiza, trabajó con K. Alex Müller, que en 1987 fue ganador del premio Nobel. El Doctor Serway también realizó trabajos de investigación en el Rome Air Development Center, de 1961 a 1963, en el IIT Research Institute, de 1963 a 1967, y es científico visitante en el Argonne National Laboratory, donde colaboró con su maestro y amigo, Sam Marshall. Además de anteriores ediciones de este texto, el Doctor Serway es coautor de libro de texto para secundaria *Physics*, con Jerry Faughn, publicado por Holt, Rinehart & Winston, y coautor de la tercera edición del *Principles of Physics*, con John Jewett, la sexta edición de *College Physics* con Jerry Faughn, y la segunda edición de *Modern Physics* con Clem Moses y Curt Moyer. También, el Doctor Serway ha publicado más de 40 artículos de investigación científica en el campo de la física de materia condensada, y ha dado más de 70 conferencias en reuniones profesionales. El Doctor Serway disfruta de viajar, jugar golf, cuidar su jardín y pasar tiempo con sus cuatro hijos y cinco nietos.

John W. Jewett, Jr. obtuvo su doctorado en el Ohio State University, especializándose en propiedades ópticas y magnéticas de materia condensada. El Doctor Jewett empezó su carrera académica en el Richard Stockton College de Nueva Jersey, donde dio clases de 1974 a 1984. En la actualidad, es profesor de física de la California State Polytechnic University, Pomona. En su carrera de maestro, el Doctor Jewett ha estado activo en la promoción de educación científica. Además de recibir cuatro becas de la National Science Foundation, ayudó a fundar y dirigir el Southern California Area Modern Physics Institute (SCAMPI). También dirigió Science IMPACT (Institute for Modern Pedagogy and Creative Teaching), que trabaja con maestros y escuelas para crear eficientes currícula de ciencias. Entre los honores recibidos por el Doctor Jewett, está el Stockton Award en la California State Polytechnic University para 1991-1992, y el de Excelencia en el premio de Undergraduate Physics Teaching de la American Association of Physics Teachers (AAPT) en 1998. Ha dado más de 80 conferencias en reuniones profesionales, incluyendo presentaciones en conferencias internacionales en China y Japón. Además de su obra en este texto, es coautor de la Tercera Edición de *Principles of Physics* con Ray Serway, y autor de *The World of Physics...Mysteries, Magic, and Myth*. El Doctor Jewett disfruta tocar piano, viajar y coleccionar antigüedades que se puedan usar como aparatos de demostración en clases de física, así como pasar el tiempo con su esposa Lisa y sus hijos y nietos.

Materiał chroniony prawem autorskim

Prefacio



Mark Cooper/Corbis Stock Market

Al escribir esta sexta edición de *Physics for Scientists and Engineers*, continuamos nuestro actual esfuerzo para mejorar la claridad de presentación, y de nuevo incluimos nuevas características pedagógicas que ayudan a apoyar los procesos de aprendizaje y enseñanzas. Recurriendo a la retroalimentación positiva de usuarios de la quinta edición, y sugerencias de revisores, hemos refinado el texto para satisfacer mejor las necesidades de estudiantes y maestros. Por primera vez, en el texto hemos integrado un poderoso conjunto de recursos de medios en muchas de las ilustraciones, ejemplos y problemas de final de capítulo. Estos recursos componen el sistema de aprendizaje ***PhysicsNow*** (**física ahora**) basado en sitios Web, y están marcados con el ícono de medios . **Nota importante:** *para mayor información de los recursos y complementos que apoyan a este libro, favor de comunicarse con el representante local de Thomson Learning Latin America.*

Este texto está pensado para un curso de introducción de Física para estudiantes que se especialicen en ciencias o ingeniería. Todo el contenido del texto de esta versión ampliada puede cubrirse en un curso de tres semestres, pero es posible usar el material en secuencias más cortas, con la omisión de capítulos y secciones seleccionados. En forma ideal, el antecedente matemático del estudiante que tome este curso debe incluir un curso de cálculo; si eso no es posible, el estudiante debe inscribirse en un curso simultáneo de introducción al cálculo.

Objetivos

Este texto de introducción a la física tiene dos objetivos principales: dar al estudiante una presentación clara y lógica de los conceptos y principios básicos de física, y reforzar el entendimiento de los conceptos y principios por medio de una amplia gama de interesantes aplicaciones al mundo real. Para satisfacer estos objetivos, hemos puesto énfasis en argumentos físicos lógicos y metodología para la resolución de problemas. Al mismo tiempo, hemos intentado motivar al estudiante por medio de ejemplos prácticos que demuestran el papel de la física en otras disciplinas, incluyendo ingeniería, química y medicina.

Cambios en la sexta edición

Se ha hecho un gran número de cambios y mejoras en la elaboración de la sexta edición de este texto. Algunas de las nuevas características están basadas en nuestra experiencia y tendencias actuales en educación en ciencias. Se han incorporado otros cambios en respuesta a comentarios y sugerencias ofrecidos por usuarios de la quinta edición, y por revisores del manuscrito. Lo que sigue representa los principales cambios en la sexta edición:

Figuras activas Muchos diagramas del texto han sido animados para formar **figuras activas,** parte del sistema integrado ***PhysicsNow*** de enseñanza basada en sitios Web. Al visualizar fenómenos y procesos que no se pueden representar en una página estática, los estudiantes aumentan en gran medida su comprensión de conceptos. Las **figuras activas** se identifican con el ícono . Además de la figura, la leyenda en tipo azul describe brevemente la naturaleza y contenido de la animación.

Ejemplos resueltos a todo lo largo del libro. Aproximadamente 90 de ellos (en los dos volúmenes) son interactivos; es decir, en el sitio de internet exclusivo de este título los estudiantes pueden trabajar en una ampliación del problema resuelto en el ejemplo. Esto con frecuencia incluye elementos de visualización y cálculo, y puede también

Materiał chroniony prawem autorskim

abarcar el mejorar la predicción e intuición. A veces la interactividad se inspira más con la frase **"¿Qué pasaría si?"** que ponemos en el texto del ejemplo.

¿Qué pasaría si? Alrededor de la tercera parte de los ejemplos resueltos del texto contienen esta nueva característica. Al terminar la solución del ejemplo, una pregunta de **¿Qué pasaría si?** ofrece una variación en la situación puesta en el texto del ejemplo. Esta característica podría explorar los efectos de cambiar las condiciones de la situación, determinar qué ocurre cuando una cantidad se lleva a un valor limitante particular, o preguntar si se puede determinar más información acerca de la situación del problema. La respuesta a la pregunta generalmente incluye una respuesta conceptual y una respuesta matemática. Esta característica estimula al estudiante a pensar acerca de los resultados del ejemplo, y ayuda en la comprensión conceptual de los principios. También prepara a estudiantes a encontrar problemas nuevos que se presentan en exámenes. Algunos de los problemas de final de capítulo también tienen la característica de **¿Qué pasaría si?**

Preguntas rápidas El número de Preguntas rápidas de cada capítulo se ha aumentado. Las Preguntas rápidas dan al estudiante oportunidades para probar su comprensión de los conceptos físicos presentados. Las preguntas exigen que el estudiante tome decisiones con base en un razonamiento lógico, y algunas de ellas se han escrito para ayudar al estudiante a superar equivocaciones comunes. Las Preguntas rápidas se han elaborado en forma objetiva, incluyendo las de opción múltiple, verdadero-falso y clasificar. Las respuestas a todas las Preguntas rápidas se encuentran al final de cada capítulo. En el sitio Web del maestro se presentan más Preguntas rápidas que se pueden usar en el salón de clases. Muchos maestros escogen usar estas preguntas en un estilo de enseñanza de "instrucción par", pero también se pueden usar en formato estándar.

¡Advertencia! Estas nuevas características se han colocado en los márgenes del texto y abordan equivocaciones comunes en estudiantes y situaciones en las que los estudiantes a veces siguen caminos estériles. Se dan más de 200 ¡Advertencias! para ayudar a estudiantes a evitar errores y equivocaciones comunes.

Estrategia general para la solución de problemas Al final del capítulo 2 del volumen I, se presenta una estrategia general que el estudiante debe seguir, misma que da al estudiante un proceso estructurado para resolver problemas. En los capítulos del 3 al 5 también del volumen I, esta estrategia se utiliza explícitamente en cada ejemplo para que los estudiantes aprendan la forma en que se aplica. En capítulos restantes, la estrategia aparece explícitamente en un ejemplo por capítulo, de modo que los estudiantes son estimulados en todo el curso a seguir el procedimiento.

Revisión línea por línea Todo el texto ha sido cuidadosamente editado para mejorar la claridad de presentación y precisión del lenguaje. Esperamos que el resultado sea un libro a la vez preciso y de lectura agradable.

Problemas Se hizo una considerable revisión de los problemas de final de capítulo, en un esfuerzo por mejorar su variedad e interés, pero manteniendo su claridad y calidad. Alrededor del 17% de los problemas (unos 550) son nuevos. Todos los problemas han sido cuidadosamente editados. Entre ellos hay un conjunto de problemas solucionados, identificados por el ícono , que aparecen en el sitio **(http://www.pse6.com)** como soluciones guiadas con sugerencias. La retroalimentación se da para estudiantes cuyos maestros adopten *Física para ciencias e ingeniería, sexta edición*. En la siguiente sección vea una descripción completa de otras características del conjunto de problemas.

Cambios de contenido El contenido y organización del texto son esencialmente los mismos que los de la quinta edición. Una excepción es que el capítulo 13 (Movimiento oscilatorio) de la quinta edición se ha pasado a la posición del capítulo 15, ambos en el volumen I en la sexta edición, para formar una coherente Segunda parte de cuatro capítulos sobre oscilaciones y ondas. Muchas secciones en varios capítulos se han mejorado, borrado o combinado con otras secciones, para darles una presentación más balanceada. Los capítulos sobre Física moderna, capítulos 17 al 24 del volumen II, se han

Materiał chroniony prawem autorskim

mejorado ampliamente para obtener un material más actualizado y para aplicaciones modernas. Una lista más detallada de los cambios del contenido, se puede hallar en el sitio Web del profesor.

Contenido

El material de este libro cubre temas fundamentales en física clásica y da una introducción a la física moderna. El libro está dividido en seis partes. La primera parte (capítulos 1 al 14 del volumen I) habla de fundamentos de mecánica Newtoniana y física de fluidos; la segunda parte (capítulos 15 al 18 del volumen I) cubre oscilaciones, ondas mecánicas y sonido, la tercera parte (capítulos 19 al 22, volumen I) aborda el calor y termodinámica, la cuarta parte (capítulos 1 a 12 del volumen II) trata electricidad y magnetismo, la quinta parte (capítulos 13 a 16 del volumen II) cubre luz y óptica, y la sexta parte (capítulos 17 a 24, volumen II) habla de relatividad y física moderna. Cada parte inicial incluye un repaso del tema que se estudia en esa parte, así como algunas perspectivas históricas.

Características del texto

Casi todos los maestros estarán de acuerdo en que el texto seleccionado para un curso debe ser la guía fundamental del estudiante para que entienda y aprenda la materia. Además, el texto debe ser fácilmente accesible, tener estilo y estar escrito para facilitar la instrucción y el aprendizaje. Con esto en mente, hemos incluido numerosas características pedagógicas en el texto que están pensadas para mejorar su utilidad tanto para estudiantes como para maestros. Estas características son como sigue:

Estilo Para facilitar una rápida comprensión, hemos intentado escribir el libro en un estilo que es claro, lógico y atractivo. Hemos seleccionado un estilo de escritura que es un tanto informal y relajado, para que los estudiantes encuentren una lectura atrayente y amena. Los nuevos términos se definen cuidadosamente, y hemos evitado el uso de lenguaje confuso.

Bruce Ayres/Getty Images

Presentación preliminar Todos los capítulos se inician con una breve presentación preliminar, que incluye un análisis de los objetivos y contenido del capítulo.

Enunciados y ecuaciones importantes Casi todos los enunciados y definiciones importantes se escriben en **negritas,** o se resaltan con fondo verde para mayor énfasis y facilidad de presentación. De igual modo, las ecuaciones importantes están resaltadas con un fondo para facilitar su ubicación.

Sugerencias para la solución de problemas En varios capítulos hemos incluido estrategias generales para resolver los tipos de problemas presentados en los ejemplos y en problemas de final de capítulo. Esta característica ayuda al estudiante a identificar pasos necesarios en la resolución de un problema, y a eliminar cualquier incertidumbre que pudiera tener. Las estrategias para la solución de problemas, se destacan con un fondo rojo claro, para énfasis y facilidad de ubicación.

Notas al margen Los comentarios y notas que aparecen en tipo azul al margen, se pueden usar para localizar importantes enunciados, ecuaciones y conceptos del texto.

Uso pedagógico del color Los lectores deben consultar la **tabla pedagógica de colores** para ver la lista de símbolos de color que se emplean en los diagramas del texto, **figuras activas** de sitios Web, así como diagramas dentro de los ejemplos resueltos. Este sistema se sigue consistentemente siempre que es posible, con ligeras variaciones que son necesarias, dada la complejidad de las situaciones físicas descritas en el volumen 2.

Nivel matemático Hemos introducido el cálculo en forma gradual, teniendo en mente que a veces los estudiantes toman cursos de introducción al cálculo y física simultáneamente. Se muestran casi todos los pasos cuando se desarrollan ecuaciones básicas, y se hace frecuente referencia a apéndices matemáticos del final de este libro. Los produc-

Materiał chroniony prawem autorskim

tos vectoriales se introducen posteriormente en el texto, en donde se necesitan en aplicaciones físicas. El producto punto se introduce en el capítulo 7 del volumen I, que trata la energía y la transferencia de energía; el producto cruz se introduce en el capítulo 11 de ese mismo volumen, que habla de cantidad de movimiento angular.

Ejemplos resueltos Se presenta un gran número de ejemplos desarrollados de diversos grados de dificultad, para promover la comprensión de conceptos en estudiantes. En numerosos casos, los ejemplos sirven como modelos para resolver problemas de final de capítulo. Dado el mayor énfasis para comprender conceptos físicos, muchos ejemplos son de naturaleza conceptual, y como tales se marcan. Los ejemplos se ponen de relieve en cajas, y las respuestas a ejemplos con soluciones numéricas se resaltan con una pantalla de fondo. Ya hemos mencionado que varios ejemplos están diseñados como interactivos y son parte del sistema de aprendizaje ***PhysicsNow*** con base en sitios web.

Preguntas Al final de cada capítulo aparecen preguntas de naturaleza conceptual que requieren respuestas verbales o escritas. En esta edición se incluyen más de 1 000. Algunas proporcionan al estudiante los medios para que se haga a sí mismo una prueba de los conceptos presentados en el capítulo. Otras tienen la finalidad de ser la base para las discusiones en clase.

Cifras significativas Las cifras significativas tanto en ejemplos resueltos como en problemas de final de capítulo, se han manejado con cuidado. Casi todos los ejemplos están resueltos ya sea a dos o a tres cifras significativas, dependiendo de la precisión de los datos presentados. Por lo general, los problemas de final de capítulo expresan datos y respuestas a una precisión de tres dígitos.

Problemas Al final de cada capítulo se incluye un extenso conjunto de problemas; en total, en los dos volúmenes que forman este título, aparecen más de 3 000 problemas. Las respuestas a los problemas con número impar se encuentran al final de cada volumen, según corresponde. Para comodidad del estudiante y del maestro, alrededor de dos tercios de los problemas están relacionados con secciones específicas del capítulo. Los problemas restantes, marcados como "Problemas adicionales", no están relacionados con secciones específicas.

Por lo general, los problemas que están dentro de una sección determinada se presentan de modo que primero aparecen los problemas sencillos (los que son de números negros de problema). Para facilitar la identificación, los números de problemas de nivel intermedio se imprimen en azul, y los de problemas difíciles en color rojo.

- **Problemas de repaso** Numerosos capítulos incluyen problemas de repaso que requieren al estudiante combine conceptos tratados en el capítulo, con los estudiados en capítulos anteriores. Estos problemas reflejan la naturaleza cohesiva de los principios del texto, y verifican que la física no sea un conjunto disperso de ideas. Cuando nos enfrentemos a problemas reales, como lo es el del calentamiento del planeta o el de armas nucleares, para ello puede ser necesario recurrir a ideas de física de varias partes del libro.

- **Problemas por pares** Para permitir una práctica enfocada a resolver problemas expresados en términos simbólicos, algunos de los problemas numéricos de final de capítulo están pareados con los mismos problemas en forma simbólica. Los problemas pareados están identificados por un fondo rojo claro.

- **Problemas que requieren computadora y calculadora** Varios de los problemas de este texto incluyen uno o más problemas cuya solución requiere el uso de computadora o calculadora de gráficas. El modelado computarizado de fenómenos físicos hace posible que el estudiante obtenga representaciones gráficas de variables y realice análisis numéricos.

- **Problemas con ayuda y sugerencias** Éstos ya se han descrito antes como parte del sistema de enseñanza ***PhysicsNow*** con base en sitios Web. Estos problemas están

Cortesía de la NASA.

Materiał chroniony prawem autorskim

identificados por el icono de medios y cuentan con retroalimentación a estudiantes de maestros que adopten la sexta edición.

Unidades En todo este libro de texto se emplea el sistema internacional de unidades (SI). El sistema inglés se usa sólo en una pequeña parte en capítulos sobre mecánica, calor y termodinámica.

Resúmenes Cada capítulo contiene un resumen que hace un repaso de importantes conceptos y ecuaciones estudiados en ese capítulo.

Apéndices y tablas en los forros interiores Al final del libro aparecen varios apéndices. Casi todo el material de un apéndice representa un repaso de conceptos matemáticos y técnicas empleadas en el texto, incluyendo notación científica, álgebra, geometría, trigonometría, cálculo diferencial y cálculo integral. En todo el texto se hace referencia a estos apéndices. La mayor parte de las secciones de repaso matemático de los apéndices incluye ejemplos resueltos y ejercicios con respuestas. Además de los repasos matemáticos, los apéndices contienen tablas de datos físicos, factores de conversión, masas atómicas y las unidades del SI de cantidades físicas, así como una tabla periódica de los elementos. En la cara interna de los forros, en las primeras hojas y en las hojas posteriores a los apéndices aparece más información útil, incluyendo constantes fundamentales y datos físicos, datos planetarios, una lista de prefijos estándar, símbolos matemáticos, el alfabeto griego y abreviaturas estándar de unidades de medida.

Complementos

Este libro cuenta con una serie de complementos para el profesor, los cuales están en inglés y sólo se proporcionan a los docentes que adopten la presente obra como texto para sus cursos. Para mayor información, favor de comunicarse con las oficinas de nuestros representantes o a los siguientes correos electrónicos:

- **Thomson México y Centroamérica** clientes@thomsonlearning.com.mx
- **Thomson América del Sur** clithomson@andinet.com
- **Thomson Caribe** amy.reyes@thomsonlearning.com

Nota importante

El sitio en internet *http://www.pse6.com* exclusivo de este libro contiene los ejemplos interactivos, las figuras activas, problemas muestra de final de capítulo y toda una serie de recursos para los profesores y los estudiantes. La administración de esta página y del recurso *PhysicsNow* es responsabilidad de nuestra filial en Estados Unidos, Brooks Cole, por lo que Thomson Learning Latin America no se hace responsable por los cambios que pudieran ocurrir en estos materiales. Sin embargo, le sugerimos navegar frecuentemente dicha página a fin de mantenerse al tanto de cualquier actualización.

Si desea mayor información favor de ponerse en contacto con el representante local de Thomson o en las direcciones de correo electrónico arriba citadas.

Opciones de enseñanza

Los temas de este libro se presentan en la siguiente secuencia: mecánica clásica, oscilaciones y ondas mecánicas, y calor y termodinámica (volumen I); seguidos por electricidad y magnetismo, ondas electromagnéticas, óptica, relatividad y física moderna (volumen II). Esta presentación representa una secuencia tradicional, con el tema de ondas mecánicas, siendo presentada antes que la electricidad y magnetismo. Algunos maestros pueden preferir cubrir este material después de completar electricidad y magnetismo (es decir, después del capítulo 12 del volumen II). El capítulo sobre relatividad está cerca del final del texto, porque este tema con frecuencia se trata como una introducción a la era de la "Física moderna." Si el tiempo lo permite, los maestros pueden ele-

Materiał chroniony prawem autorskim

gir cubrir el capítulo 17 del volumen II después de completar el capítulo 13 del volumen I, que concluye el material sobre mecánica Newtoniana.

Para los maestros que impartan enseñanza en una secuencia de dos semestres, algunas secciones y capítulos se pueden suprimir, sin que por ello se pierda continuidad. Las siguientes secciones de los dos volúmenes se pueden considerar opcionales para este propósito:

George Semple

VOLUMEN I

- **2.7** Ecuaciones de cinemática deducidas del cálculo
- **4.6** Velocidad y aceleración relativas
- **6.3** Movimiento en marcos acelerados
- **6.4** Movimiento en presencia de fuerzas resistivas
- **6.5** Modelado numérica en dinámica de partículas
- **7.9** Energía y el automóvil
- **8.6** Diagramas de energía y equilibrio de un sistema
- **9.7** Propulsión de un cohete
- **11.5** El movimiento de giroscopios y trompos
- **11.6** Cantidad de movimiento angular como cantidad fundamental
- **14.7** Otras aplicaciones de dinámica de fluidos
- **15.6** Oscilaciones amortiguadas
- **15.7** Oscilaciones forzadas
- **16.6** La ecuación lineal de onda
- **17.5** Grabación digital del sonido
- **17.6** Sonido en películas
- **18.6** Ondas estacionarias en varillas y membranas
- **18.8** Patrones de onda no senoidales
- **21.7** Trayectoria libre media
- **22.8** Entropía a escala microscópica

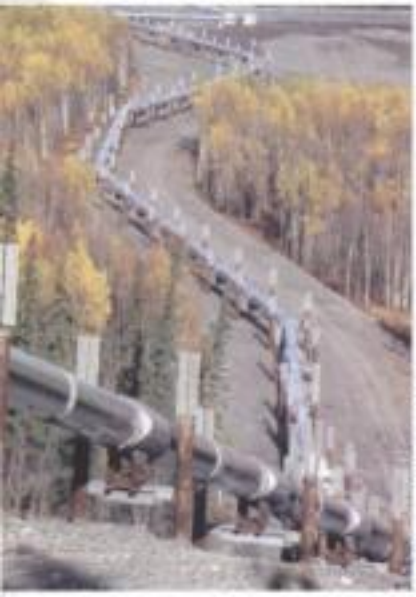
VOLUMEN II

- **2.5** Deducción formal de la Ley de Gauss
- **3.7** El experimento de la gota de aceite de Millikan
- **3.8** Aplicaciones de la electrostática
- **4.7** Una descripción atómica de los materiales dieléctricos
- **5.5** Superconductores
- **6.5** Medidores eléctricos
- **6.6** Alambrado doméstico y seguridad eléctrica
- **7.5** Aplicaciones que involucran partículas cargadas en movimiento en un campo magnético
- **7.6** El efecto Hall
- **8.8** Magnetismo en la materia
- **8.9** Campo magnético de la Tierra
- **9.6** Corrientes parásitas o de Eddy
- **11.9** Rectificadores y filtros
- **12.5** Producción de ondas electromagnéticas en una antena
- **13.9** Principio de Fermat
- **14.5** Aberraciones en lentes
- **14.6** La cámara fotográfica
- **14.7** El ojo humano
- **14.8** La lupa simple
- **14.9** El microscopio compuesto
- **14.10** El telescopio
- **16.5** Difracción de los rayos X mediante cristales
- **17.10** Teoría general de la relatividad

De nuevo hacemos hincapié en que los capítulos 18 a 24 del volumen II, relativos a física moderna fueron totalmente revisados y actualizados. Para aquellos profesores que incluyen física moderna en sus programas y se enfrenten a falta de tiempo, las siguientes secciones se pueden eliminar sin pérdida de continuidad:

- **19.7** El microscopio de barrido de tunelización electrónica
- **21.8** Superconductividad
- **20.10** Láseres
- **23.5** Daños por radiación
- **21.7** Dispositivos semiconductores
- **23.6** Detectores de radiación
- **23.7** Usos de la radiación

Materiał chroniony prawem autorskim



Tyrium Pictures/The Image Works

Reconocimientos

La sexta edición de este libro fue elaborada con la guía y asistencia de numerosos maestros que revisaron selecciones del manuscrito, texto previo a la revisión o ambos. Deseamos dar nuestro reconocimiento a los siguientes maestros y expresarles nuestro sincero agradecimiento por sus sugerencias, críticas y estímulos:

Edward Adelson, *Ohio State University*
Michael R. Cohen, *Shippensburg University*
Jerry D. Cook, *Eastern Kentucky University*
J. William Dawicke, *Milwaukee School of Engineering*
N. John DiNardo, *Drexel University*
Andrew Duffy, *Boston University*
Robert J. Endorf, *University of Cincinnati*
F. Paul Esposito, *University of Cincinnati*
Joe L. Ferguson, *Mississippi State University*
Perry Ganas, *California State University, Los Angeles*
John C. Hardy, *Texas A&M University*
Michael Hayes, *University of Pretoria (South Africa)*
John T. Ho, *The State University of New York, Buffalo*
Joseph W. Howard, *Salisbury University*
Robert Hunt, *Johnson County Community College*
Walter S. Jaronski, *Radford University*
Sangyong Jeon, *McGill University, Quebec*
Stan Jones, *University of Alabama*
L. R. Jordan, *Palm Beach Community College*
Teruki Kamon, *Texas A & M University*
Louis E. Keiner, *Coastal Carolina University*
Mario Klarič, *Midlands Technical College*
Laird Kramer, *Florida International University*
Edwin H. Lo, *American University*
James G. McLean, *The State University of New York, Geneseo*
Richard E. Miers, *Indiana University–Purdue University, Fort Wayne*
Oscar Romulo Ochoa, *The College of New Jersey*
Paul S. Ormsby, *Moraine Valley Community College*
Didarul I. Qadir, *Central Michigan University*
Judith D. Redling, *New Jersey Institute of Technology*
Richard W. Robinett, *Pennsylvania State University*
Om P. Rustgi, *SUNY College at Buffalo*
Mesgun Sebhatu, *Winthrop University*
Natalia Semushkina, *Shippensburg University*
Daniel Stump, *Michigan State University*
Uwe C. Täuber, *Virginia Polytechnic Institute*
Perry A. Tompkins, *Samford University*
Doug Welch, *McMaster University, Ontario*
Augden Windelborn, *Northern Illinois University*
Jerzy M. Wrobel, *University of Missouri, Kansas City*
Jianshi Wu, *Fayetteville State University*
Michael Zincani, *University of Dallas*

La precisión de este título fue cuidadosamente revisada por Michael Kotlarchyk *(Rochester Institute of Technology)*, Chris Vuille *(Embry-Riddle Aeronautical University)*, Laurencin Dunbar *(St.Louis Community College)*, y William Dawiche *(Milwaukee School of Engineering.)* ¡Les agradecemos sus diligentes esfuerzos bajo la presión de sus horarios!

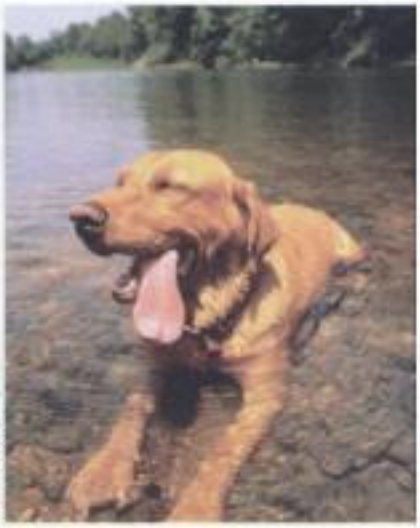
Estamos agradecidos a Ralph McGrew por organizar los problemas de final de capítulo, escribir numerosos problemas nuevos, así como por sus excelentes sugerencias para mejorar el contenido del texto. Los problemas nuevos de esta edición fueron escritos por Edward Adelson, Ronald Bieniek, Michael Browne, Andrew Duffy, Robert Forsythe, Perry Ganas, Michael Hones, John Jewett, Boris Korsunsky, Edwin Lo, Ralph McGrew, Raymond Serway y Jerzy Wrobel, con ayuda de Bennett Simpson y JoAnne Maniago. Los estudiantes Alexander Coto, Karl Payne y Eric Peterman hicieron correcciones a problemas tomados de ediciones previas, como lo hicieron los maestros David Aspnes, Robert Beichner, Joseph Biegen, Vasili Haralambous, Frank Hayes, Erika Hermon, Ken Menningen, Henry Nebel y Charles Teague. Estamos agradecidos con los autores John R. Gordon y Ralph McGrew y con el diseñador Michael Rudmin. Los autores Ralph McGrew y James Currie y la diseñadora Mary Toscano han elaborado un excelente *Instructor's Solutions Manual*, y se los agradecemos. Edward Adelson ha editado y mejorado con todo cuidado el banco de reactivos para la sexta edición. Kurt Van-

Materiał chroniony prawem autorskim

dervoort elaboró preguntas adicionales de las secciones "Pregunta rápida" para el sitio Web del profesor.

Especial agradecimiento y reconocimiento al personal profesional de Brooks/Cole Publishing Company, en particular Susan Pashos, Rebecca Heider y Alyssa White (que dirigió el programa auxiliar y mucho más), Jessica Howard, Peter McGahey, Teri Hyde, Michelle Julet, David Harris y Chris Hall por su excelente trabajo durante el desarrollo y producción de este libro. Estamos muy agradecidos por el manejo administrativo de Sam Subity del programa de medios ***PhysicsNow***. Kelley McAllister es nuestro gerente de marketing, y Stacey Purviance coordina nuestras comunicaciones de marketing. Reconocemos el hábil servicio de producción de Rolin Graphics, y el dedicado esfuerzo de investigación de fotografías de Terri Wright.

Por último, estamos profundamente en deuda con nuestras esposas e hijos por su amor, apoyo y sacrificio de tanto tiempo.



Frank Chirlo/Getty Images

Raymond A. Serway
Leesburg, Virginia

John W. Jewett, Jr.
Pomona, California

Materiał chroniony prawem autorskim

Al estudiante

Es oportuno ofrecer algunas palabras de consejo que deben ser para beneficio del estudiante. Antes de hacerlo, suponemos que ya ha leído el prefacio que describe las diversas características del texto que le ayudarán en todo el curso.

Cómo estudiar

Con frecuencia se pregunta a maestros, "¿cómo debo estudiar Física y prepararme para exámenes? No hay respuesta sencilla a esta pregunta, pero nos gustaría ofrecer algunas sugerencias que están basadas en nuestra experiencia en la enseñanza y el aprendizaje de años.

Lo primero y más importante es mantener una actitud positiva hacia la materia, teniendo en mente que la Física es la más fundamental de todas las ciencias naturales. Otros cursos de ciencias que siguen usarán los mismos principios físicos, de modo que es importante que el estudiante comprenda y pueda aplicar los diversos conceptos y teorías que se estudian en el texto.

Conceptos y principios

Es esencial que el estudiante entienda los conceptos y principios básicos antes de tratar de resolver problemas de tarea. Puede lograr mejor esta meta al leer cuidadosamente el libro de texto antes de asistir a una clase que hable del material que se trata. Cuando lea el texto, debe anotar los puntos que no le queden claros. A propósito, hemos dejado márgenes amplios en el texto para dar espacio para hacer anotaciones. También asegúrese el lector de hacer un intento diligente de contestar las preguntas de la sección "Pregunta rápida", cuando llegue a ellas en su lectura. Hemos trabajado duro para escribir preguntas que ayuden al estudiante a juzgar por sí mismo lo bien que entienda el material. Estudie cuidadosamente las secciones **¿Qué pasaría si?,** que aparecen con muchos de los ejemplos resueltos. Le ayudarán a ampliar su comprensión más allá del simple acto de llegar a un resultado numérico. Las secciones de Advertencias también ayudarán al lector a alejarlo de equivocaciones acerca de la física. Durante la clase, tome cuidadosas notas y haga preguntas acerca de las ideas que no le queden claras. Tenga en mente que pocas personas tienen la capacidad de absorber todo el significado de material científico después de sólo una lectura; pueden ser necesarias varias lecturas del texto y sus notas. Sus clases y el trabajo de laboratorio complementan la lectura del libro y deben aclarar algunos de los materiales más difíciles. El estudiante debe reducir al mínimo aprenderse de memoria el material; un exitoso aprendizaje de memoria de pasajes del texto, ecuaciones y derivaciones, no necesariamente indica que el lector entienda el material. La comprensión del material se mejora con la combinación de eficientes hábitos de estudio y análisis con otros estudiantes, o con maestros; también mejora la capacidad de resolver problemas presentados en el texto. Haga preguntas siempre que piense que sea necesaria la aclaración de un concepto.

Programa de estudio

Es importante que establezca un programa regular de estudio, de preferencia que sea diario. Asegúrese de leer el programa del curso y apegarse al que fije el maestro. Las lecturas tendrán mucho más sentido, si se lee el correspondiente material antes de asis-

Materiał chroniony prawem autorskim

tir a clase. Como regla general, el estudiante debe dedicar unas dos horas de tiempo de estudio por cada hora que esté en clase. Si tiene problemas con el curso, busque la asesoría de un maestro u otros estudiantes que ya hayan llevado el curso. Puede que encuentre necesario buscar más ayuda de estudiantes experimentados. Con frecuencia algunos profesores ofrecen sesiones de repaso además de sus periodos regulares de clase. Es importante que el estudiante evite la práctica de retardar el estudio hasta uno o dos días antes de un examen; a la larga, este método tiene resultados desastrosos. En lugar de estudiar toda la noche, repase brevemente conceptos básicos y ecuaciones y trate de dormir normalmente.

Uso de características

El estudiante debe sacar todo el provecho posible de las diversas características del texto que se estudian en el Prefacio. Por ejemplo, las notas marginales son útiles para localizar y describir importantes ecuaciones y conceptos, y el tipo en **negritas** indica importantes enunciados y definiciones. En los Apéndices aparecen numerosas tablas, pero casi todas están incorporadas en el texto al que hacen referencia. El Apéndice B es un cómodo repaso de técnicas matemáticas.

Las respuestas a problemas de número impar se dan al final de cada volumen según corresponda y las respuestas a las preguntas rápidas aparecen al final de cada capítulo. Las estrategias para resolver problemas y las sugerencias, se incluyen en capítulos seleccionados en todo el libro y le darán más información de cómo debe resolver problemas. La Tabla de contenido da un repaso de todo el texto, mientras que el Índice analítico hace posible localizar rápidamente material específico. Las notas de pie de página se usan a veces para complementar el texto o citar otras referencias sobre el tema que se estudia.

Después de leer un capítulo, el lector debe estar en condición de definir cualesquiera cantidades nuevas introducidas en ese capítulo, y analizar los principios y suposiciones que se emplearon para llegar a ciertas relaciones clave. En algunos casos, puede que sea necesario que el lector consulte el índice del texto para localizar ciertos temas; debe tener capacidad para asociar, con cada cantidad física, el símbolo correcto que se usa para representar esa cantidad y la unidad en la que se especifica esa cantidad. Además, el estudiante debe expresar cada ecuación importante en un enunciado conciso y preciso.

Solución de problemas

R. P. Feynman, premio Nobel de física, dijo una vez, "No sabes nada sino hasta que lo hayas practicado." De acuerdo con esta frase, encarecidamente aconsejamos al lector perfeccione sus habilidades necesarias para resolver una amplia variedad de problemas. La capacidad del estudiante para resolver problemas, será una de las principales pruebas de su conocimiento de física, por lo cual debe tratar de resolver tantos problemas como le sea posible. Es esencial que entienda conceptos y principios básicos antes de intentar resolver problemas. Es buena práctica tratar de hallar soluciones alternas al mismo problema. Por ejemplo, puede resolver problemas en mecánica con las leyes de Newton, pero con frecuencia es más directo un método alternativo que recurre a consideraciones de energía. No se engañe al pensar que entiende un problema sólo porque lo vio resuelto en clase; debe resolver ese problema y otros semejantes por sí mismo.

El método de resolver problemas debe planearse con todo cuidado. Un plan sistemático es especialmente importante cuando un problema comprende varios conceptos. Primero, lea el problema varias veces hasta qué tenga la confianza suficiente para entender lo que se pregunta. Busque las palabras clave que le ayudarán a interpretar el problema, y quizá le permitan hacer ciertas suposiciones. Su capacitad para interpretar

Materiał chroniony prawem autorskim

correctamente una pregunta, es parte integral de resolver el problema. En segundo término, el lector debe adquirir el hábito de escribir la información dada en un problema y las cantidades necesarias para resolverlo; por ejemplo, puede construir una tabla que haga una lista de las cantidades dadas y las que hayan de buscarse. Este procedimiento se usa a veces en los ejemplos resueltos de este libro. Por último, una vez que haya decidido el método que usted piensa es apropiado para un problema dado, continúe con su solución. Las estrategias específicas de este tipo para resolución de problemas (Sugerencias), están incluidas en el texto y se resaltan con un fondo rojo claro. También hemos creado una Estrategia general para la solución de problemas, para guiar al estudiante en problemas complejos. Si sigue los pasos de este procedimiento *(Conceptualizar, clasificar, analizar, finalizar)*, no sólo encontrará más fácil dar una solución, sino que también ganará más por su esfuerzo. Esta estrategia se encuentra al final del capítulo 2 del volumen I y se usa en todos los ejemplos resueltos en los capítulos 3, 4 y 5, también de ese volumen, de modo que el estudiante puede aprender cómo aplicarla. En los capítulos restantes, la Estrategia se usa en un ejemplo por capítulo como recordatorio de su utilidad.

© Phil Degginger/Stone/Getty

A veces los estudiantes no reconocen las limitaciones de ciertas ecuaciones o leyes físicas en una situación en particular. Es muy importante que el estudiante entienda y recuerde las suposiciones que sirven de fundamento a una teoría o un formalismo particulares. Por ejemplo, ciertas ecuaciones de cinemática se aplican sólo a una partícula que se mueve con aceleración constante. Estas ecuaciones no son válidas para describir movimiento cuya aceleración no sea constante, por ejemplo el movimiento de un objeto conectado a un resorte o al movimiento de un objeto en un fluido.

Experimentos

La física es una ciencia basada en observaciones experimentales. En vista de este hecho, recomendamos tratar de complementar el texto con la realización de varios tipos de experimentos "prácticos", ya sea en casa o en el laboratorio. Éstos se pueden usar para probar ideas y modelos estudiados en clase o en el texto. Por ejemplo, el conocido juguete Slinky™ es excelente para estudiar ondas viajeras; una pelota que oscile en el extremo de una cuerda larga, se puede usar para investigar el movimiento de un péndulo; varias masas conectadas al extremo de un resorte vertical o banda de caucho, se pueden usar para determinar su naturaleza elástica; un viejo par de lentes de sol Polaroid y algunos lentes que ya se hayan desechado, junto con una lente de aumento, son los componentes de varios experimentos en óptica; y una medida aproximada de la aceleración en caída libre se puede determinar con sólo medir con un cronómetro el tiempo que tarda una pelota en caer desde una altura conocida. La lista de estos experimentos es infinita. Cuando no se disponga de modelos físicos, sea imaginativo y trate de crear modelos propios.

Nuevos medios

Encarecidamente recomendamos al estudiante utilice el sistema de aprendizaje ***PhysicsNow*** basado en sitios Web y que acompaña a este libro. Con mucho, es más fácil entender la física si la ve en acción, y estos nuevos materiales le permitirán ser parte de esa acción. Existe el acceso al complemento ***PhysicsNow*** y al URL *http://www.pse6.com* descritos en el Prefacio *(lea cuidadosamente la nota que aparece al respecto en el prefacio)*. Estos recursos de apoyo a este libro presentan un proceso de aprendizaje en tres pasos que consta de prueba previa, plan personalizado de aprendizaje y prueba posterior.

Materiał chroniony prawem autorskim

Una invitación a la física

Esperamos sinceramente que el estudiante encuentre que la física sea una experiencia tan emocionante y digna de disfrutarse, que aprovechará esta experiencia, cualquiera que sea la profesión que haya escogido. ¡Bienvenido al fascinante mundo de la física!

El sabio no estudia la naturaleza porque ésta sea útil; la estudia porque se deleita con ella, y se deleita porque es hermosa. Si la naturaleza no fuera hermosa, no valdría la pena conocerla, y si no valiera la pena conocer la naturaleza, no valdría la pena vivir.

—Henri Poincaré

Materiał chroniony prawem autorskim

Material chron

Mecánica

PARTE 1

La física, ciencia fundamental, estudia los principios básicos del universo. Es la base sobre la cual se rigen otras ciencias, como la astronomía, biología, química y geología. Su belleza radia en la sencillez de sus teorías fundamentales y la forma en que sólo un pequeño número de conceptos, ecuaciones y suposiciones pueden alterar y expandir la visión del mundo que nos rodea.

El estudio de la física se puede dividir en seis campos principales:

1. *mecánica clásica*, que se ocupa del movimiento de objetos que son grandes con respecto a átomos y se mueven a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz;
2. *relatividad*, teoría que describe objetos que se mueven a cualquier velocidad, incluso velocidades que se aproximan a la velocidad de la luz;
3. *termodinámica*, que trata el calor, trabajo, temperatura y comportamiento estadístico de sistemas con un gran número de partículas;
4. *electromagnetismo*, que se relaciona con la electricidad, magnetismo y campos electromagnéticos;
5. *óptica*, que es el estudio del comportamiento de la luz y su interacción con materiales;
6. *mecánica cuántica*, conjunto de teorías que enlazan el comportamiento de la materia al nivel microscópico con observaciones macroscópicas.

Las disciplinas de mecánica y electromagnetismo son básicas para todas las ramas de la física clásica (creadas antes de 1900) y la física moderna (1900 al presente). La primera parte de este libro trata con mecánica clásica, a veces citada como *mecánica de Newton* o simplemente *mecánica*. Éste es un lugar apropiado para empezar un texto de introducción porque muchos de los principios básicos, empleados para entender sistemas mecánicos, se pueden usar posteriormente para describir fenómenos naturales como las ondas y la transferencia de energía por calor. Además, las leyes de conservación de energía y cantidad de movimiento presentadas en mecánica retienen su importancia en las teorías fundamentales de otros campos de acción de la física.

Hoy en día, la mecánica clásica es de vital importancia para estudiantes de todas las disciplinas. Es por demás satisfactorio describir los movimientos de diferentes objetos; por ejemplo, planetas, cohetes y pelotas de béisbol. En la primera parte del texto vamos a describir las leyes de mecánica clásica y examinar una amplia variedad de fenómenos que se pueden entender con estas ideas fundamentales. ■

◄ *Despegue del transbordador espacial Columbia. El trágico accidente del 1 de febrero de 2003, que costó la vida de los siete astronautas a bordo, ocurrió poco antes que el volumen I de esta obra entrara a prensa. El lanzamiento y operación de un transbordador espacial comprende numerosos principios fundamentales de mecánica clásica, termodinámica y electromagnetismo. En la primera parte de este texto estudiamos los principios de mecánica clásica y los aplicamos a la propulsión de cohetes en el capítulo 9. (NASA)*

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 1

Física y mediciones

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

1.1 Patrones de longitud, masa y tiempo

1.2 La materia y construcción de modelos

1.3 Densidad y masa atómica

1.4 Análisis dimensional

1.5 Conversión de unidades

1.6 Estimaciones y cálculos de orden de magnitud

1.7 Cifras significativas

▲ *Mecanismo de relojería. Durante siglos se han construido complicados relojes en un esfuerzo por medir el tiempo con precisión. El tiempo es una de las cantidades físicas que empleamos en el estudio del movimiento de objetos. (elektraVision/Index Stock Imagery)*

Materiał chroniony prawem autorskim

Al igual que otras ciencias, la física está basada en observaciones experimentales y mediciones cuantitativas. El principal objetivo de la física es hallar el número limitado de leyes fundamentales que gobiernan los fenómenos naturales y usarlas para crear teorías que puedan pronosticar los resultados de experimentos futuros. Las leyes fundamentales que se usan en el perfeccionamiento de teorías se expresan en el lenguaje de las matemáticas, herramienta que tiende un puente entre la teoría y el experimento.

Cuando surge una discrepancia entre una teoría y su experimento, deben formularse nuevas teorías para eliminar la discrepancia. En numerosas ocasiones, una teoría es satisfactoria sólo bajo condiciones limitadas; una teoría más general podría ser satisfactoria sin estas limitaciones. Por ejemplo, las leyes del movimiento descubiertas por Isaac Newton (1642-1727) en el siglo XVII, describen con precisión el movimiento de objetos que se desplazan a velocidades normales, pero no se aplican a objetos que se desplazan a velocidades comparables a la de la luz. En contraste, la teoría especial de la relatividad creada por Albert Einstein (1879-1955) a principios del siglo XX, da los mismos resultados que las leyes de Newton a bajas velocidades, pero también describe correctamente el movimiento a velocidades que se aproximan a la de la velocidad de la luz. Por lo tanto, la teoría especial de la relatividad de Einstein, es una teoría más general del movimiento.

La *física clásica* incluye las teorías, conceptos, leyes y experimentos en mecánica, termodinámica, óptica y electromagnetismo clásicos creados antes de 1900. Newton hizo aportaciones importantes a la mecánica clásica como teoría sistemática, y fue uno de los inventores del cálculo como herramienta matemática. En el siglo XVIII continuaron inventos importantes en mecánica, pero los campos de termodinámica, electricidad y magnetismo no se perfeccionaron sino hasta la última parte del siglo XIX, principalmente porque antes de ese tiempo, los dispositivos para experimentos controlados eran demasiado rudimentarios, o no existían.

Una importante revolución en física, que se conoce como *física moderna*, empezó hacia fines del siglo XIX. La física moderna se perfeccionó principalmente por el descubrimiento de que muchos fenómenos físicos no se podían explicar por física clásica. Los dos inventos más importantes en esta época moderna fueron las teorías de la relatividad y la mecánica cuántica. La teoría de Einstein de la relatividad no sólo describe correctamente el movimiento de objetos que se desplazan a velocidades comparables a la velocidad de la luz, sino que revolucionaron por completo los conceptos tradicionales de espacio, tiempo y energía. La teoría de la relatividad también demuestra que la velocidad de la luz es el límite superior de la velocidad de un objeto, y que masa y energía están relacionadas. La mecánica cuántica fue formulada por varios distinguidos científicos para describir fenómenos físicos a nivel atómico.

Los científicos trabajan en forma continua para mejorar nuestro entendimiento de leyes fundamentales, y todos los días aparecen nuevos descubrimientos. En muchos campos de acción hay gran cantidad de traslape entre física, química y biología. La evidencia de este traslape se ve en los nombres de algunas subespecialidades de la ciencia, como son la biofísica, bioquímica, física química, biotecnología, etcétera. Numerosos avances tecnológicos de épocas recientes son el resultado de los esfuerzos de muchos científicos, ingenieros y técnicos. Algunos de los inventos más notables de la última mitad del siglo XX fueron (1) exploraciones planetarias no tripuladas y la llegada del hombre a la Luna, (2) microcircuitos y computadoras de alta velocidad, (3) técnicas sofisticadas de imágenes en investigación científica y medicina, y (4) varios resultados sorprendentes en ingeniería genética. Los impactos de estos inventos y descubrimientos en nuestra sociedad han sido grandes en verdad, y es

Materiał chroniony prawem autorskim

muy probable que futuros descubrimientos e inventos sean emocionantes, de desafío y de gran beneficio para la humanidad.

1.1 Patrones de longitud, masa y tiempo

Las leyes de física se expresan como relaciones matemáticas entre cantidades físicas que introduciremos y analizaremos en todo el libro. Casi todas estas cantidades son *cantidades derivadas*, en cuanto a que se pueden expresar como combinaciones de un pequeño número de *cantidades básicas*. En mecánica, las tres cantidades básicas son longitud, masa y tiempo; todas las otras cantidades en mecánica se pueden expresar en términos de estas tres.

Si hemos de reportar los resultados de una medición a alguien que desea reproducir esta medición, debe definirse un *patrón*. No tendría sentido si un visitante de otro planeta fuera a hablarnos de una longitud de 8 "fallos", si no conocemos el significado de la unidad fallo. Por otra parte, si alguien que conoce nuestro sistema de mediciones reporta que una pared mide 2 metros de alto, y nuestra unidad de longitud se define como un metro, sabemos que la altura de la pared es el doble de nuestra unidad básica de longitud. De igual modo, si decimos que una persona tiene una masa de 75 kilogramos y nuestra unidad de masa se define como un kilogramo, entonces esa persona tiene 75 veces más masa que nuestra unidad básica.[1] Cualquier patrón que se elija debe ser fácilmente accesible y poseer alguna propiedad que se pueda medir de manera confiable. Las medidas tomadas por diferentes personas en diferentes lugares, deben dar el mismo resultado.

En 1960, un comité internacional estableció un conjunto de patrones para la longitud, la masa y otras cantidades fundamentales. El sistema se denomina **SI** (Système International), y sus unidades de longitud, masa y tiempo son el *metro*, *kilogramo* y *segundo*, respectivamente. Otros patrones del SI establecidos por el comité son los de temperatura (el *kelvin*), corriente eléctrica (el *ampere*), intensidad luminosa (la *candela*) y la cantidad de sustancia (el *mol*).

Longitud

En el año 1120 d.C., el rey de Inglaterra decretó que el patrón de longitud en su país sería la *yarda*, y sería precisamente igual a la distancia de la punta de su nariz al extremo de su brazo extendido. Del mismo modo, el patrón original para el pie adoptado por los franceses fue la longitud del real pie del rey Luis XIV. Este patrón prevaleció hasta 1799, cuando el patrón legal de longitud en Francia fue el *metro*, definido como la diezmillonésima parte de la distancia del ecuador al polo norte a lo largo de una línea longitudinal particular que pasa por París.

Con los años se han creado muchos otros sistemas de medición de longitud, pero las ventajas del sistema francés han ocasionado que prevalezca en casi todos los países y en círculos científicos de todo el mundo. Apenas en 1960, la longitud del metro se definió como la distancia entre dos líneas en una barra específica de platino-iridio que se conserva bajo condiciones controladas en Francia. Este patrón fue abandonado por varias razones, siendo la principal que la limitada precisión con la cual puede determinarse la separación entre las líneas en la barra no satisface las necesidades actuales de la ciencia y la tecnología. En las décadas de 1960 y 1970, el metro se definió como 1 650 763.73 longitudes de onda de la luz naranja-roja emitida por una lámpara de kriptón-86, pero, en octubre de 1983, **el metro (m) se redefinió como la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un tiempo de 1/299 792 458 segundos.** En efecto, esta última definición establece que la velocidad de la luz en el vacío es precisamente 299 792 458 metros por segundo.

[1] La necesidad de asignar valores numéricos a varias cantidades físicas medidas fue expresada por Lord Kelvin (William Thomson) como sigue: "Con frecuencia digo que cuando usted puede medir aquello de lo que habla, y lo expresa en números, debe conocer algo acerca de ello, pero cuando usted no puede expresarlo en números, su conocimiento es escaso e insatisfactorio. Tal vez sea el principio del conocimiento, pero usted lo tiene poco avanzado respecto al estado de ciencia."

Materiał chroniony prawem autorskim

Tabla 1.1

Valores aproximados de algunas longitudes medidas	Longitud (m)
Distancia de la Tierra al cuasar conocido más remoto	1.4×10^{26}
Distancia de la Tierra a las galaxias normales más remotas	9×10^{25}
Distancia de la Tierra a la gran galaxia más cercana (M 31, la galaxia de Andrómeda)	2×10^{22}
Distancia del Sol a la estrella más cercana (Próxima Centauri)	4×10^{16}
Un año luz	9.46×10^{15}
Radio medio de órbita de la Tierra alrededor del Sol	1.50×10^{11}
Distancia media de la Tierra a la Luna	3.84×10^{8}
Distancia del ecuador al polo norte	1.00×10^{7}
Radio medio de la Tierra	6.37×10^{6}
Altitud típica (sobre la superficie) de un satélite en órbita alrededor de la Tierra	2×10^{5}
Longitud de un campo de fútbol	9.1×10^{1}
Longitud de una mosca doméstica	5×10^{-3}
Tamaño de las partículas de polvo más pequeñas	$\sim 10^{-4}$
Tamaño de células de casi todos los organismos vivos	$\sim 10^{-5}$
Diámetro de un átomo de hidrógeno	$\sim 10^{-10}$
Diámetro de un núcleo atómico	$\sim 10^{-14}$
Diámetro de un protón	$\sim 10^{-15}$

La tabla 1.1 es una lista de valores aproximados de algunas longitudes medidas. El lector debe estudiar esta tabla, así como las dos tablas siguientes, y empezar a generar su intuición de qué significa una longitud de 20 centímetros, por ejemplo, o una masa de 100 kilogramos o un intervalo de tiempo de 3.2×10^{7} segundos.

Masa

La unidad del SI de masa, **el kilogramo (kg.), se define como la masa de un cilindro de aleación de platino-iridio que se conserva en el Laboratorio Internacional de Pesas y Medidas de Sèvres, Francia.** Este patrón de masa se estableció en 1887, y desde entonces no ha cambiado, porque el platino-iridio es una aleación excepcionalmente estable. En el Instituto Nacional de Patrones y Tecnología (NIST, por sus siglas en inglés) en Gaithersburg, Maryland, se conserva un duplicado del cilindro de Sèvres (figura 1.1a).

La tabla 1.2 es una lista de valores aproximados de las masas de varios objetos.

Tiempo

Antes de 1960, el patrón de tiempo estaba definido en términos del *día solar medio* para el año 1900. (Un día solar es el intervalo entre sucesivas apariciones del Sol en el punto más alto que alcanza en el cielo todos los días). El *segundo* estaba definido como $\left(\frac{1}{60}\right)\left(\frac{1}{60}\right)\left(\frac{1}{24}\right)$ de un día solar medio. Ahora se sabe que la rotación de la Tierra varía ligeramente con el tiempo y, por lo tanto, no es bueno usar este movimiento para definir un patrón de tiempo.

En 1967, el segundo se redefinió para aprovechar la alta precisión que podía obtenerse en un aparato conocido como *reloj atómico* (figura 1.1.b), que utiliza la frecuencia característica del átomo de cesio-133 como el "reloj de referencia." **El segundo (s) se define ahora como 9 192 631 770 veces el periodo de vibración de radiación del átomo de cesio.**[2] Para mantener sincronizados estos relojes y, —en consecuencia, todos los relojes comunes y

[2] El *periodo* se define como el intervalo de tiempo necesario para una vibración completa.

¡ADVERTENCIA!

1.1 No usar comas en números con muchos dígitos

Usaremos aquí la notación científica reglamentaria para números con más de tres dígitos, en la que grupos de tres dígitos se separan por espacios y no por comas. **Así, 10 000 es lo mismo que la notación norteamericana de 10,000.** De igual modo, $\pi = 3.14159265$ se escribe como 3.141 592 65.

Tabla 1.2

Masas de varios objetos (valores aproximados)	Masa (kg)
Universo observable	$\sim 10^{52}$
Galaxia Vía Láctea	$\sim 10^{42}$
Sol	1.99×10^{30}
Tierra	5.98×10^{24}
Luna	7.36×10^{22}
Tiburón	$\sim 10^{3}$
Hombre	$\sim 10^{2}$
Rana	$\sim 10^{-1}$
Mosquito	$\sim 10^{-5}$
Bacteria	$\sim 1 \times 10^{-15}$
Átomo de hidrógeno	1.67×10^{-27}
Electrón	9.11×10^{-31}

¡ADVERTENCIA!

1.2 Valores razonables

Crear intuición acerca de valores típicos de cantidades es importante, porque el estudiante, al trabajar problemas, debe pensar en su resultado final y determinar si parece razonable. Si al calcular la masa de una mosca doméstica llega a un valor de 100 kilogramos, esto *no es razonable* y hay un error en alguna parte.

(a) (b)

Figura 1.1 (a) El kilogramo patrón nacional Número 20, copia precisa del kilogramo patrón internacional que se conserva en Sèvres, Francia, está contenido bajo una doble campana en una bóveda en el Instituto Nacional de Patrones y Tecnología. (b) El patrón fundamental de tiempo de la nación es un reloj atómico perfeccionado en los laboratorios del instituto citado, que se encuentra en Boulder, Colorado. Este reloj no se adelantará ni se atrasará un solo segundo en 20 millones de años.

los que se ajustan a los atómicos, —ha sido necesario agregar algunos segundos a nuestros relojes.

Desde el descubrimiento de Einstein del vínculo entre el espacio y el tiempo, la medición precisa de los intervalos de tiempo exige que conozcamos el movimiento del reloj empleado para medir el intervalo y, en algunos casos, también la ubicación del reloj. De otro modo, por ejemplo, los satélites del sistema de posicionamiento mundial no podrían precisar la ubicación de alguien, con suficiente exactitud, en caso que necesite ser rescatado.

En la tabla 1.3 se presentan valores aproximados de intervalos de tiempo.

Tabla 1.3

Valores aproximados de algunos intervalos de tiempo

	Intervalo de tiempo
Edad del universo	5×10^{17}
Edad de la Tierra	1.3×10^{17}
Edad promedio de un estudiante universitario	6.3×10^{9}
Un año	3.2×10^{7}
Un día (intervalo de tiempo para una revolución de la Tierra sobre su eje)	8.6×10^{4}
Periodo de una clase	3.0×10^{3}
Intervalo de tiempo entre latidos normales	8×10^{-1}
Periodo de las ondas de sonido audible	$\sim 10^{-3}$
Periodo de las ondas de radio típicas	$\sim 10^{-6}$
Periodo de la vibración de un átomo en un sólido	$\sim 10^{-13}$
Periodo de las ondas de luz visible	$\sim 10^{-15}$
Duración de una colisión nuclear	$\sim 10^{-22}$
Intervalo de tiempo para que la luz atraviese un protón	$\sim 10^{-24}$

Materiał chroniony prawem autorskim

Tabla 1.4

Prefijos de potencias de diez		
Potencia	**Prefijo**	**Abreviatura**
10^{-24}	yocto	y
10^{-21}	zepto	z
10^{-18}	atto	a
10^{-15}	femto	f
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	μ
10^{-3}	mili	m
10^{-2}	centi	c
10^{-1}	deci	d
10^{3}	kilo	k
10^{6}	mega	M
10^{9}	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	exa	E
10^{21}	zeta	Z
10^{24}	yota	Y

Además del SI, otro sistema de unidades, el *sistema inglés de ingeniería*, aún se emplea en Estados Unidos a pesar de la aceptación del SI por el resto del mundo. En este sistema, las unidades de longitud, masa y tiempo son el pie (ft), el slug y el segundo, respectivamente. En este texto utilizaremos las unidades del SI, puesto que son casi universalmente aceptadas en la ciencia y en la industria. También se usarán de manera limitada las unidades del sistema inglés en el estudio de la mecánica clásica.

Además de las unidades básicas del SI, metro, kilogramo y segundo, también usaremos otras unidades, como son milímetros y nanosegundos, donde los prefijos *mili* y *nano* denotan multiplicadores de las unidades básicas basados en varias potencias de diez. En la tabla 1.4 aparecen prefijos para las diferentes potencias de diez y sus abreviaturas. Por ejemplo, 10^{-3} es equivalente a 1 milímetro (mm), y 10^{3} corresponde a un kilómetro (km). De igual modo, 1 kilogramo (kg) es 10^{3} gramos (g), y 1 megavolt (MV) es 10^{6} volts (V).

1.2 La materia y construcción de modelos

Si los físicos no pueden interactuar directamente con algunos fenómenos, a veces imaginan un **modelo** para un sistema físico que está relacionado al fenómeno. En este contexto, un modelo es un sistema de componentes físicos, por ejemplo, electrones y protones en un átomo. Una vez que hemos identificado los componentes físicos, hacemos pronósticos acerca del comportamiento del sistema, con base en las interacciones entre los componentes del sistema y/o la interacción entre el sistema y el entorno fuera del sistema.

Como ejemplo, considere el comportamiento de *la materia*. Un cubo de 1 kilogramo de oro sólido, como el que se ve a la izquierda de la figura 1.2, tiene una longitud de 3.73 centímetros por lado. ¿Este cubo es de oro sólido? Si el cubo se corta a la mitad, las dos piezas conservan su identidad química como oro sólido. ¿Pero qué pasa si las piezas se cortan una y otra vez, indefinidamente? Estas preguntas ya se las hacían los antiguos filósofos griegos. Dos de ellos, —Leucipo y su discípulo Demócrito—, no podían aceptar la idea de que tales cortes seguirían por siempre. Especulaban que el proceso a fin de cuentas debería terminar

Materiał chroniony prawem autorskim

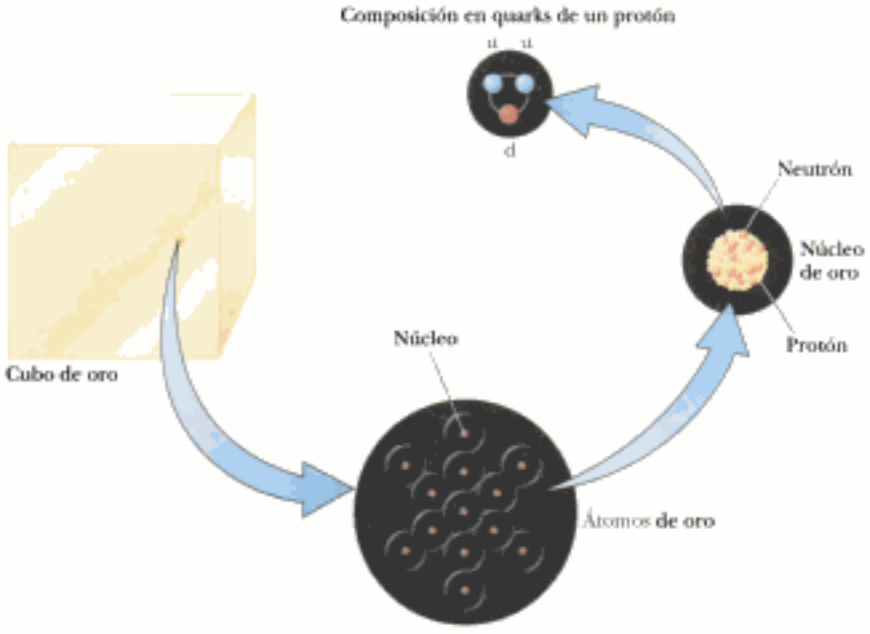


Figura 1.2 Niveles de organización en la materia. La materia ordinaria está formada por átomos, y en el centro de cada átomo está un núcleo compacto constituido por protones y neutrones. Los protones y neutrones están compuestos de quarks. Aquí se ilustra la composición en quarks de un protón.

cuando produjera una partícula que ya no pudiera cortarse. En griego, *átomos* significa "indivisible" y de aquí proviene la palabra *átomo*.

Repasemos brevemente algunos modelos históricos de la estructura de la materia. El modelo griego de la estructura de la materia era el de que toda la materia está formada de átomos, como se sugiere abajo a la derecha del cubo de la figura 1.2. Fuera de esto, no se especificó otra estructura en el modelo; los átomos actuaban como pequeñas partículas que interactuaban entre sí, pero la estructura interna del átomo no era parte del modelo.

En 1897, J. J. Thomson identificó el electrón como una partícula cargada y como constituyente del átomo. Esto llevó al primer modelo del átomo que contenía estructura interna. En el capítulo 20 del volumen II.

Como resultado del descubrimiento del núcleo en 1911, se creó un modelo en el que cada átomo está formado por electrones que rodean al núcleo central. En la figura 1.2 se ve un núcleo. Este modelo lleva, sin embargo, a una pregunta: ¿Tiene estructura? Es decir, ¿el núcleo es una sola partícula o un conjunto de partículas? Su composición exacta no se conoce por completo, incluso hoy día, pero para principios de la década de 1930, evolucionó un modelo que nos ayudó a entender cómo se comporta el núcleo. Específicamente, los científicos determinaron que el núcleo está ocupado por dos entidades básicas que son protones y neutrones. El protón lleva una carga eléctrica positiva, y un elemento químico específico se identifica por el número de protones de su núcleo. Este número se denomina **número atómico** del elemento. Por ejemplo, el núcleo de un átomo de hidrógeno contiene un protón (y por ello el número atómico del hidrógeno es 1), el núcleo de un átomo de helio contiene dos protones (número atómico 2), y el núcleo de un átomo de uranio contiene 92 protones (número atómico 92). Además del número atómico, hay un segundo número que caracteriza a los átomos: el **número de masa,** definido como el número de protones más neutrones de un núcleo. El número atómico de un elemento nunca varía (es decir, el número de protones no varía) pero el número de masa puede variar (es esto, el número de neutrones varía).

La existencia de neutrones fue verificada de manera concluyente en 1932. Un neutrón no tiene carga, y su masa es aproximadamente igual a la de un protón. Uno de sus fines básicos es actuar como "pegamento" que mantiene unido el núcleo. Si no hubiera neutrones

Materiał chroniony prawem autorskim

presentes en el núcleo, la fuerza de repulsión entre partículas de carga positiva, haría que el núcleo se desintegrara.

Pero, ¿es aquí donde termina la división? Ahora se sabe que protones, neutrones y gran número de partículas exóticas están compuestas de seis variedades diferentes de partículas llamadas **quarks,** a las que se les han dado nombres de *arriba, abajo, extraño, encantado, base* y *superior.* Los quarks arriba, encantado y superior tienen cargas de $+\frac{2}{3}$ de la carga del protón, mientras que abajo, extraño y base tienen cargas de $-\frac{1}{3}$ de la del protón; éste está formado por dos quarks arriba y un quark abajo, como se puede ver en la parte superior de la figura 1.2. Se puede demostrar fácilmente que esta estructura pronostica la carga correcta del protón. Del mismo modo, el neutrón consta de dos quarks abajo y un quark arriba, que da una carga neta de cero.

Este proceso de construir modelos es uno que el estudiante debe perfeccionar cuando estudie física, pues tendrá que resolver numerosos problemas matemáticos en este estudio. Una de las técnicas más importantes es construir un modelo para el problema: identificar un sistema de componentes físicos para el problema y hacer pronósticos del comportamiento del sistema, con base en las interacciones entre los componentes del sistema y/o la interacción entre el sistema y su entorno.

1.3 Densidad y masa atómica

En la sección 1.1 exploramos tres cantidades básicas en mecánica. Veamos ahora un ejemplo de una cantidad derivada, la —**densidad.** La densidad ρ de cualquier sustancia se define como su *masa por unidad de volumen:*

En las guardas de este libro se encuentra una tabla de las letras del alfabeto griego.

$$\rho \equiv \frac{m}{V} \tag{1.1}$$

Por ejemplo, el aluminio tiene una densidad de 2.70 g/cm^3, y el plomo la tiene de 11.3 g/cm^3. Por lo tanto, una pieza de aluminio de 10.0 cm^3 de volumen tiene una masa de 27.0 g, mientras que un volumen equivalente de plomo tiene una masa de 113 g. En la tabla 1.5 se da una lista de densidades de varias sustancias.

Los números de protones y neutrones del núcleo de un átomo de un elemento están relacionados con la **masa atómica** del elemento, que se define como la masa de un solo átomo del elemento medido en **unidades de masa atómica** (u) donde 1 u = 1.660 538 7 × 10^{-27} kg.

Tabla 1.5

Densidades de varias sustancias

Sustancia	Densidad ρ (10^3 kg/m^3)
Platino	21.45
Oro	19.3
Uranio	18.7
Plomo	11.3
Cobre	8.92
Hierro	7.86
Aluminio	2.70
Magnesio	1.75
Agua	1.00
Aire a presión atmosférica	0.0012

Materiał chroniony prawem autorskim

La masa atómica del plomo es 207 u y la del aluminio es 27.0 u, pero la relación entre masas atómicas, 207 u/27.0 u = 7.67 no corresponde a la razón entre densidades, $(11.3 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)/(2.70 \times 10^3\ \text{kg/m}^3) = 4.19$. Esta discrepancia se debe a la diferencia en separaciones entre átomos y configuraciones atómicas en las estructuras cristalinas de los dos elementos.

Pregunta rápida 1.1 En un taller de máquinas se producen dos levas, una de aluminio y una de hierro. Ambas tienen la misma masa. ¿Cuál leva es más grande? (a) la de aluminio (b) la de hierro (c) ambas levas tienen la misma dimensión.

Ejemplo 1.1 ¿Cuántos átomos hay en el cubo?

Un cubo sólido de aluminio (densidad 2.70 g/cm^3) tiene un volumen de 0.200 cm^3. Se sabe que 27.0 g de aluminio contienen 6.02×10^{23} átomos. ¿Cuántos átomos de aluminio están contenidos en el cubo?

Solución Como la densidad es igual a la masa por unidad de volumen, la masa del cubo es

$$m = \rho V = (2.70\ \text{g/cm}^3)(0.200\ \text{cm}^3) = 0.540\ \text{g}$$

Para resolver este problema, estableceremos una razón basada en el hecho de que la masa de una muestra de material es proporcional al número de átomos contenido en la muestra. Esta técnica de resolver por razones es muy fuerte y debe ser estudiada y entendida para que pueda aplicarse en futuras soluciones de problemas. Expresemos nuestra proporcionalidad como $m = kN$, donde m es la masa de la muestra, N es el número de átomos de la muestra, y k es una constante de proporcionalidad desconocida. Escribimos dos veces esta razón, una vez para la muestra real de aluminio del problema y otra vez para una muestra de 27.0 g, y luego dividimos la primera ecuación entre la segunda:

$$\begin{aligned} m_{\text{muestra}} &= kN_{\text{muestra}} \\ m_{27.0\ \text{g}} &= kN_{27.0\ \text{g}} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{m_{\text{muestra}}}{m_{27.0\ \text{g}}} = \frac{N_{\text{muestra}}}{N_{27.0\ \text{g}}}$$

Nótese que la constante k de proporcionalidad desconocida se cancela, de modo que no es necesario conocer su valor. Ahora sustituimos los valores:

$$\frac{0.540\ \text{g}}{27.0\ \text{g}} = \frac{N_{\text{muestra}}}{6.02 \times 10^{23}\ \text{átomos}}$$

$$N_{\text{muestra}} = \frac{(0.540\ \text{g})(6.02 \times 10^{23}\ \text{átomos})}{27.0\ \text{g}}$$

$$= 1.20 \times 10^{22}\ \text{átomos}$$

¡ADVERTENCIA!

1.3 Establecer razones

Cuando use razones para resolver un problema, recuerde que las *razones provienen de ecuaciones*. Si usted empieza por ecuaciones que sabe son correctas y puede dividir una ecuación entre la otra, como en el ejemplo 1.1 para obtener una razón útil, evitará errores de razonamiento. Por lo tanto, ¡escriba primero las ecuaciones conocidas!

1.4 Análisis dimensional

La palabra *dimensión* tiene un significado especial en física. Denota la naturaleza física de una cantidad. Si una distancia se mide en unidades de pies o metros o brazas, continuará siendo distancia. Decimos que su dimensión es *longitud*.

Los símbolos que usamos en este libro para especificar las dimensiones de longitud, masa y tiempo son L, M y T, respectivamente.[3] A veces usaremos corchetes [ ] para denotar las dimensiones de una cantidad física. Por ejemplo, el símbolo que usamos para la rapidez es v, y en nuestra notación las dimensiones de rapidez se escriben $[v] = \text{L/T}$. Como otro ejemplo, las dimensiones de área A son $[A] = \text{L}^2$. Las dimensiones de unidades de área, volumen, rapidez y aceleración se ilustran en la tabla 1.6. Las dimensiones de otras cantidades, por ejemplo fuerza y energía, se describirán cuando se introduzcan en el texto.

En numerosas situaciones, el estudiante tendrá que deducir o verificar una ecuación específica. Es posible usar un procedimiento útil y poderoso denominado *análisis dimensional* para ayudar en la deducción o verificación de su expresión final. El análisis dimensional ha-

[3] Las *dimensiones* de una cantidad se simbolizan con letras mayúsculas no cursivas, como L. El *símbolo* de la cantidad en sí es con cursivas, como L para la longitud de un objeto, o t para tiempo.

Materiał chroniony prawem autorskim

Tabla 1.6

Unidades de área, volumen rapidez y aceleración				
Sistema	Área (L^2)	Volumen (L^3)	Rapidez (L/T)	Aceleración (L/T^2)
SI	m^2	m^3	m/s	m/s^2
Sistema inglés	pie^2	pie^3	pie/s	pie/s^2

ce uso del hecho de que las **dimensiones pueden ser tratadas como cantidades algebraicas.** Por ejemplo, las cantidades se pueden sumar o restar sólo si tienen las mismas dimensiones. Además, los términos de ambos lados de una ecuación deben tener las mismas dimensiones. Al seguir estas sencillas reglas, el estudiante puede usar análisis dimensional para ayudar a determinar si una expresión tiene la forma correcta. La relación puede ser correcta sólo si las dimensiones de ambos lados de la ecuación son iguales.

Para ilustrar este procedimiento, suponga que el lector desea deducir una ecuación para la posición x de un auto en un tiempo t si el auto arranca desde el reposo y se desplaza con aceleración constante a. En el capítulo 2 hallaremos que la expresión correcta es $x = \frac{1}{2}at^2$. Usemos análisis dimensional para verificar la validez de esta expresión. La cantidad x del lado izquierdo tiene la dimensión de longitud. Para que la ecuación sea dimensionalmente correcta, la cantidad del lado derecho también debe tener la dimensión de longitud. Podemos efectuar una prueba dimensional al sustituir las dimensiones para aceleración, L/T^2 (tabla 1.6), y tiempo, T, en la ecuación. Esto es, la forma dimensional de la ecuación $x = \frac{1}{2}at^2$ es

$$L = \frac{L}{T^2} \cdot T^2 = L$$

Las dimensiones de tiempo se cancelan como se muestra, dejando la dimensión de longitud en el lado derecho.

Un procedimiento más general que usa análisis dimensional, es establecer una expresión de la forma

$$x \propto a^n t^m$$

donde n y m son exponentes que deben ser determinados y el símbolo $\propto$ indica una proporcionalidad. Esta relación es correcta sólo si las dimensiones de ambos lados son iguales. Debido a que la dimensión del lado izquierdo es longitud, la dimensión del lado derecho también debe ser longitud. Esto es,

$$[a^n t^m] = L = L^1T^0$$

Como las dimensiones de aceleración son L/T^2 y la dimensión de tiempo es T, tenemos

$$(L/T^2)^n T^m = L^1T^0$$

$$(L^n T^{m-2n}) = L^1T^0$$

Los exponentes de L y T deben ser iguales en ambos lados de la ecuación. De los exponentes de L, vemos inmediatamente que $n = 1$. De los exponentes de T, vemos que $m - 2n = 0$, que, una vez sustituido por n, nos da $m = 2$. Regresando a nuestra expresión original $x \propto a^n t^m$, concluimos que $x \propto at^2$. Este resultado difiere en un factor de $\frac{1}{2}$ de la expresión correcta, que es $x = \frac{1}{2}at^2$.

Pregunta rápida 1.2 Verdadero o Falso: El análisis dimensional puede dar el valor numérico de constantes de proporcionalidad que pueden aparecen en una expresión algebraica.

¡ADVERTENCIA!

1.4 Símbolos para cantidades

Algunas cantidades tienen un pequeño número de símbolos para representarlas. Por ejemplo, el símbolo del tiempo es casi siempre t. Otras cantidades podrían tener varios símbolos, dependiendo del uso. La longitud puede describirse con símbolos como x, y y z (para posición), r (para radio), a, b, y c (para los catetos de un triángulo rectángulo), ℓ (para la longitud de un objeto), d (para una distancia), h (para una altura), etcétera.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 1.2 Análisis de una ecuación

Demuestre que la expresión $v = at$ es dimensionalmente correcta, donde v representa rapidez, a aceleración, y t es un instante de tiempo.

Solución Para el término de rapidez, tenemos de la tabla 1.6

$$[v] = \frac{L}{T}$$

La misma tabla nos da L/T^2 para las dimensiones de aceleración, por lo que las dimensiones de at son

$$[at] = \frac{L}{T^2}T = \frac{L}{T}$$

Entonces la expresión es dimensionalmente correcta. (Si la expresión fuera $v = at^2$, ésta sería dimensionalmente incorrecta. Vea por qué)

Ejemplo 1.3 Análisis de una ley de potencia

Suponga que la aceleración a de una partícula que se mueve con rapidez uniforme v en un círculo de radio r es proporcional a alguna potencia de r, por ejemplo r^n, y alguna potencia de v, como v^m. Determine los valores de n y m y escriba la forma más sencilla de una ecuación para la aceleración.

Solución Tomemos a como

$$a = kr^n v^m$$

donde k es una constante de proporcionalidad que no tiene dimensiones. Si conocemos las dimensiones de a, r y v, vemos que la ecuación dimensional debe ser

$$\frac{L}{T^2} = L^n\left(\frac{L}{T}\right)^m = \frac{L^{n+m}}{T^m}$$

Esta ecuación dimensional se balancea bajo las condiciones:

$$n + m = 1 \qquad \text{y} \qquad m = 2$$

Por lo tanto, $n = -1$, y podemos escribir la expresión de aceleración como

$$a = kr^{-1}v^2 = k\frac{v^2}{r}$$

Cuando estudiemos el movimiento circular uniforme, veremos que $k = 1$ si se usa un conjunto de unidades consistente. La constante k no sería igual a 1 si, por ejemplo, v fuera en km/h y buscáramos a en m/s².

¡ADVERTENCIA!

1.5 Siempre incluya unidades

Cuando realice cálculos, incluya las unidades para toda cantidad y lleve las unidades en todo el cálculo. Evite la tentación de cancelar las unidades antes que sea oportuno, y luego poner las unidades esperadas una vez que tenga una respuesta. Al incluir las unidades en cada paso, es posible detectar errores si las unidades para la respuesta resultan ser incorrectas.

1.5 Conversión de unidades

A veces es necesario convertir unidades de un sistema a otro, o convertir dentro de un sistema, por ejemplo de kilómetros a metros. Las igualdades entre el SI y el sistema inglés de ingeniería de unidades de longitud son como sigue:

$$1 \text{ milla} = 1\,609 \text{ m} = 1.609 \text{ km} \qquad 1 \text{ pie} = 0.304\,8 \text{ m} = 30.48 \text{ cm}$$

$$1 \text{ m} = 39.37 \text{ pulg} = 3.281 \text{ pies} \qquad 1 \text{ pulg} = 0.025\,4 \text{ m} = 2.54 \text{ cm (exactamente)}$$

En el Apéndice A se puede hallar una lista más completa de factores de conversión.

Las unidades se pueden tratar como cantidades algebraicas que se pueden cancelar entre sí. Por ejemplo, suponga que deseamos convertir 15.0 pulg a centímetros. Como 1 pulgada se define que mide exactamente 2.54 centímetros, encontramos que

$$15.0 \text{ pulg} = (15.0 \text{ pulg})\left(\frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ pulg}}\right) = 38.1 \text{ cm}$$

donde la razón del paréntesis es igual a 1. Nótese que escogemos poner la unidad de una pulgada en el denominador y se cancela con la unidad de la cantidad original. La unidad restante es el centímetro, que es nuestro resultado deseado.

Pregunta rápida 1.3 La distancia entre dos ciudades es 100 millas. El número de kilómetros entre las dos ciudades es (a) menor a 100 (b) mayor a 100 (c) igual a 100.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 1.4 ¿Está acelerando?

En una carretera interestatal de una región rural de Wyoming, un auto está viajando a una rapidez de 38.0 m/s. ¿Está el auto excediendo el límite de rapidez de 75.0 mi/h?

Solución Primero convertimos metros a millas:

$$(38.0\ \text{m/s})\left(\frac{1\ \text{mi}}{1\,609\ \text{m}}\right) = 2.36 \times 10^{-2}\ \text{mi/s}$$

Ahora convertimos segundos a horas:

$$(2.36 \times 10^{-2}\ \text{mi/s})\left(\frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}}\right)\left(\frac{60\ \text{min}}{1\ \text{h}}\right) = 85.0\ \text{mi/h}$$

Entonces, el auto está excediendo el límite de rapidez y debe reducir su rapidez.

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si el conductor es extranjero y está familiarizado con rapidez medida en km/h? ¿Cuál es la rapidez del auto en km/h?

Respuesta Podemos convertir nuestra respuesta final a las unidades apropiadas:

$$(85.0\ \text{mi/h})\left(\frac{1.609\ \text{km}}{1\ \text{mi}}\right) = 137\ \text{km/h}$$

La figura 1.3 muestra el velocímetro de un automóvil, con velocidades en mi/h y en km/h. ¿Con esta fotografía, puede el lector verificar la conversión que acabamos de hacer?

Pat Bennett/Getty Images

Figura 1.3 Velocímetro de un vehículo que muestra la rapidez en millas por hora y kilómetros por hora.

1.6 Estimaciones y cálculos de orden de magnitud

A veces es útil calcular una respuesta aproximada a un problema físico dado incluso cuando se dispone de poca información. Esta respuesta se puede usar entonces para determinar si es o no es necesario un cálculo más preciso. Esta aproximación suele estar basada en ciertas suposiciones, que deben ser modificadas si es necesaria mayor precisión. En ocasiones llamaremos *orden de magnitud* de cierta cantidad a la potencia de diez del número que describe esa cantidad. Por lo general, cuando se hace un cálculo de orden de magnitud, los resultados son confiables hasta un factor de 10. Si una cantidad aumenta en valor en tres órdenes de magnitud, esto significa que su valor aumenta en un factor de $10^3 = 1\,000$. Usamos el símbolo ~ como "es del orden de." Entonces,

$$0.008\,6 \sim 10^{-2} \qquad 0.002\,1 \sim 10^{-3} \qquad 720 \sim 10^{5}$$

El espíritu de los cálculos de orden de magnitud, a veces conocidos como "estimaciones al azar" o "cifras aproximadas," se da en la siguiente cita: "Efectúe una estimación antes de cualquier cálculo, pruebe un argumento físico sencillo. . . antes de cualquier deducción, adivine la respuesta a cualquier acertijo."[4] Las imprecisiones debidas a cálculos demasiado bajos para un número, casi siempre son canceladas por otras suposiciones que son demasiado elevadas. El lector encontrará que, con la práctica, las estimaciones mejorarán cada vez más. Los problemas de estimación pueden ser divertidos para trabajador conforme se cancelan dígitos, se aventuran aproximaciones razonables para números desconocidos, se simplifican las presunciones y se le da vueltas a la pregunta para convertirla en algo que se

[4] E. Taylor and J. A. Wheeler, *Spacetime Physics: Introduction to Special Relativity*, 2nd ed., San Francisco, W. H. Freeman & Company, Publishers, 1992, p. 20.

Materiał chroniony prawem autorskim

pueda responder con muy poca manipulación matemática. Debido a la sencillez de estos tipos de cálculos, se pueden ejecutar en un *pequeño* trozo de papel, de modo que estas estimaciones se llaman "cálculos al reverso de un sobre."

Ejemplo 1.5 Respiraciones en una vida

Estime el número de respiraciones que se hagan en una vida promedio.

Solución Empezamos por pensar que una vida promedio dura alrededor de 70 años. El único otro cálculo que debemos hacer en este ejemplo es el del número promedio de respiraciones que una persona hace en un minuto. Este número varía, dependiendo de si la persona se está ejercitando, durmiendo, está de mal genio, serena, etcétera. Hasta el orden de magnitud más cercano, escogeremos 10 respiraciones por minuto como nuestra estimación del promedio. (Esto es ciertamente más cercano al valor verdadero que una respiración por minuto o 100 respiraciones por minuto). El número de minutos en un año es, aproximadamente,

$$1 \text{ año}\left(\frac{400 \text{ días}}{1 \text{ año}}\right)\left(\frac{25 \text{ h}}{1 \text{ día}}\right)\left(\frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}}\right) = 6 \times 10^5 \text{ min}$$

Nótese lo sencillo que es en esta expresión multiplicar 400×25 en lugar de trabajar con el más preciso 365×24. Estos valores aproximados para el número de días de un año y el número de horas de un día son suficientemente cercanos para nuestros fines. Por lo tanto, en 70 años habrá (70 años)$(6 \times 10^5$ minutos/año$) = 4 \times 10^7$ minutos. A un ritmo de 10 respiraciones/minuto, un individuo haría 4×10^8 respiraciones en su vida, o del orden de 10^9 respiraciones.

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si el promedio de vida se estimara de 80 años en lugar de 70? ¿Cambiaría esto nuestro cálculo final?

Respuesta Podríamos decir que (80 años)$(6 \times 10^5$ min/año$) = 5 \times 10^7$ minutos, de modo que nuestra estimación final sería 5×10^8 respiraciones. Esto es todavía del orden de 10^9 respiraciones, de modo que el cálculo a un orden de magnitud estaría sin cambio. Además, 80 años es 14% más que 70 años, pero hemos hecho una estimación en exceso del intervalo de tiempo total al usar 400 días en un año en lugar de 365 y 25 horas en un día en lugar de 24. Estos dos números juntos resultan en una estimación en exceso de 14%, que cancela el efecto de la mayor duración de vida.

Ejemplo 1.6 Es un largo camino a San José

Estime el número de pasos que debe dar una persona que camine de Nueva York a Los Ángeles.

Solución Sin consultar la distancia entre estas dos ciudades, de una clase de geografía el estudiante puede recordar que las separan unas 3 000 millas. La siguiente aproximación que debemos hacer es la de la longitud de un paso. Por supuesto que esta longitud depende de la persona que hace la caminata, pero podemos estimar que cada paso es de unos 2 pies. Con nuestro tamaño estimado de pasos, podemos determinar el número de pasos en una milla. Debido a que éste es un cálculo aproximado, redondeamos 5 280 pies/mi a 5 000 pies/mi. (¿Qué porcentaje de error introduce esto?). El factor de conversión nos da

$$\frac{5\,000 \text{ pies/mi}}{2 \text{ pies/pasos}} = 2\,500 \text{ pasos/mi}$$

Ahora convertimos a notación científica para hacer mentalmente el cálculo:

$$(3 \times 10^3 \text{ mi})(2.5 \times 10^3 \text{ pasos/mi})$$

$$= 7.5 \times 10^6 \text{ pasos} \sim 10^7 \text{ pasos}$$

Por lo tanto, si intentamos cruzar a pie los Estados Unidos, nos tomará del orden de 10 millones de pasos. Esta estimación es casi de seguro demasiado pequeña, porque no hemos considerado curvas ni subir y bajar montañas, pero está probablemente en el orden de magnitud de la respuesta correcta.

Ejemplo 1.7 ¿Cuánta gasolina consumimos?

Calcule el número de galones de gasolina que consumen anualmente todos los autos de Estados Unidos.

Solución Debido a que hay unos 280 millones de personas en Estados Unidos, se calcula que hay 100 millones de autos (suponiendo que hay entre dos y tres personas por auto). También calculamos que cada auto recorre al año unas 10 000 millas. Si consideramos un consumo de gasolina de 20 mi/galón o 0.05 galón/mi, entonces cada auto utiliza 500 galones/año. La multiplicación de esto por el número total de autos en Estados Unidos nos da un consumo estimado total de

$$5 \times 10^{10} \text{ gal} \sim 10^{11} \text{ gal.}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

1.7 Cifras significativas

Cuando se miden ciertas cantidades, los valores medidos se conocen sólo hasta los límites de la incertidumbre experimental. El valor de esta incertidumbre puede depender de varios factores, como la calidad del aparato, la habilidad del experimentador y el número de mediciones efectuadas. El número de **cifras significativas** en una medición se puede usar para expresar algo acerca de la incertidumbre.

Como ejemplo de cifras significativas, suponga que en un experimento de laboratorio nos piden medir el área de una etiqueta de disco de computadora con una cinta métrica como instrumento de medición. Supongamos que la precisión hasta la cual se puede hacer una medición particular de la longitud de la etiqueta es ± 0.1 cm. Si la longitud se mide y resulta ser de 5.5 centímetros, podemos decir sólo que su longitud está entre 5.4 centímetros y 5.6 centímetros. En este caso, decimos que el valor medido tiene dos cifras significativas. Nótese que las cifras significativas incluyen el primer dígito estimado. De igual modo, si se encuentra que el ancho de la etiqueta se mide y es de 6.4 centímetros, el valor real está entre 6.3 y 6.5 centímetros. En consecuencia, podríamos escribir los valores medidos como (5.5 ± 0.1) cm y (6.4 ± 0.1) cm.

Ahora suponga que deseamos hallar el área de la etiqueta al multiplicar los dos valores medidos. Si dijéramos que el área es $(5.5 \text{ cm})(6.4 \text{ cm}) = 35.2 \text{ cm}^2$, nuestra respuesta no sería justificable porque contiene tres cifras significativas, que es mayor al número de cifras significativas en cualquiera de las longitudes medidas. Una buena regla práctica para determinar el número de cifras significativas que se pueden expresar en una multiplicación o una división, es como sigue:

> Cuando se multiplican varias cantidades, el número de cifras significativas de la respuesta final es el mismo que el número de cifras significativas de la cantidad que tenga el menor número de cifras significativas. La misma regla se aplica a la división.

Al aplicar esta regla al ejemplo anterior de multiplicación, vemos que la respuesta para el área sólo puede tener dos cifras significativas, porque nuestras cantidades medidas tienen sólo dos cifras significativas. Por lo tanto, todo lo que podemos decir es que el área es 35 cm^2, reconociendo que el valor puede variar entre $(5.4 \text{ cm})(6.3 \text{ cm}) = 34 \text{ cm}^2$ y $(5.6 \text{ cm})(6.5 \text{ cm}) = 36 \text{ cm}^2$.

Los ceros pueden ser o no ser cifras significativas. Los que se usan para colocar el punto decimal en números como 0.03 y 0.007 5 no son significativas, por lo cual hay una y dos cifras significativas, respectivamente, en estos dos valores. Cuando la posición de los ceros viene a la derecha de otros dígitos, existe la posibilidad de una interpretación incorrecta. Por ejemplo, suponga que la masa de un objeto se da como 1 500 gramos. Este valor es ambiguo, porque no sabemos si los últimos dos ceros se usan para colocar el punto decimal, o si representan cifras significativas en la medición. Para eliminar esta ambigüedad, es común usar notación científica para indicar el número de cifras significativas. En este caso, expresaríamos la masa como 1.5×10^3 g si hay dos cifras significativas en el valor medido, 1.50×10^3 g si hay cuatro cifras significativas y 1.500×10^3 g si hay cuatro. La misma regla se cumple para números menores a 1, de modo que 2.3×10^{-4} tiene dos cifras significativas (y podría escribirse 0.000 23) y 2.30×10^{-4} tiene tres cifras significativas (también escrito 0.000 230). En general, **una cifra significativa en una medición es un dígito conocido confiablemente (diferente del cero usado para ubicar el punto decimal) o el primer dígito estimado.**

Para adición y sustracción, debe considerarse el número de lugares decimales cuando se determina cuántas cifras significativas se han de indicar:

> Cuando se suman o restan números, el número de lugares decimales del resultado debe ser igual al número más pequeño de lugares decimales de cualquier término de la suma.

¡ADVERTENCIA!

1.6 Lea con cuidado

Nótese que la regla para adición y sustracción es diferente de la de multiplicación y división. Para adición y sustracción, la consideración importante es el número de *lugares decimales*, no el número de *cifras significativas*.

Materiał chroniony prawem autorskim

Por ejemplo, si deseamos calcular 123 + 5.35, la respuesta es 128 y no 128.35. Si calculamos la suma de 1.000 1 + 0.000 3 = 1.000 4, el resultado tiene cinco cifras significativas, aun cuando uno de los términos de la suma, 0.000 3, tiene sólo una cifra significativa. De igual modo, si efectuamos la resta 1.002 − 0.998 = 0.004, el resultado tiene sólo una cifra significativa, aun cuando un término tiene cuatro cifras significativas y el otro tiene tres. En este libro, **la mayor parte de los ejemplos numéricos y problemas de final de capítulo, darán respuestas con tres cifras significativas.** Cuando se realicen estimaciones, por lo general trabajaremos con una sola cifra significativa.

Si el número de cifras significativas del resultado de una suma o resta debe reducirse, hay una regla general para redondear números; esta regla dice que el último dígito retenido debe aumentarse en 1 si el último dígito cancelado es mayor a 5. Si éste es menor a 5, el último dígito retenido permanece como esté. Si el último cancelado es igual a 5, el dígito restante debe redondearse al número par más cercano. (Esto ayuda a evitar acumulación de errores en procesos aritméticos largos).

Una técnica para evitar acumulación de errores, es retardar el redondeo de números de un cálculo largo hasta tener el resultado final. Espere el estudiante hasta estar listo para copiar la respuesta final de su calculadora antes de redondear al número correcto de cifras significativas.

Pregunta rápida 1.4 Supongamos que el lector mide la posición de una silla con una cinta métrica y anota que el centro del asiento mide 1.043 860 564 2 m desde una pared. ¿Qué concluiría a partir de esta medición registrada?

Ejemplo 1.8 Instalación de una alfombra

Ha de instalarse una alfombra en un cuarto cuya longitud medida es 12.71 m y cuyo ancho medido es 3.46 m. Encuentre el área del cuarto.

Solución Si se multiplica 12.71 m por 3.46 m en una calculadora, la respuesta es 43.9766 m². ¿Cuántos de estos números se consideran cifras significativas? La regla práctica para multiplicación nos dice que sólo se puede expresar el número de cifras significativas de la respuesta como cifras haya en la cantidad medida que tenga el número más bajo de cifras significativas. En este ejemplo, el número más bajo de cifras significativas es tres en 3.46 m, por lo que se debe expresar la respuesta final como **44.0 m²**.

RESUMEN

Las tres cantidades físicas fundamentales de la mecánica son longitud, masa y tiempo, que en el SI tienen unidades de metros (m), kilogramos (kg), y segundos (s), respectivamente. Los prefijos que indican varias potencias de diez se usan con estas tres unidades básicas.

La **densidad** de una sustancia se define como su *masa por unidad de volumen*. Diferentes sustancias tienen diferentes densidades, principalmente debido a diferencias en sus masas atómicas y sus configuraciones atómicas.

El método de **análisis dimensional** es poderoso para resolver problemas de física. Las dimensiones se pueden tratar como cantidades algebraicas. Al hacer estimaciones y realizar cálculos de orden de magnitud, el estudiante debe ser capaz de aproximar la respuesta a un problema cuando no hay suficiente información disponible para especificar en forma completa una solución exacta.

Cuando calcule un resultado a partir de varios números medidos, cada uno de ellos con determinada precisión, deberá dar el resultado con el número correcto de **cifras significativas.** Cuando multiplique varias cantidades, el número de cifras significativas de la respuesta final es igual al de cifras significativas de la cantidad que tenga el número más bajo de cifras significativas. La misma regla aplica a la división. Cuando se sumen o resten números,

Material chroniony prawem autorskim

el número de lugares decimales del resultado debe ser igual al número más pequeño de lugares decimales de cualquier término de la suma.

PREGUNTAS

1. ¿Qué tipos de fenómenos naturales podrían servir como patrones de tiempo?
2. Suponga que los tres patrones fundamentales del sistema métrico fueran longitud, *densidad*, y tiempo en lugar de longitud, *masa* y tiempo. El patrón de densidad de este sistema está definido como el del agua. ¿Qué consideraciones acerca del agua sería necesario tomar para asegurarse que el patrón de densidad es tan preciso como es posible?
3. La alzada de un caballo se da a veces en unidades de "cuartas". ¿Por qué es éste un mal patrón de longitud?
4. Exprese las siguientes cantidades con el uso de los prefijos dados en la tabla 1.4: (a) 3×10^{-4} m (b) 5×10^{-5} s (c) 72×10^{2} g.
5. Suponga que dos cantidades A y B tienen diferentes dimensiones. Determina cuál de las siguientes operaciones aritméticas *podría* tener sentido físicamente: (a) $A + B$ (b) A/B (c) $B - A$ (d) AB.
6. Si una ecuación es dimensionalmente correcta, ¿significa esto que la ecuación debe ser verdadera? Si una ecuación no es dimensionalmente correcta, ¿significa esto que la ecuación no puede ser verdadera?
7. Realice un cálculo de orden de magnitud para una situación cotidiana que encuentre. Por ejemplo, ¿qué distancia camina o conduce un auto todos los días?
8. Encuentre el orden de magnitud de su edad en segundos.
9. ¿Qué nivel de precisión está implícito en un cálculo de orden de magnitud?
10. Estime la masa de este libro de texto en kilogramos. Si cuenta con una báscula, compruebe su cálculo.
11. En respuesta a la pregunta de un estudiante, un guardia del Museo de Historia Natural dice de los fósiles que están cerca de la estación, "Cuando empecé a trabajar aquí hace 24 años, ellos tenían 80 millones de años de antigüedad, de modo que súmelas." ¿Qué debe concluir el estudiante acerca de la edad de los fósiles?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, difícil = solución guiada con sugerencias disponibles en http://www.pse6.com

= use computadora para resolver el problema = problemas numéricos y simbólicos por pares

Sección 1.2 La materia y construcción de modelos

Nota: Consulte las guardas, apéndices y tablas del texto siempre que sea necesario para resolver problemas. Para este capítulo, el apéndice B.3 puede ser particularmente útil. Las respuestas a problemas de número impar aparecen al final del libro.

1. Un sólido cristalino consta de átomos acomodados en una estructura reticular repetitiva. Considere un cristal como el que se ilustra en la figura P1.1a. Los átomos están en los vértices de cubos de lado $L = 0.200$ nm. Una evidencia para la configuración regular de átomos que proviene de las superficies planas, a lo largo de las cuales un cristal se separa, o corta, cuando se rompe. Suponga que este cristal se corta a lo largo de la diagonal de una cara, como se ve en la figura P1.1b. Calcule la separación d entre dos planos atómicos adyacentes que se separan cuando el cristal se corta.

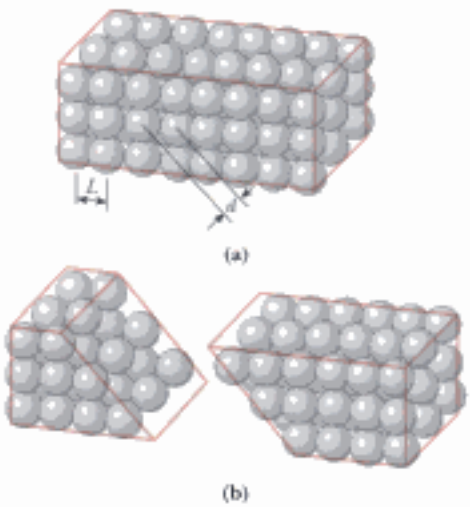


Figura P1.1

Materiał chroniony prawem autorskim

Sección 1.3 Densidad y masa atómica

2. Utilice la información de las guardas de este libro para calcular la densidad promedio de la Tierra. Consulte las tablas 1.5 y 14.1. En otra fuente busque la densidad de una piedra superficial común, como el granito, y compárela con la de la Tierra.

3. El kilogramo patrón es un cilindro de platino-iridio de 39.0 milímetros de altura y 39.0 de diámetro. ¿Cuál es la densidad del material?

4. Un importante constructor de automotores muestra un modelo de su primer automóvil, fundido a presión, hecho de 9.35 kilogramos de hierro. Para conmemorar su centésimo año en el negocio, un trabajador volverá a fundir el modelo en oro con los dados originales. ¿Qué masa de oro es necesaria para hacer el nuevo modelo?

5. ¿Qué masa de un material de densidad ρ se requiere para hacer una capa esférica hueca que tenga radio interior r_1 y radio exterior r_2?

6. Se cortan dos esferas de cierta piedra uniforme. Una tiene un radio de 4.50 centímetros. La masa de la otra es cinco veces mayor. Encuentre su radio.

7. Calcule la masa de un átomo de (a) helio, (b) hierro, y (c) plomo. Dé sus respuestas en gramos. Las masas atómicas de estos átomos son 4.00 u, 55.9 u, y 207 u, respectivamente.

8. El párrafo que precede al ejemplo 1.1 del texto menciona que la masa atómica del aluminio es 27.0 u = $27.0 \times 1.66 \times 10^{-27}$ kg. El ejemplo 1.1 dice que 27.0 g de aluminio contienen 6.02×10^{23} átomos. (a) Demuestre que cada uno de estos dos enunciados implica al otro. (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Qué pasaría si no es aluminio? Representemos por M el valor numérico de la masa de un átomo de cualquier elemento químico en unidades de masa atómica. Demuestre que M gramos de la sustancia contiene un número particular de átomos, el mismo número para todos los elementos. Calcule este número precisamente a partir del valor de u citado en el texto. El número de átomos en M gramos de un elemento se denomina *número de Avogadro* N_A. La idea se puede extender: el número de Avogadro de moléculas de un compuesto químico tiene una masa de M gramos, donde M unidades de masa atómica es la masa de una molécula. El número de Avogadro de átomos o moléculas se llama *mol*, simbolizado como 1 mol. Una tabla periódica de los elementos, como en el Apéndice C, y la fórmula química para un compuesto contienen suficiente información para hallar la masa molar del compuesto. (c) Calcule la masa de un mol de agua, H_2O. (d) Encuentre la masa molar del CO_2.

9. El día de su boda, su novia le da un anillo de oro de 3.80 g de masa. Cincuenta años después su masa es 3.35 g. En promedio, ¿cuántos átomos se desprendieron del anillo durante cada segundo de su matrimonio? La masa atómica del oro es 197 u.

10. Un pequeño cubo de hierro se observa bajo un microscopio. La arista del cubo es 5.00×10^{-6} cm de largo. Encuentre (a) la ma-sa del cubo y (b) el número de átomos de hierro del cubo. La masa atómica del hierro es 55.9 u, y su densidad es 7.86 g/cm^3.

11. Una viga I estructural está hecha de acero. En la figura P1.11 se aprecia una vista de su sección transversal y sus dimensiones. La densidad del acero es 7.56×10^3 kg/m^3. (a) ¿Cuál es la masa de una sección de 1.50 m de largo? (b) Suponga que los átomos son predominantemente hierro, con una masa atómica de 55.9 u. ¿Cuántos átomos hay en esta sección?

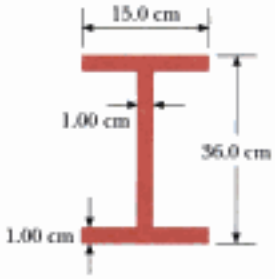


Figura P1.11

12. Un niño en la playa cava un agujero en la arena y usa una cubeta para llenarla con agua que tiene una masa de 1.20 kg. La masa de una molécula de agua es 18.0 u. (a) Encuentre el número de moléculas de agua en esta cubeta de agua. (b) Suponga que la cantidad de agua en nuestro planeta es constante y es 1.32×10^{21} kg. ¿Cuántas, de las moléculas de agua de esta cubeta, es probable que hayan estado en una cantidad igual de agua que una vez llenó una huella particular de una gorra, dejada por un Tiranosauro que cazaba en una playa similar?

Sección 1.4 Análisis dimensional

13. La posición de una partícula que se mueve bajo aceleración uniforme es alguna función de tiempo y la aceleración. Suponga que escribimos esta posición como $s = ka^m t^n$, donde k es una constante adimensional. Demuestre por análisis dimensional que esta expresión se satisface si $m = 1$ y $n = 2$. ¿Puede este análisis dar el valor de k?

14. La figura P1.14 muestra un *cono truncado*. De las siguientes expresiones de medición (geométricas), ¿cuál describe (a) la circunferencia total de las caras circulares planas (b) el volumen (c) el área de la superficie curva? (i) $\pi(r_1 + r_2)[h^2 + (r_1 - r_2)^2]^{1/2}$ (ii) $2\pi(r_1 + r_2)$ (iii) $\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$.

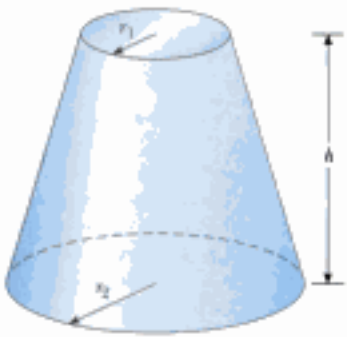


Figura P1.14

Materiał chroniony prawem autorskim

15. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones son dimensionalmente correctas?

(a) $v_f = v_i + ax$

(b) $y = (2\text{ m})\cos(kx)$, donde $k = 2\text{ m}^{-1}$.

16. (a) Una ley fundamental de movimiento expresa que la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza resultante ejercida sobre el objeto, e inversamente proporcional a su masa. Si se define que la constante de proporcionalidad no tiene dimensiones, determine las dimensiones de la fuerza. (b) El newton es la unidad de fuerza del SI. De acuerdo con los resultados para (a), ¿cómo puede expresarse una fuerza que tiene unidades de newtons usando las unidades fundamentales de masa, longitud y tiempo?

17. La ley de Newton de la gravitación universal está representada por

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Aquí F es la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por un pequeño objeto sobre otro, M y m son las masas de los objetos, y r es la distancia. La fuerza tiene unidades del SI de kg·m/s². ¿Cuáles son las unidades del SI de la constante de proporcionalidad G?

Sección 1.5 Conversión de unidades

18. Un trabajador va a pintar las paredes de un cuarto cuadrado de 8.00 pies de alto y 12.0 pies en cada lado. ¿Qué área superficial en metros cuadrados debe cubrir?

19. Suponga que su pelo crece a razón de 1/32 pulg por día. Encuentre la rapidez con la que crece en nanómetros por segundo. Debido a que la distancia entre átomos de una molécula es del orden de 0.1 nm, su respuesta sugiere la rapidez con la que capas de átomos se ensamblan en esta síntesis de proteína.

20. El volumen de una cartera es 8.50 pulg³ Convierta este valor a m³, usando la definición de 1 pulg = 2.54 cm.

21. Un lote rectangular de construcción mide 100 pies por 150 pies. Determine el área de este lote en m².

22. Un auditorio mide 40.0 m × 20.0 m × 12.0 m. La densidad del aire es 1.20 kg/m³. ¿Cuáles son (a) el volumen del cuarto en pies cúbicos y (b) el peso del aire del cuarto en libras?

23. Suponga que toma 7.00 minutos llenar un tanque de gasolina de 30.0 galones. (a) Calcule la rapidez con la cual el tanque se llena en galones por segundo. (b) Calcule la rapidez con la que el tanque se llena en metros cúbicos por segundo. (c) Determine el intervalo de tiempo, en horas, necesario para llenar un volumen de 1 m³ a la misma rapidez. (1 galón U.S. = 231 pulg³).

24. Encuentre la altura o longitud de estas maravillas naturales en kilómetros, metros y centímetros. (a) El sistema de cavernas más largo del mundo es el sistema Mammoth Cave, en la región central de Kentucky. Tiene una longitud medida de 348 millas. (b) En los Estados Unidos, la catarata con la caída individual más grande es la Ribbon Falls, que cae 1 612 pies. (c) El Mount McKinley en el Denali National Park, Alaska, es la montaña más alta de Estados Unidos a una altura de 20 320 pies. (d) El cañón más profundo de Estados Unidos es el King's Canyon en California con una profundidad de 8 200 pies.

25. Una pieza maciza de plomo tiene una masa de 23.94 g y un volumen de 2.10 cm³. De estos datos, calcule la densidad del plomo en unidades del SI (kg/m³).

26. Una *sección* de tierra tiene un área de 1 milla cuadrada y contiene 640 acres. Determine el número de metros cuadrados en 1 acre.

27. Una máquina cargadora de mineral mueve 1 200 tons/h de una mina a la superficie. Convierta esta capacidad a lb/s, usando 1 ton = 2 000 lb.

28. (a) Encuentre un factor de conversión para convertir de millas por hora a kilómetros por hora. (b) En el pasado, una ley federal ordenaba que los límites de rapidez en carreteras deberían ser 55 mi/h. Use el factor de conversión de la parte (a) para hallar esta velocidad en kilómetros por hora. (c) La máxima rapidez en carreteras es ahora de 65 mi/h en algunos lugares. En kilómetros por hora, ¿cuánto aumento es esto sobre el límite de 55 mi/h?

29. En el tiempo en que se imprimió este libro, la deuda nacional de Estados Unidos era de 6 billones de dólares. (a) Si se hicieran pagos a razón de $1 000 por segundo, ¿cuántos años tardaría en pagarse la deuda, suponiendo que no se cargaran intereses? (b) Un billete de dólar mide unos 15.5 centímetros de largo. Si 6 billones de billetes de dólar se pusieran extremo con extremo alrededor del ecuador de la Tierra, ¿cuántas veces le darían la vuelta al planeta? Tome el radio de la Tierra en el ecuador como 6 378 km. (*Nota:* Antes de hacer cualquiera de estos cálculos, trate de adivinar las respuestas. Tal vez el resultado le sorprenda).

30. La masa del Sol es 1.99×10^{30} kg, y la masa de un átomo de hidrógeno, del cual está compuesto principalmente el Sol, es 1.67×10^{-27} kg. ¿¿Cuántos átomos hay en el Sol?

31. Un galón de pintura (volumen = 3.78×10^{-3} m³) cubre un área de 25.0 m². ¿Cuál es el grosor de la pintura sobre la pared?

32. Una pirámide tiene una altura de 481 pies y su base cubre un área de 13.0 acres (figura P1.32). Si el volumen de una pirámide está dado por la expresión $V = \frac{1}{3}Bh$, donde B es el área de la base y h es la altura, encuentre el volumen de esta pirámide en metros cúbicos. (1 acre = 43 560 pies²).

Figura P1.32 Problemas 32 y 33.

33. La pirámide descrita en el problema 32, contiene aproximadamente 2 millones de bloques de piedra que promedian 2.50 toneladas cada uno. Hállese el peso de esta pirámide en libras.

34. Si se supone que 70% de la superficie terrestre está cubierta con agua a una profundidad promedio de 2.3 millas, estime la masa del agua de la Tierra en kilogramos.

35. Un átomo de hidrógeno tiene un diámetro de aproximadamente 1.06×10^{-10} m, como lo define el diámetro de la nube electrónica esférica alrededor del núcleo. El núcleo del hidrógeno tiene un diámetro de alrededor de 2.40×10^{-15} m. (a) Para un modelo a escala, represente el diámetro del átomo de hidrógeno por la longitud de un campo de fútbol americano (100 yardas =

Materiał chroniony prawem autorskim

300 pies), y determine el diámetro del núcleo en milímetros. (b) El átomo es ¿cuántas veces más grande en volumen que su núcleo?

36. Las estrellas más cercanas al Sol son el sistema de estrellas múltiples Alfa Centauri, a 4.0×10^{13} km de distancia. Si el Sol, con un diámetro de 1.4×10^{9} m, y Alfa Centauri A se representan ambos con el hueso de una cereza, 7.0 mm de diámetro, ¿a qué distancia se pondrían los huesos para representar al Sol y su vecina a esta escala?

37. El diámetro de nuestra galaxia de forma de disco, la Vía Láctea, es alrededor de 1.0×10^{5} años luz. La distancia a Messier 31, que es Andrómeda, la galaxia espiral más cercana a la Vía Láctea, de unos 2.0 millones de años luz. Si un modelo a escala representa las galaxias Vía Láctea y Andrómeda como platos para comer de 25 centímetros de diámetro, determine la distancia entre los dos platos.

38. El radio medio de la Tierra es 6.37×10^{6} m, y el de la Luna es 1.74×10^{8} cm. Con estos datos calcule (a) la razón entre el área superficial de la Tierra y la de la Luna y (b) la razón entre el volumen de la Tierra y el de la Luna. Recuerde que el área superficial de una esfera es $4\pi r^2$ y el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}(\pi r^3)$.

39. Un metro cúbico ($1.00\ m^3$) de aluminio tiene una masa de 2.70×10^{3} kg, y $1.00\ m^3$ de hierro tiene una masa de 7.86×10^{3} kg. Encuentre el radio de una esfera de aluminio sólido que equilibre una esfera de hierro sólido de radio 2.00 cm sobre una balanza de brazos iguales.

40. Represente por ρ_{Al} la densidad del aluminio y ρ_{Fe} la del hierro. Encuentre el radio de una esfera de aluminio sólido que balance una esfera de hierro sólido de radio r_{Fe} sobre una balanza de brazos iguales.

Sección 1.6 Estimaciones y cálculos de orden de magnitud

41. Estime el número de pelotas de ping-pong que cabrían en un cuarto de tamaño común y corriente (sin que se aplasten). En su solución, exprese las cantidades que mida o estime y los valores que tome de ellas.

42. La llanta de un automóvil está estimada para durar unas 50 000 millas. A un orden de magnitud, ¿cuántas revoluciones dará? En su solución, exprese las cantidades que mida o estime y los valores que tome de ellas.

43. Crece pasto densamente en todas partes en un lote de un cuarto de acre de tierra. ¿Cuál es el orden de magnitud del número de hojas de pasto de este lote? Explique su razonamiento. Tome nota que un acre = 43 560 pies^2.

44. ¿Aproximadamente cuántas gotas de lluvia caen en un lote de un acre durante un aguacero de una pulgada? Explique su razonamiento.

45. Calcule el orden de magnitud de la masa de una tina de baño llena de agua a la mitad. Calcule el orden de magnitud de la masa de una tina de baño llena de monedas de centavo hasta la mitad. En su solución haga una lista de las cantidades que toma como datos y el valor que mida o estime de ellos.

46. Las bebidas gaseosas se venden por lo general en recipientes de aluminio. A un orden de magnitud, ¿cuántos de estos recipientes se tiran a la basura o se reciclan cada año por clientes norteamericanos? ¿Cuántas toneladas de aluminio representa esto? En su solución exprese las cantidades que mida o estime y los valores que tome de ellos.

47. A un orden de magnitud, ¿cuántos afinadores de piano hay en la ciudad de Nueva York? El físico Enrique Fermi era famoso por hacer preguntas como ésta en exámenes orales para obtener grado de doctorado. Su propia facilidad para hacer cálculos de orden de magnitud se ejemplifica en el problema 45.

Sección 1.7 Cifras significativas

Nota: El apéndice B.8 sobre propagación de incertidumbre puede ser útil para resolver problemas en esta sección.

48. Una placa rectangular tiene una longitud de (21.3 ± 0.2) cm y un ancho de (9.8 ± 0.1) cm. Calcule el área de la placa, incluyendo su incertidumbre.

49. El radio de un círculo se mide que es (10.5 ± 0.2) m. Calcule el (a) área y (b) circunferencia del círculo y dé la incertidumbre en cada valor.

50. ¿Cuántas cifras significativas hay en los siguientes números? (a) 78.9 ± 0.2 (b) 3.788×10^{9} (c) 2.46×10^{-6} (d) 0.005 3.

51. El radio de una esfera sólida se mide como (6.50 ± 0.20) cm, y su masa se mide como (1.85 ± 0.02) kg. Determine la densidad de la esfera en kilogramos por metro cúbico y la incertidumbre en la densidad.

52. Realice las siguientes operaciones aritméticas: (a) la suma de los valores medidos 756, 37.2, 0.83 y 2.5; (b) el producto $0.003\ 2 \times 356.3$; (c) el producto $5.620 \times \pi$.

53. El *año tropical*, el tiempo entre equinoccio primaveral al siguiente equinoccio primaveral, es la base de nuestro calendario. Contiene 365.242 199 días. Encuentre el número de segundos en un año tropical.

54. Un agricultor mide la distancia alrededor de un campo rectangular. La longitud de los lados largos del rectángulo se encuentra que es 38.44 m, y la longitud de los lados cortos resulta ser de 19.5 m. ¿Cuál es la distancia total alrededor del campo?

55. Se va a construir una banqueta alrededor de una piscina que mide (10.0 ± 0.1) m por (17.0 ± 0.1) m. Si la banqueta debe medir (1.00 ± 0.01) m de ancho por (9.0 ± 0.1) cm de grueso, ¿qué volumen de concreto se necesita, y cuál es la incertidumbre aproximada de este volumen?

Problemas adicionales

56. En una situación donde se conocen datos a tres cifras significativas, escribimos 6.379 m = 6.38 m y 6.374 m = 6.37 m. Cuando un número termina en 5, arbitrariamente escogemos escribir 6.375 m = 6.38 m. Podríamos igualmente escribir 6.375 m = 6.37 m, "redondeando hacia abajo" en lugar de "redondeando hacia arriba," porque cambiaríamos el número 6.375 por incrementos iguales en ambos casos. Ahora considere un estimado de orden de magnitud, en el que consideramos factores en lugar de incrementos. Escribimos 500 m $\sim 10^3$ m porque 500 difiere de 100 en un factor de 5 mientras que difiere de 1 000 en sólo un factor de 2. Escribimos 437 m $\sim 10^3$ m y 305 m $\sim 10^2$ m. ¿Qué distancia di-

Materiał chroniony prawem autorskim

fiere de 100 m y de 1 000 m en factores iguales, de modo que podríamos igualmente escoger representar su orden de magnitud ya sea como $\sim 10^2$ o como $\sim 10^3$ m?

57. Para muchas aplicaciones electrónicas, por ejemplo en chips de computadoras, es deseable hacer componente tan pequeños como sea posible para mantener baja la temperatura de los componentes y aumentar la velocidad del dispositivo. Es posible usar delgadas capas metálicas (películas) en lugar de alambres para hacer conexiones eléctricas. El oro es especialmente útil, porque no se oxida fácilmente. Su masa atómica es 197 u. Una película de oro no puede ser más delgada que el tamaño de un átomo de oro. Calcule el grosor mínimo de una capa, suponiendo que un átomo de oro ocupa un volumen cúbico en la película que es igual al volumen que ocupa en una pieza grande de metal. Este modelo geométrico da un resultado del orden de magnitud correcto.

58. La función básica del carburador de un automóvil es "atomizar" la gasolina y mezclarla con aire para promover una combustión rápida. Como ejemplo, suponga que 30.0 cm^3 de gasolina se atomizan en N gotitas esféricas, cada una con un radio de 2.00×10^{-5} m. ¿Cuál es el área superficial total de estas N gotitas esféricas?

59. El consumo de gas natural por una compañía satisface la ecuación empírica $V = 1.50t + 0.008\,00t^2$, donde V es el volumen en millones de pies cúbicos y t el tiempo en meses. Exprese esta ecuación en unidades de pies cúbicos y segundos. Asigne unidades apropiadas a los coeficientes. Suponga que un mes es igual a 30.0 días.

60. En física es importante usar aproximaciones matemáticas. Demuestre que para ángulos pequeños (<20°)

$$\tan \alpha \approx \operatorname{sen} \alpha \approx \alpha = \pi\alpha'/180°$$

donde α es en radianes y α' es en grados. Use una calculadora para hallar el ángulo más grande para el cual $\tan \alpha$ se puede aproximar con $\operatorname{sen} \alpha$ si el error ha de ser menor a 10.0%.

61. Una fuente elevada de agua está situada en el centro de una piscina circular, como se ve en la figura P1.61. No deseando mojarse los pies, un estudiante camina alrededor de la piscina y calcula que su circunferencia es de 15.0 m. A continuación, el estudiante se para en el borde de la piscina y usa un transportador para medir el ángulo de elevación de la parte alta de la fuente, encuentra que es de 55.0°. ¿Cuál es la altura de la fuente?

Figura P1.61.

62. Las monedas de colección a veces se recubren con oro para aumentar su belleza y valor. Considere que una moneda conmemorativa de cuarto de dólar está a la venta en \$4.98. Tiene un diámetro de 24.1 mm, un grosor de 1.78 mm, y está cubierta completamente con una capa de oro puro de 0.180 μm de grueso. El volumen del enchapado es igual al grueso de la capa multiplicado por el área al cual se aplica. Las figuras de las caras de la moneda y las ranuras de su borde tienen un efecto despreciable en su área. Suponga que el precio del oro es 10.0 dólares por gramo. Encuentre el costo del oro agregado a la moneda. El costo del oro ¿aumenta de modo considerable el valor de la moneda?

63. Hay alrededor de $\pi \times 10^7$ s en un año. Encuentre el porcentaje de error en esta aproximación, donde "porcentaje de error" se define como

$$\text{Porcentaje de error} = \frac{|\text{valor supuesto} - \text{valor verdadero}|}{\text{valor verdadero}} \times 100\%$$

64. Suponga que un objeto cubre un área A y tiene una altura uniforme h. Si su área de sección transversal es uniforme en su altura, entonces su volumen está dado por $V = Ah$. (a) Demuestre que $V = Ah$ es dimensionalmente correcta. (b) Demuestre que los volúmenes de un cilindro y una caja rectangular, se pueden escribir en la forma $V = Ah$, identificando A en cada caso. (Tome nota que A, a veces llamada "huella" del objeto, puede tener cualquier forma, y la altura se puede sustituir por el grosor promedio en general).

65. A un niño le encanta observar cómo se llena una botella de plástico transparente con champú. Cada sección transversal horizontal de la botella es un círculo, pero todos los diámetros de los círculos adquieren diferentes valores, de modo que la botella es mucho más ancha en algunos lugares que en otros. Una persona vierte champú verde intenso con un flujo volumétrico constante de 16.5 cm^3/s. ¿Con qué rapidez se eleva el nivel de la botella (a) en un punto donde el diámetro de la botella es 6.30 cm y (b) en un punto donde el diámetro de la botella es 1.35 cm?

66. Un centímetro cúbico de agua tiene una masa de 1.00×10^{-3} kg. (a) Determine la masa de 1.00 m^3 de agua. (b) Las sustancias biológicas son 98% agua. Suponga que tienen la misma densidad que el agua para estimar las masas de una célula que tiene un diámetro de 1.0 μm, un riñón humano y una mosca. Haga un modelo del riñón como esfera con un radio de 4.0 cm y la mosca como un cilindro de 4.0 mm de largo y 2.00 mm de diámetro.

67. Suponga que hay 100 millones de autos de pasajeros en Estados Unidos, y que el promedio de consumo de combustible es 20 millas por galón de gasolina. Si la distancia promedio recorrida por cada auto es 10 000 millas por año, ¿cuánta gasolina se ahorraría por año si el promedio de consumo de combustible pudiera aumentarse a 25 mi/gal?

68. Una criatura se mueve a una velocidad de 5.00 furlongs cada dos semanas (no es una unidad común de velocidad). Dado que 1 furlong = 220 yardas y dos semanas = 14 días, determine la velocidad de la criatura en m/s. ¿De qué clase de criatura piensa usted que hablamos?

Materiał chroniony prawem autorskim

69. La distancia del Sol a la estrella más cercana es de unos 4×10^{16} m. La galaxia de la Vía Láctea tiene forma aproximada de un disco con diámetro $\sim 10^{21}$ m y grosor $\sim 10^{19}$ m. Encuentre el orden de magnitud del número de estrellas de la Vía Láctea. Suponga que es típica la distancia entre el Sol y nuestro vecino más cercano.

70. Los datos de la siguiente tabla representan mediciones de las masas y dimensiones de cilindros sólidos de aluminio, cobre, latón, estaño y hierro. Utilice estos datos para calcular las densidades de estas sustancias. Compare sus resultados del aluminio, cobre y hierro con los que se dan en la tabla 1.5.

Sustancia	Masa (g)	Diámetro (cm)	Longitud (cm)
Aluminio	51.5	2.52	3.75
Cobre	56.3	1.23	5.06
Latón	94.4	1.54	5.69
Estaño	69.1	1.75	3.74
Hierro	216.1	1.89	9.77

71. (a) ¿Cuántos segundos hay en un año? (b) Si un micrometeorito (una esfera con un diámetro de 1.00×10^{-6} m) choca en un segundo con cada metro cuadrado de la Luna, ¿cuántos años tardaría en cubrir la Luna a una profundidad de 1.00 m? Para resolver este problema, puede considerar que en la Luna hay una caja cúbica de 1.00 m en cada arista, y hallar cuánto tarda llenar la caja.

Respuestas a las *preguntas rápidas*

1.1 (a). Debido a que la densidad el aluminio es menor que la del hierro, se necesita un volumen más grande de aluminio que de hierro para una masa dada.

1.2 Falso. El análisis dimensional da las unidades de proporcionalidad constante, pero no da información acerca de su valor numérico. Para determinar su valor numérico se necesita de datos experimentales o de razonamiento geométrico. Por ejemplo, en la generación de la ecuación $x = \frac{1}{2}at^2$. Como el factor $\frac{1}{2}$ es sin dimensiones, no hay forma de determinarlo con el uso de análisis dimensional.

1.3 (b). Debido a que los kilómetros son más cortos que las millas, es necesario un número mayor de kilómetros que de millas para una distancia dada.

1.4 Reportar todos estos dígitos implica que ya se ha determinado la ubicación del centro del asiento de la silla al más cercano ±0.000 000 000 1 m. Esto corresponde aproximadamente a tener aptitud para contar los átomos de una cinta métrica, porque cada uno de ellos tiene más o menos ese tamaño. Sería mejor registrar la medida de 1.044 m: esto indica que ya conoce la posición del milímetro más cercana, suponiendo que la cinta métrica tenga marcas de milímetros en su escala.

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 2

Movimiento en una dimensión

▲ *Una de las cantidades físicas que estudiaremos en este capítulo es la velocidad de un objeto que se mueva en línea recta. Los esquiadores que bajan por una pendiente pueden alcanzar velocidades de una magnitud mayor a 100 km/h (Jean Y. Ruszniewski/Getty Images).*

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

2.1 Posición, velocidad y rapidez

2.2 Velocidad y rapidez instantáneas

2.3 Aceleración

2.4 Diagramas de movimiento

2.5 Movimiento en una dimensión con aceleración constante

2.6 Objetos en caída libre

2.7 Ecuaciones de cinemática deducidas del cálculo

Estrategia general para la solución de problemas

Materiał chroniony prawem autorskim

Como primer paso en el estudio de mecánica clásica, describimos el movimiento en términos de espacio y tiempo, sin tomar en cuenta los agentes que lo produjeron. Esta parte de la mecánica clásica se llama *cinemática*. (La palabra *cinemática* tiene la misma raíz que *cinema*. ¿Puede ver por qué?) En este capítulo consideramos sólo movimiento en una dimensión, es decir, movimiento a lo largo de una recta. Primero definimos posición, desplazamiento, velocidad y aceleración. Luego, con el uso de estos conceptos, estudiamos el movimiento de objetos que viajan en una dimensión con una aceleración constante.

De nuestra experiencia diaria reconocemos que el movimiento representa un cambio continuo en la posición de un objeto. En física podemos clasificar el movimiento en tres tipos: de traslación, rotacional y vibratorio. Un auto que avance por una carretera, es un ejemplo de movimiento de traslación, el giro de la Tierra sobre su eje es un ejemplo de movimiento rotacional y el movimiento en vaivén de un péndulo es un ejemplo de movimiento vibratorio. En éste y los siguientes capítulos, nos ocupamos sólo del movimiento de traslación. (Más adelante en este libro hablaremos de los movimientos rotacional y vibratorio).

En nuestro estudio del movimiento de traslación, usamos lo que se llama **modelo de partícula y describimos el objeto en movimiento como una *partícula* cualquiera que sea su tamaño.** En general, una partícula es un objeto semejante a un punto, es decir, un objeto con masa, pero que tiene tamaño infinitesimal. Por ejemplo, si deseamos describir el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, podemos tratar la Tierra como una partícula y obtener datos razonablemente precisos acerca de su órbita. Esta aproximación se justifica porque el radio de la órbita de la Tierra es grande en comparación con las dimensiones de la Tierra y el Sol. Como ejemplo en una escala mucho más pequeña, es posible explicar la presión ejercida por un gas sobre las paredes de un recipiente si tratamos las moléculas de gas como partículas, cualquiera que sea la estructura interna de las moléculas.

2.1 Posición, velocidad y rapidez

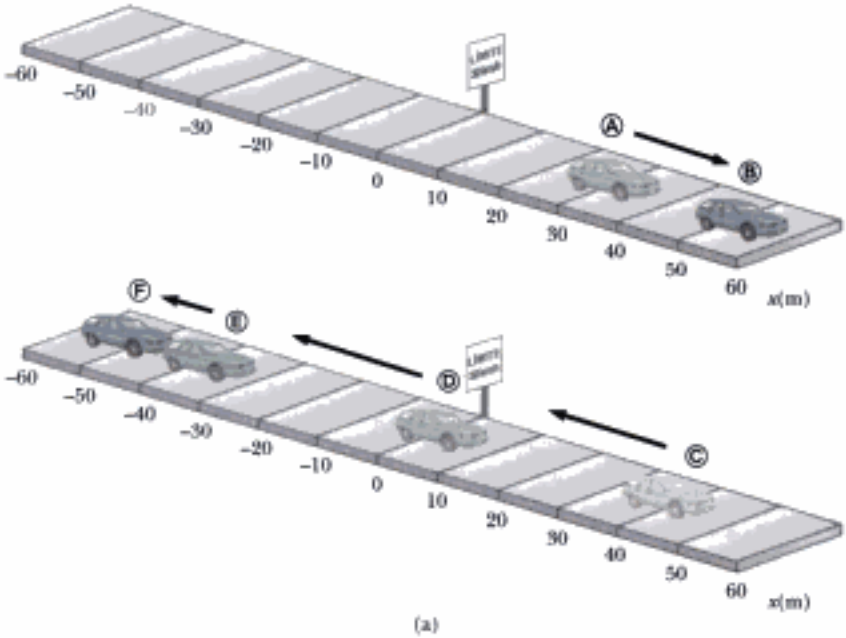
Posición

El movimiento de una partícula se conoce por completo si la **posición** de la partícula en el espacio se conoce en todo momento. La posición de una partícula es el lugar de la partícula con respecto a un punto de referencia escogido que podemos considerar como el origen de un sistema de coordenadas.

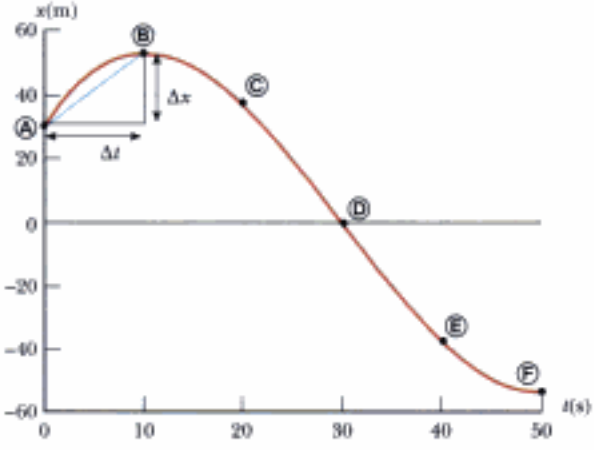
Considere un auto que se mueve hacia atrás y hacia delante a lo largo del eje x, como se ve en la figura 2.1a. Cuando comenzamos a recopilar datos de posición, el auto está 30 m a la derecha del señalamiento del camino que usaremos para identificar la posición de referencia $x = 0$. (Supongamos que todos los datos de este ejemplo se conocen hasta dos cifras significativas. Para transmitir esta información, es necesario reportar la posición inicial como 3.0×10^1 m. Hemos escrito este valor en la forma más simple de 30 m para hacer que el análisis sea más fácil de seguir). Usaremos el modelo de partícula al identificar algún punto en el auto, quizá la manija de la puerta delantera como partícula que represente a todo el auto.

Ponemos en funcionamiento nuestro reloj y una vez cada 10 s anotamos la posición del auto con respecto al señalamiento en $x = 0$. Como se ve de la tabla 2.1, el auto se mueve a la derecha (que hemos definido como la dirección positiva) durante los primeros 10 s del

Materiał chroniony prawem autorskim



(a)



(b)

Tabla 2.1

Posición del auto en varios tiempos

Posición	t(s)	x(m)
Ⓐ	0	30
Ⓑ	10	52
Ⓒ	20	38
Ⓓ	30	0
Ⓔ	40	−37
Ⓕ	50	−53

Figura activa 2.1 (a) Un auto se mueve hacia atrás y hacia delante a lo largo de una recta que se considera como el eje x. Como estamos interesados sólo en el movimiento de traslación del auto, podemos modelarlo como una partícula. (b) Gráfica de posición-tiempo para el movimiento de la "partícula."

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com el lector puede mover cada uno de los seis puntos del Ⓐ al Ⓕ y observar el movimiento del auto con ilustración y gráficamente a medida que sigue una trayectoria suave por los seis puntos.

movimiento, de la posición Ⓐ a la posición Ⓑ. Después de Ⓑ, los valores de posición comienzan a decrecer, lo que sugiere que el auto está regresando desde la posición Ⓑ hasta la posición Ⓕ. De hecho, en Ⓓ, 30 s después que comenzamos a medir, el auto está junto al señalamiento del camino (vea la figura 2.1a) que empleamos para marcar nuestro origen de coordenadas. Continúa moviéndose a la izquierda y a está a más de 50 m a la izquierda del señalamiento cuando dejamos de registrar información después de nuestro sexto punto de datos. En la figura 2.1b se muestra una representación gráfica de esta información. Esta gráfica se denomina *gráfica de posición-tiempo*.

Dados los datos de la tabla 2.1, podemos fácilmente determinar el cambio en la posición del auto para varios intervalos en tiempo. El **desplazamiento** de una partícula se define como su cambio en posición en algún intervalo de tiempo. Cuando se mueve de una posición inicial x_i a una posición final x_f, el desplazamiento de la partícula está dado por $x_f - x_i$. Usamos la letra griega delta (Δ) para denotar el *cambio* en una cantidad. Por lo tanto, escribimos el desplazamiento, o cambio en posición, de la partícula como

Desplazamiento

$$\Delta x \equiv x_f - x_i \tag{2.1}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

De esta definición vemos que Δx es positivo si x_f es mayor que x_i y negativo si x_f es menor a x_i.

Es muy importante reconocer la diferencia entre desplazamiento y distancia recorrida. **Distancia** es la longitud de una trayectoria seguida por una partícula. Considere, por ejemplo, los jugadores de baloncesto de la figura 2.2. Si un jugador corre desde su propia canasta hasta la canasta del otro equipo y luego regresa a su propia canasta, el *desplazamiento* del jugador durante este intervalo es cero, porque terminó en el mismo punto donde arrancó. Durante este intervalo, sin embargo, cubrió una *distancia* del doble de la longitud de la cancha de baloncesto.

El desplazamiento es un ejemplo de cantidad vectorial. Muchas otras cantidades físicas, incluyendo posición, velocidad y aceleración, también son vectores. En general, **una cantidad vectorial requiere la especificación de dirección, sentido y magnitud.** En contraste, **una cantidad escalar tiene un valor numérico pero no dirección.** En este capítulo empleamos los signos positivo (+) y negativo (−) para indicar la dirección del vector. Es posible hacer esto porque el capítulo trata sólo de movimiento en una dimensión; esto significa que cualquier objeto que estudiemos se puede mover sólo a lo largo de una línea recta. Por ejemplo, para movimiento horizontal se especifica de manera arbitraria la derecha como dirección positiva. Se deduce que cualquier objeto que se mueva a la derecha experimenta un desplazamiento positivo $\Delta x > 0$, y cualquier objeto que se mueva a la izquierda experimenta un desplazamiento negativo, de modo que $\Delta x < 0$. En el capítulo 3 trataremos con más detalle cantidades vectoriales.

Para nuestro jugador de baloncesto de la figura 2.2, si el recorrido desde su propia canasta a la canasta contraria está descrito por un desplazamiento de +28 m, el recorrido en la dirección inversa representa un desplazamiento de −28 m. Cada recorrido representa una distancia de 28 m, porque la distancia es una cantidad escalar. La distancia total para el recorrido en la cancha y regreso es de 56 m. La distancia, por lo tanto, está siempre representada como un número positivo, mientras que el desplazamiento puede ser positivo o negativo.

Hay un punto importante que hasta ahora no hemos mencionado. Nótese que la información de la tabla 2.1 resulta sólo en los seis puntos de datos de la gráfica de la figura 2.1b. La curva suave que pasa por los seis puntos de la gráfica es sólo una *posibilidad* del movimiento real del auto. Sólo tenemos información acerca de seis instantes de tiempo, pero no tenemos idea de lo que ocurrió entre los puntos de datos. La curva suave es un *cálculo* de lo que ocurrió, pero recordemos que es *sólo* un cálculo.

Si la curva suave representa el movimiento real del auto, la gráfica contiene información acerca de todo el intervalo de 50 s durante el cual observamos el movimiento del auto. Es mucho más fácil ver cambios en posición a partir de la gráfica que de una descripción verbal, o incluso una tabla de números. Por ejemplo, es evidente que el auto estaba haciendo un recorrido más grande durante la parte media del intervalo de 50 s que al final. Entre las posiciones Ⓒ y Ⓓ, el auto recorrió casi 40 m, pero durante los últimos 10 s, entre las posiciones Ⓔ y Ⓕ, se movió menos de la mitad de esa distancia. Una forma común de comparar estos diferentes movimientos es dividir el desplazamiento Δx que se presenta entre dos lecturas de reloj entre el intervalo particular Δt. Ésta resulta ser una razón muy útil que aquí usaremos muchas veces. Esta razón recibe un nombre especial: *velocidad promedio*. **La velo-**

Ken White/Allsport/Getty Images

Figura 2.2 En esta cancha de baloncesto, los jugadores corren hacia la canasta contraria y regresan, La distancia que los jugadores corren durante el juego es diferente de cero. El desplazamiento de los jugadores durante el juego es aproximadamente cero porque regresan al mismo punto una y otra vez.

Materiał chroniony prawem autorskim

cidad promedio $\bar{v}_x$ de una partícula se define como el desplazamiento de la partícula, Δx, dividido entre el intervalo, Δt, durante el cual ocurre ese desplazamiento:

$$\bar{v}_x \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.2}$$

Velocidad promedio

donde el subíndice x indica movimiento a lo largo del eje x. De esta definición vemos que la velocidad promedio tiene dimensiones de longitud divididas entre tiempo (L/T) metros por segundo en unidades del SI.

La velocidad promedio de una partícula que se mueve en una dimensión puede ser positiva o negativa, dependiendo del signo del desplazamiento. (El intervalo Δt es siempre positivo.) Si la coordenada de la partícula aumenta en tiempo (es decir, si $x_f > x_i$), entonces Δx es positivo y $\bar{v}_x = \Delta x/\Delta t$ es positiva. Este caso corresponde a una partícula que se mueve en la dirección x positiva, es decir, hacia valores más grandes de x. Si la coordenada disminuye en tiempo (esto es, si $x_f < x_i$) entonces Δx es negativo y por lo tanto $\bar{v}_x$ es negativa. Este caso corresponde a una partícula que se mueve en la dirección x negativa.

Podemos interpretar geométricamente la velocidad promedio si trazamos una recta entre cualesquier dos puntos en la gráfica de posición-tiempo de la figura 2.1b. Esta línea forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo de altura Δx y base Δt. La pendiente de esta recta es la razón $\Delta x/\Delta t$, que es lo que hemos definido como velocidad promedio en la ecuación 2.2. Por ejemplo, la línea entre las posiciones Ⓐ y Ⓑ de la figura 2.1b tiene una pendiente igual a la velocidad promedio del auto entre estos dos tiempos (52 m − 30 m)/(10 s − 0) = 2.2 m/s.

En la vida cotidiana, los términos *rapidez* y *velocidad* son intercambiables. En física, sin embargo, existe una clara distinción entre estas dos cantidades. Considere un corredor de maratón que corre más de 40 km pero que finaliza en el punto de partida. Su desplazamiento total es cero, de modo que su velocidad promedio es cero. No obstante, necesitamos estar en aptitud de cuantificar qué tan rápido estaba corriendo. Una relación ligeramente diferente resuelve este problema. La **rapidez promedio** de una partícula, una cantidad escalar, se define como la **distancia total recorrida dividida entre el intervalo total necesario para recorrer esa distancia:**

$$\text{Rapidez promedio} \equiv \frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}} \tag{2.3}$$

Rapidez promedio

La unidad del SI de la rapidez promedio es igual que la unidad de velocidad promedio: metros por segundo. Sin embargo, a diferencia de la velocidad promedio, la rapidez promedio no tiene dirección y por lo tanto no lleva signo algebraico. Nótese la distinción entre velocidad promedio y rapidez promedio; velocidad promedio (ecuación 2.2) es el *desplazamiento* dividido entre el intervalo, mientras que rapidez promedio (ecuación 2.3) es la *distancia* dividida entre el intervalo.

Conocer la velocidad promedio o rapidez promedio de una partícula no da ninguna información acerca de los detalles del recorrido. Por ejemplo, suponga que se necesitan 45.0 s para recorrer 100 m por un largo pasillo recto hacia su puerta de salida en un aeropuerto. En la marca de 100 m se da cuenta que no pasó al sanitario, regresa 25.0 m a lo largo del mismo pasillo y toma 10.0 s para hacer el recorrido de regreso. La magnitud de la *velocidad* promedio de su recorrido es +75.0 m/55.0 s = +1.36 m/s. La *rapidez* promedio de su recorrido es 125 m/55.0 s = 2.27 m/s. Pudo usted haber viajado con diferentes rapideces el recorrido. Ni la velocidad promedio ni la rapidez promedio proporcionan información acerca de estos detalles.

Pregunta rápida 2.1 ¿Bajo cuáles de las siguientes condiciones está la magnitud de la velocidad promedio de una partícula moviéndose en una dimensión más pequeña que la rapidez promedio en el mismo intervalo? (a) Una partícula se mueve en la dirección $+x$ sin regresar. (b) Una partícula se mueve en la dirección $-x$ sin regresar. (c) Una partícula se mueve en la dirección $+x$ y luego invierte la dirección de su movimiento. (d) No hay condiciones para las que esto sea verdadero.

¡ADVERTENCIA!

2.1 Rapidez promedio y velocidad promedio

La magnitud de la velocidad promedio *no es* la rapidez promedio. Por ejemplo, considere el corredor de maratón que vimos aquí. La magnitud de la velocidad promedio es cero, pero la rapidez promedio es claramente diferente de cero.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 2.1 Cálculo de velocidad promedio y rapidez promedio

Encuentre el desplazamiento, velocidad promedio y rapidez promedio del auto de la figura 2.1a entre las posiciones Ⓐ y Ⓕ.

Solución De la gráfica de posición-tiempo dada en la figura 2.1b, nótese que $x_A = 30$ m en $t_A = 0$ y que $x_F = -53$ m en $t_F = 50$ s. Con el uso de estos valores junto con la definición de desplazamiento, ecuación 2.1, encontramos que

$$\Delta x = x_F - x_A = -53 \text{ m} - 30 \text{ m} = \mathbf{-83 \text{ m}}$$

Este resultado significa que el auto finaliza 83 m en la dirección negativa (a la izquierda, en este caso) de donde arrancó. Este número tiene las unidades correctas y es del mismo orden de magnitud que los datos proporcionados. Una rápida mirada en la figura 2.1a indica que ésta es la respuesta correcta.

Es difícil estimar la velocidad promedio sin completar el cálculo, pero esperamos que las unidades sean metros por segundo. Como el auto finaliza a la izquierda de donde empezamos a tomar datos, sabemos que la velocidad promedio debe ser negativa. De la ecuación 2.2,

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{x_F - x_A}{t_F - t_A}$$

$$= \frac{-53 \text{ m} - 30 \text{ m}}{50 \text{ s} - 0 \text{ s}} = \frac{-83 \text{ m}}{50 \text{ s}}$$

$$= \mathbf{-1.7 \text{ m/s}}$$

De los datos de la tabla 2.1 no podemos hallar la rapidez promedio del auto en forma no ambigua, porque no tenemos información acerca de las posiciones del auto entre los puntos de datos. Si adoptamos la suposición de que los detalles de la posición del auto están descritos por la curva de la figura 2.1b, entonces la distancia recorrida es 22 m (de Ⓐ a Ⓑ) más 105 m (de Ⓑ a Ⓕ) para un total de 127 m. Encontramos la rapidez promedio del carro. Para este recorrido al dividir la distancia entre el tiempo total (ecuación 2.3):

$$\text{Rapidez promedio} = \frac{127 \text{ m}}{50 \text{ s}} = \mathbf{2.5 \text{ m/s}}$$

2.2 Velocidad y rapidez instantáneas

A veces es necesario conocer la velocidad de una partícula en un instante particular de tiempo, más que la velocidad promedio en un intervalo finito de tiempo. Por ejemplo, aun cuando el lector quiera calcular su velocidad promedio durante un viaje largo en automóvil, es posible que esté especialmente interesado en conocer su velocidad en el *instante* que observó la patrulla de policía estacionada al lado de la carretera al frente. En otras palabras, le gustaría poder especificar su velocidad en forma tan precisa como se pueda precisar la posición al observar lo que está ocurriendo en una lectura especial del reloj, esto es, en algún instante específico. Puede no ser inmediatamente obvio cómo hacer esto. ¿Qué significa hablar de lo rápido que se mueve algo si se "congela el tiempo" y hablamos sólo acerca de un instante individual? Éste es un punto sutil que no se entendió bien sino hasta fines del siglo XVII. En aquel tiempo, con la invención del cálculo, los científicos comenzaron a entender cómo describir el movimiento de un objeto en cualquier momento en el tiempo.

Para ver cómo se hace esto, considere la figura 2.3a, que es una reproducción de la gráfica de la figura 2.1b. Ya hemos analizado la velocidad promedio para el intervalo durante el cual el auto se movió de la posición Ⓐ a la posición Ⓑ (dada por la pendiente de la línea azul oscura) y para el intervalo durante el cual se movió de Ⓐ a Ⓕ (representado por la pendiente de la línea azul claro y calculada en el ejemplo 2.1). ¿Cuál de estas dos líneas piensa el lector que es una aproximación más cercana a la velocidad inicial del auto? El auto arranca al avanzar a la derecha, que definimos es la dirección positiva. Por lo tanto, siendo positivo, el valor de la velocidad promedio durante el intervalo de Ⓐ a Ⓑ, es más representativo del valor inicial de lo que es el valor de la velocidad promedio durante el intervalo de Ⓐ a Ⓕ, que determinamos como negativa en el ejemplo 2.1. Ahora concentremos nuestra atención en la línea azul oscuro y deslicemos el punto Ⓑ a la izquierda a lo largo de la curva, hacia el punto Ⓐ, como en la figura 2.3b. La línea entre los puntos se hace cada vez más inclinada, y cuando los dos puntos están muy cercanos, la línea se convierte en tangente a la curva, indicada por la línea verde de la figura 2.3b. La pendiente de esta tangente representa la velocidad del auto en el momento en que comenzamos a tomar datos, en el punto Ⓐ. Lo que hemos hecho es determinar la *velocidad instantánea* en ese mo-

¡ADVERTENCIA!

2.2 Pendientes de gráficas

En cualquier gráfica de datos físicos, la *pendiente* representa la razón entre el cambio de la cantidad representada en el eje vertical y el cambio de la cantidad representada sobre el eje horizontal. Recuerde que *una pendiente tiene unidades* (a menos que ambos ejes tengan las mismas unidades). Las unidades de la pendiente de la figura 2.1b y la figura 2.3 son m/s, las unidades de velocidad.

Materiał chroniony prawem autorskim

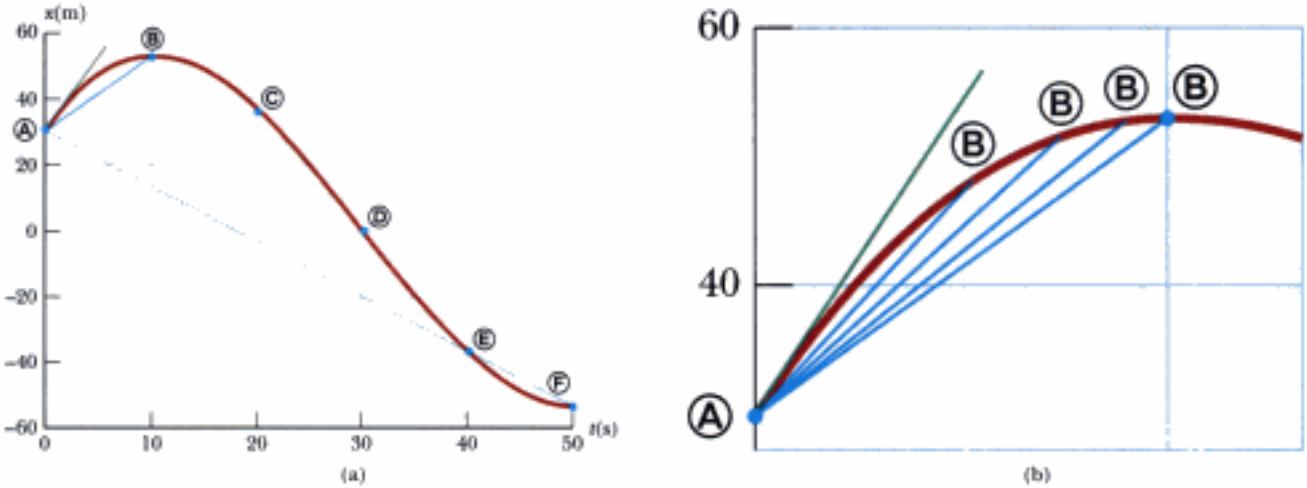


Figura activa 2.3 (a) Gráfica que representa el movimiento del auto de la figura 2.1. (b) Una ampliación de la esquina superior izquierda de la gráfica muestra la forma en que la línea azul, que está entre las posiciones Ⓐ y Ⓑ, se aproxima a la línea verde tangente a medida que el punto Ⓑ se acerca al punto Ⓐ.

En el vínculo de Active Figures en http://www.pse6.com, el lector puede mover el punto Ⓑ como se sugiere en (b) y observar la línea azul que se aproxima a la línea tangente verde.

mento. En otras palabras, **la velocidad instantánea v_x es igual al valor límite de la razón Dx/Dt cuando Dt se aproxima a cero:**[1]

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.4}$$

En notación de cálculo, este límite se llama la *derivada* de x con respecto a t, escrito dx/dt:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{2.5}$$

Velocidad instantánea

La velocidad instantánea puede ser positiva, negativa, o cero. Cuando la pendiente de la gráfica posición-tiempo es positiva, tal como en cualquier tiempo durante los primeros 10 s en la figura 2.3, v_x es positiva, el auto se mueve hacia valores más grandes de x. Después del punto Ⓑ, v_x es negativa porque la pendiente es negativa, el auto se mueve hacia valores más pequeños de x. En el punto Ⓑ, la pendiente y la velocidad instantánea son cero, el auto está momentáneamente en reposo.

De aquí en adelante se empleará la palabra *velocidad* para designar velocidad instantánea. Cuando nos interese la *velocidad promedio*, siempre utilizaremos el adjetivo *promedio*.

La **rapidez instantánea** de una partícula se define como la magnitud de su velocidad instantánea. Como sucede con la rapidez promedio, la rapidez instantánea no tiene dirección asociada y, por lo tanto, no lleva signo algebraico. Por ejemplo, si una partícula tiene una velocidad instantánea de +25 m/s a lo largo de una línea dada y otra partícula tiene una velocidad instantánea de −25 m/s a lo largo de la misma línea, ambas tienen una rapidez[2] de 25 m/s.

¡ADVERTENCIA!

2.3 Rapidez instantánea y velocidad instantánea

En la advertencia 2.1 dijimos que la magnitud de la velocidad promedio no es la rapidez promedio. Nótese la diferencia cuando se analicen valores instantáneos. La magnitud de la velocidad instantánea *es* la rapidez instantánea. En un intervalo infinitesimal de tiempo, la magnitud del desplazamiento es igual a la distancia recorrida por la partícula.

[1] Nótese que el desplazamiento Δx se aproxima a cero cuando Δt se aproxima a cero, de modo que la razón se asemeja a 0/0. Cuando Δx y Δt se hacen más y más pequeños, la razón $\Delta x/\Delta t$ se aproxima a un valor igual a la pendiente de la recta tangente a la curva x contra t.

[2] Al igual que con la velocidad, omitimos el adjetivo de rapidez instantánea: "rapidez" significa rapidez instantánea.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo conceptual 2.2 La velocidad de diferentes objetos

Considere los siguientes movimientos en una dimensión: **(A)** Una pelota lanzada directamente hacia arriba sube al punto más alto y cae de regreso en la mano de quien la lanzó. **(B)** Un auto de carrera arranca desde el reposo y acelera hasta 100 m/s. **(C)** Una nave espacial viaja en el espacio a velocidad constante. ¿Hay algunos puntos en el movimiento de estos objetos en los que la velocidad instantánea tenga el mismo valor que la velocidad promedio en todo el movimiento? Si es así, identifique el punto(s).

Solución (A) La velocidad promedio para la pelota lanzada es cero, porque la pelota regresa al punto de partida; por lo tanto, su desplazamiento es cero. (Recuerde que la velocidad promedio se define como $\Delta x/\Delta t$.) Hay un punto en el que la velocidad instantánea es cero: en lo alto del movimiento.

(B) La velocidad promedio del auto no puede ser evaluada en forma no ambigua con la información dada, pero debe ser algún valor entre 0 y 100 m/s. Debido a que el auto tendrá cada velocidad instantánea entre 0 y 100 m/s en algún tiempo durante el intervalo, debe haber algún instante en el que la velocidad instantánea sea igual a la velocidad promedio.

(C) Como la velocidad instantánea de la nave espacial es constante, su velocidad instantánea en *cualquier* instante y su velocidad promedio en *cualquier* intervalo son las mismas.

Ejemplo 2.3 Velocidad promedio e instantánea

Una partícula se mueve a lo largo del eje x. Su posición varía con el tiempo de acuerdo a la expresión $x = -4t + 2t^2$ donde x está en metros y t en segundos.[3] La gráfica de posición-tiempo para este movimiento se ilustra en la figura 2.4. Nótese que la partícula se mueve en la dirección x negativa para el primer segundo de movimiento, está momentáneamente en reposo en el instante $t = 1$ s, y se mueve en la dirección x positiva en los tiempos $t > 1$ s.

(B) Determine el desplazamiento de la partícula en los intervalos $t = 0$ a $t = 1$ s y $t = 1$ s a $t = 3$ s.

Solución Durante el primer intervalo, la pendiente es negativa y por lo tanto la velocidad promedio es negativa. Así, sabemos que el desplazamiento entre Ⓐ y Ⓑ debe ser un número negativo que tenga unidades de metros. Análogamente, esperamos que el desplazamiento entre Ⓑ y Ⓓ sea positivo.

En el primer intervalo, hacemos $t_i = t_A = 0$ y $t_f = t_B = 1$ s. Si usamos la ecuación 2.1, con $x = -4t + 2t^2$, obtenemos para el desplazamiento entre $t = 0$ y $t = 1$ s,

$$\begin{aligned}\Delta x_{A\to B} &= x_f - x_i = x_B - x_A \\ &= [-4(1) + 2(1)^2] - [-4(0) + 2(0)^2] \\ &= \mathbf{-2\ m}\end{aligned}$$

Para calcular el desplazamiento durante el segundo intervalo ($t = 1$ s a $t = 3$ s), hacemos $t_i = t_B = 1$ s y $t_f = t_D = 3$ s:

$$\begin{aligned}\Delta x_{B\to D} &= x_f - x_i = x_D - x_B \\ &= [-4(3) + 2(3)^2] - [-4(1) + 2(1)^2] \\ &= \mathbf{+8\ m}\end{aligned}$$

Estos desplazamientos también se pueden leer directamente de la gráfica de posición-tiempo.

(B) Calcule la velocidad promedio durante estos dos intervalos.

Solución En el primer intervalo, $\Delta t = t_f - t_i = t_B - t_A = 1$ s. Por lo tanto, usando la ecuación 2.2 y el desplazamiento calculado en (a), encontramos que

$$\bar{v}_{x(A\to B)} = \frac{\Delta x_{A\to B}}{\Delta t} = \frac{-2\ \text{m}}{1\ \text{s}} = \mathbf{-2\ m/s}$$

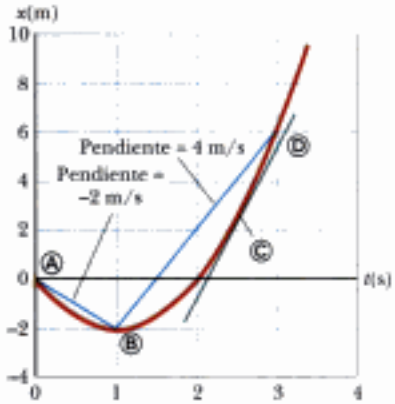


Figura 2.4 (Ejemplo 2.3) Gráfica de posición-tiempo para una partícula que tiene una coordenada x que varía en el tiempo según la expresión $x = -4t + 2t^2$.

En el segundo intervalo, $\Delta t = 2$ s; por lo tanto,

$$\bar{v}_{x(B\to D)} = \frac{\Delta x_{B\to D}}{\Delta t} = \frac{8\ \text{m}}{2\ \text{s}} = \mathbf{+4\ m/s}$$

Estos valores son los mismos que las pendientes de las rectas que unen estos puntos en la figura 2.4.

(C) Encuentre la velocidad instantánea de la partícula en $t = 2.5$ s.

Solución Podemos calcular que esta velocidad instantánea debe ser del mismo orden de magnitud que nuestros resultantes previos, es decir, unos cuantos metros por segundo. Al medir la pendiente de la línea verde en $t = 2.5$ s en la figura 2.4, encontramos que

$$v_x = \mathbf{+6\ m/s}$$

[3] Simplemente para hacerlo más fácil de leer, escribimos la expresión como $x = -4t + 2t^2$ en lugar de $x = (-4.00\ \text{m/s})t + (2.00\ \text{m/s}^2)t^{2.00}$. Cuando una ecuación resume mediciones, considere que sus coeficientes tienen tantos dígitos significativos como los demás datos del problema. Cuando se ponen en funcionamiento nuestros relojes en $t = 0$, esto no significa limitar la precisión a un solo dígito. Considere que cualquier valor cero en este libro contiene tantas cifras significativas como sea necesario.

Materiał chroniony prawem autorskim

2.3 Aceleración

En el último ejemplo, trabajamos con una situación en la que la velocidad de una partícula cambia mientras ésta se está moviendo. Éste es un caso muy frecuente. (¿Qué tan constante es su velocidad cuando viaja en autobús o conduce un auto en calles citadinas?) Es posible cuantificar cambios en velocidad como función del tiempo en forma muy semejante a aquella en la que cuantificamos cambios en posición como función del tiempo. Cuando la velocidad de una partícula cambia con el tiempo, se dice que la partícula está *acelerando*. Por ejemplo, la magnitud de la velocidad de un auto aumenta cuando se pisa el acelerador y disminuye cuando se aplican los frenos. Veamos cómo cuantificar la aceleración.

Suponga que un objeto que se puede modelar como partícula que se mueve a lo largo del eje x tiene una velocidad inicial v_{xi} en el tiempo t_i y una velocidad final v_{xf} en el tiempo t_f, como se ve en la figura 2.5a.

La aceleración promedio $\bar{a}_x$ de la partícula se define como el *cambio* en velocidad Δv_x dividido entre el intervalo Δt durante el cual ocurre ese cambio:

$$\bar{a}_x \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} \tag{2.6}$$

Aceleración promedio

Al igual que con la velocidad, cuando el movimiento que se va a analizar es en una dimensión, podemos usar signos positivos y negativos para indicar la dirección de la aceleración. Como las dimensiones de velocidad son L/T y la dimensión del tiempo es T, la aceleración tiene dimensiones de longitud dividida entre el cuadrado del tiempo, o sea L/T^2. La unidad del SI de aceleración es metros por segundo al cuadrado (m/s^2). Puede ser más fácil interpretar estas unidades si las consideramos como metros por segundo por segundo. Por ejemplo, suponga que un objeto tiene una aceleración de $+2\ m/s^2$. Debemos formarnos una imagen mental del objeto que se mueve a una velocidad que es a lo largo de una recta y está aumentando en 2 m/s durante cada intervalo de 1 s. Si el objeto arranca desde el reposo, debemos imaginarlo moviéndose a una velocidad de + 2 m/s después de 1 s, a + 4 m/s después de 2 s, y así sucesivamente.

En algunas situaciones, el valor de la aceleración promedio puede ser diferente en intervalos diferentes. Por lo tanto, es útil definir la *aceleración instantánea* como el límite de la aceleración promedio cuando Δt se aproxima a cero. Este concepto es análogo a la definición de velocidad instantánea que analizamos en la sección previa. Si imaginamos que el punto Ⓐ se acerca más y más al punto Ⓑ en la figura 2.5a y tomamos el límite de $\Delta v_x/\Delta t$ cuando Δt se aproxima a cero, obtenemos la aceleración instantánea:

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \tag{2.7}$$

Aceleración instantánea

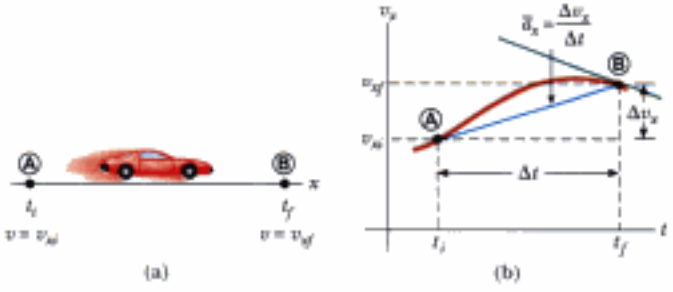


Figura 2.5 (a) Un auto, modelado como partícula, que se mueve a lo largo del eje x de Ⓐ a Ⓑ, tiene una velocidad v_{xi} en $t = t_i$ y velocidad v_{xf} en $t = t_f$. (b) Gráfica de velocidad-tiempo (color ocre) para la partícula que se mueve en línea recta. La pendiente de la recta azul que enlaza Ⓐ y Ⓑ es la aceleración promedio en el intervalo $Dt = t_f - t_i$.

Materiał chroniony prawem autorskim

¡ADVERTENCIA!

2.4 Aceleración negativa

Recuerde que *aceleración negativa no necesariamente significa que un objeto está reduciendo su velocidad.* Si la aceleración es negativa, y la velocidad es negativa, ¡el objeto está acelerando!

¡ADVERTENCIA!

2.5 Desaceleración

La palabra *desaceleración* tiene la connotación común de *reducir velocidad.* En este texto no usaremos esta palabra, porque confunde la definición que hemos dado para aceleración negativa.

Esto es, **la aceleración instantánea es igual a la derivada de la velocidad con respecto al tiempo,** que por definición es la pendiente de la gráfica de velocidad-tiempo. La pendiente de la línea verde de la figura 2.5b es igual a la aceleración instantánea en el punto Ⓑ. Por lo tanto, vemos que como la velocidad de una partícula en movimiento es la pendiente en un punto en la gráfica x-t de la partícula, la aceleración de una partícula es la pendiente en un punto de la gráfica v_x-t de la partícula. Es posible interpretar la derivada de la velocidad con respecto al tiempo como la razón de cambio de la velocidad con el tiempo. Si a_x es positiva la aceleración es en la dirección x positiva. Si a_x es negativa, la aceleración es en la dirección x negativa.

Para el caso del movimiento en línea recta, la dirección de la velocidad de un objeto y la dirección de su aceleración están relacionadas como sigue. **Cuando la velocidad y aceleración del objeto están en la misma dirección, el objeto está acelerando. Por otra parte, cuando la velocidad y aceleración del objeto están en direcciones opuestas, el objeto está reduciendo su velocidad.**

Para ayudar con este análisis de los signos de velocidad y aceleración, podemos relacionar la aceleración de un objeto a la *fuerza* ejercida sobre el objeto. En el capítulo 5 formalmente establecemos que **fuerza es proporcional a aceleración:**

$$\boldsymbol{F} \propto \boldsymbol{a}$$

Esta proporcionalidad indica que una aceleración es causada por una fuerza. Además, fuerza y aceleración son vectores y los vectores actúan en la misma dirección. En consecuencia, consideremos los signos de velocidad y aceleración al imaginar una fuerza aplicada a un objeto y causarle una aceleración. Supongamos que la velocidad y aceleración están en la misma dirección. Esta situación corresponde a un objeto que se mueve en alguna dirección que experimenta una fuerza que actúa en la misma dirección. En este caso, ¡el objeto acelera! Ahora supongamos que velocidad y aceleración están en direcciones opuestas. En esta situación, el objeto se mueve en alguna dirección y experimenta una fuerza que actúa en dirección opuesta. Por lo tanto, ¡el objeto reduce su velocidad! Es muy útil igualar la dirección de la aceleración con la dirección de una fuerza, porque es más fácil de nuestra experiencia cotidiana pensar en qué efecto tendrá una fuerza sobre un objeto que pensar sólo en términos de la dirección de la aceleración.

Pregunta rápida 2.2 Si un auto se mueve hacia el este y reduce su velocidad, ¿cuál es la dirección de la fuerza sobre el auto que hace que reduzca su velocidad? (a) hacia el este (b) hacia el oeste (c) ninguna de éstas.

De aquí en adelante usaremos el término *aceleración* para indicar aceleración instantánea. Cuando queremos decir aceleración promedio, siempre usaremos el adjetivo *promedio.*

Al igual que $v_x = dx/dt$, la aceleración también se puede escribir

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{2.8}$$

Esto es, en un movimiento unidimensional, la aceleración es igual a la *segunda derivada* de x con respecto al tiempo.

La figura 2.6 ilustra la forma en que la gráfica de aceleración-tiempo está relacionada con la gráfica de velocidad-tiempo. La aceleración en cualquier instante es la pendiente de la gráfica de velocidad-tiempo en ese instante. Los valores positivos de aceleración corresponden a los puntos de la figura 2.6a donde la velocidad es creciente en la dirección x positiva. La aceleración alcanza un máximo en el tiempo t_A, cuando la pendiente de la gráfica de velocidad-tiempo es máxima. La aceleración se va a cero en el tiempo t_B, cuando la velocidad es máxima (esto es, cuando la pendiente de la gráfica v_x-t es cero). La aceleración es negativa cuando la velocidad es decreciente en la dirección x positiva, y alcanza su valor más negativo en el tiempo t_C.

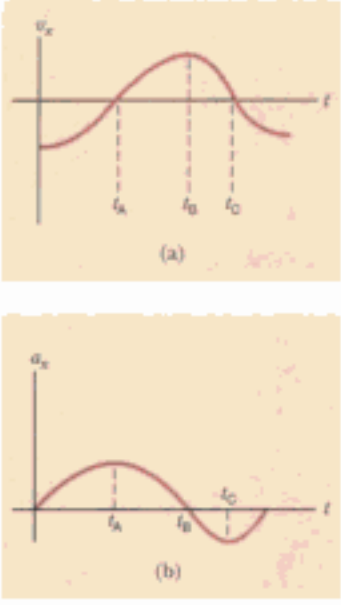


Figura 2.6 La aceleración instantánea se puede obtener de la gráfica velocidad-tiempo (a). En cada instante, la aceleración en la gráfica a_x contra t (b) es igual a la pendiente de la tangente a la curva v_x contra t (a).

Materiał chroniony prawem autorskim

Pregunta rápida 2.3 Haga una gráfica de velocidad-tiempo para el auto de la figura 2.1a. El límite de velocidad puesto en el señalamiento de la carretera es 30 km/h. ¿Verdadero o Falso? El auto excede el límite de velocidad en algún tiempo dentro del intervalo.

Ejemplo conceptual 2.4 Relaciones gráficas entre x, v_x, y a_x

La posición de un objeto que se mueve a lo largo del eje x varía con el tiempo, como en la figura 2.7a. Grafique la velocidad contra el tiempo y la aceleración contra el tiempo para el objeto.

Solución La velocidad en cualquier instante es la pendiente de la tangente a la gráfica x-t en ese instante. Entre $t = 0$ y $t = t_A$, la pendiente de la gráfica x-t aumenta uniformemente, y por ello la velocidad aumenta linealmente, como se ve en la figura 2.7b. Entre t_A y t_B, la pendiente de la gráfica x-t es constante, y por ello la velocidad permanece constante. En t_D, la pendiente de la gráfica x-t es cero, de modo que la velocidad es cero en ese instante. Entre t_D y t_E, la pendiente de la gráfica x-t y por tanto la velocidad son negativas y disminuyen uniformemente en este intervalo. En el intervalo t_E a t_F, la pendiente de la gráfica x-t es todavía negativa, y en t_F se va a cero. Finalmente, después de t_F, la pendiente de la gráfica x-t es cero, lo cual significa que el objeto está en reposo para $t > t_F$.

La aceleración en cualquier instante es la pendiente de la tangente a la gráfica v_x-t en ese instante. La gráfica de aceleración contra tiempo para este objeto, se ilustra en la figura 2.7c. La aceleración es constante y positiva entre 0 y t_A, donde la pendiente de la gráfica v_x-t es positiva. Es cero entre t_A y t_B y para $t > t_F$ porque la pendiente de la gráfica v_x-t es cero en estos tiempos. Es negativa entre t_B y t_E porque la pendiente de la gráfica v_x-t es negativa durante este intervalo.

Nótese que los repentinos cambios en aceleración mostrados en la figura 2.7c no son físicos. Estos cambios instantáneos no pueden ocurrir en la realidad.

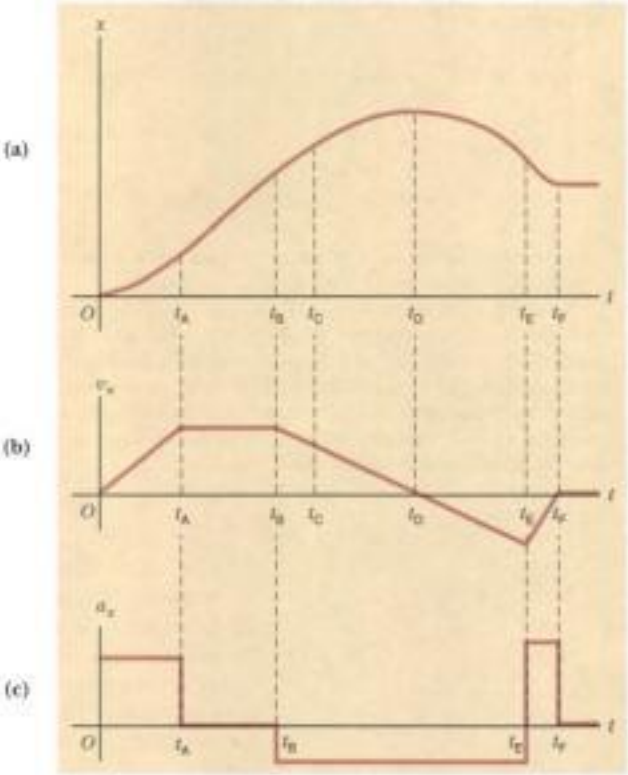


Figura 2.7 (Ejemplo 2.4) (a) Gráfica de posición-tiempo para un objeto que se mueve a lo largo del eje x. (b) La gráfica de velocidad-tiempo para el objeto se obtiene al medir la pendiente de la gráfica de posición-tiempo en cada instante. (c) La gráfica de aceleración-tiempo para el objeto se obtiene al medir la pendiente de la gráfica de velocidad-tiempo en cada instante.

Ejemplo 2.5 Aceleración promedio e instantánea

La velocidad de una partícula que se mueve a lo largo del eje x varía en el tiempo de acuerdo con la expresión $v_x = (40 - 5t^2)$ m/s, donde t es en segundos.

(B) Encuentre la aceleración promedio en el intervalo $t = 0$ y $t = 2.0$ s.

Solución La figura 2.8 es una gráfica v_x-t creada de la expresión de velocidad contra tiempo dada en el enunciado del problema. Debido a que la pendiente de toda la curva v_x-t es negativa, esperamos que la aceleración sea negativa.

Encontramos las velocidades en $t_i = t_A = 0$ y $t_f = t_B = 2.0$ s al sustituir estos valores de t en la expresión para la velocidad:

$$v_{xA} = (40 - 5t_A^2)\ \text{m/s} = [40 - 5(0)^2]\ \text{m/s} = +40\ \text{m/s}$$

$$v_{xB} = (40 - 5t_B^2)\ \text{m/s} = [40 - 5(2.0)^2]\ \text{m/s} = +20\ \text{m/s}$$

Por lo tanto, la aceleración promedio en el intervalo especificado $\Delta t = t_B - t_A = 2.0$ s es

$$\bar{a}_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{v_{xB} - v_{xA}}{t_B - t_A} = \frac{(20 - 40)\ \text{m/s}}{(2.0 - 0)\ \text{s}}$$

$$= \mathbf{-10\ m/s^2}$$

El signo negativo es consistente con nuestras expectativas, es decir, que la aceleración promedio, que está representada por la pendiente de la recta que une los puntos inicial y final de la gráfica de velocidad-tiempo, es negativa.

(B) Determine la aceleración en $t = 2.0$ s.

Materiał chroniony prawem autorskim

Solución La velocidad en cualquier tiempo t es $v_{xi} = (40 - 5t^2)$ m/s y la velocidad en cualquier tiempo posterior $t + \Delta t$ es

$$v_{xf} = 40 - 5(t + \Delta t)^2 = 40 - 5t^2 - 10t\,\Delta t - 5(\Delta t)^2$$

Por lo tanto, el cambio en velocidad durante el intervalo Δt es

$$\Delta v_x = v_{xf} - v_{xi} = [-10t\,\Delta t - 5(\Delta t)^2]\ \text{m/s}$$

Si dividimos esta expresión entre Δt y tomamos el límite del resultado cuando Δt se aproxima a cero resulta la aceleración en *cualquier* tiempo t:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (-10t - 5\Delta t) = -10t\ \text{m/s}^2$$

Por lo tanto, en $t = 2.0$ s,

$$a_x = (-10)(2.0)\ \text{m/s}^2 = -20\ \text{m/s}^2$$

Como la velocidad de la partícula es positiva y la aceleración es negativa, la partícula está reduciendo su velocidad.

Nótese que las respuestas a las partes (A) y (B) son diferentes. La aceleración promedio en (A) es la pendiente de la recta azul de la figura 2.8 que une los puntos Ⓐ y Ⓑ. La aceleración instantánea en (B) es la pendiente de la recta verde tangente a la curva en el punto Ⓑ. Nótese también que la aceleración *no es* constante en este ejemplo. En la sección 2.5 se tratarán situaciones que comprenden aceleración constante.

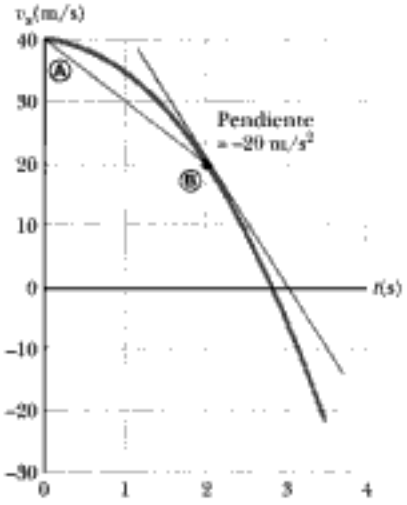


Figura 2.8 (Ejemplo 2.5) Gráfica de velocidad-tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje x según la expresión $v_x = (40 - 5t^2)$ m/s. La aceleración en $t = 2$ es igual a la pendiente de la recta verde tangente en ese tiempo.

Hasta aquí hemos evaluado las derivadas de una función comenzando con la definición de la función y luego tomando el límite de una razón específica. Si el lector está familiarizado con el cálculo, debe reconocer que hay reglas específicas para efectuar derivadas. Estas reglas, que aparecen en el Apéndice B.6, hacen posible que podamos evaluar derivadas rápidamente. Por ejemplo, una regla nos dice que la derivada de cualquier constante es cero. En otro ejemplo, suponga que x es proporcional a alguna potencia de t, tal como en la expresión

$$x = At^n$$

donde A y n son constantes. (Ésta es una forma funcional muy común.) La derivada de x con respecto a t es

$$\frac{dx}{dt} = nAt^{n-1}$$

Al aplicar esta regla al ejemplo 2.5, en el que $v_x = 40 - 5t^2$, encontramos que la aceleración es $a_x = dv_x/dt = -10t$.

2.4 Diagramas de movimiento

A veces los conceptos de velocidad y aceleración se confunden entre sí, pero de hecho son cantidades muy diferentes. Es instructivo usar diagramas de movimiento para describir la velocidad y aceleración para cuando un objeto está en movimiento.

Una fotografía *estroboscópica* de un objeto en movimiento muestra varias imágenes del objeto, tomadas cuando la luz estroboscópica se enciende a un ritmo constante. La figura 2.9 representa tres conjuntos de fotografías estroboscópicas de autos que se mueven a lo largo de una carretera recta en una sola dirección, de izquierda a derecha. Los intervalos entre destellos de la luz son iguales en cada parte del diagrama. Para no confundir las dos cantidades vectoriales, en la figura 2.9 usamos rojo para vectores de velocidad y violeta para

Materiał chroniony prawem autorskim

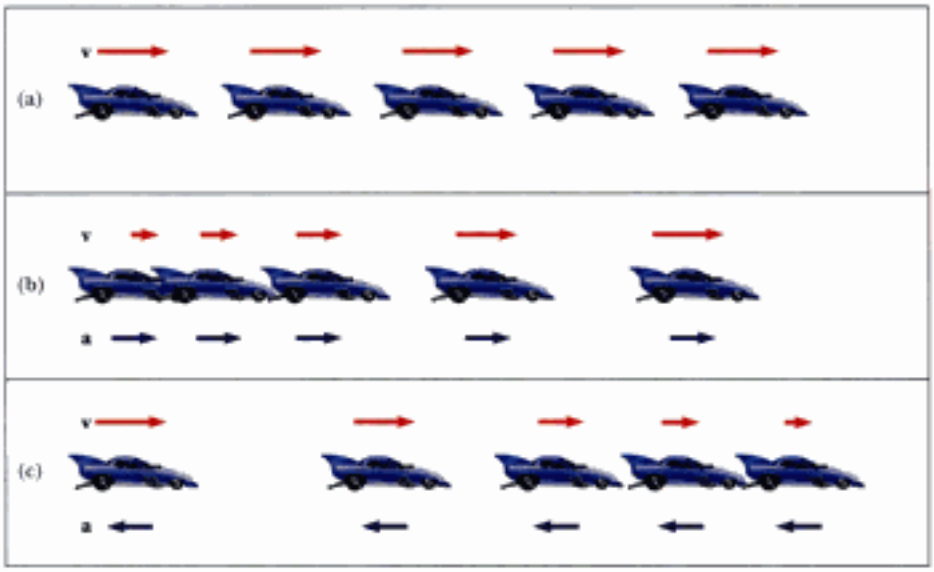


Figura activa 2.9 (a) Diagrama de movimiento para un auto que se mueve a velocidad constante (aceleración cero). (b) Diagrama de movimiento para un auto cuya aceleración constante es en la dirección de su velocidad. El vector velocidad en cada instante está indicado por una flecha roja, y la aceleración constante por una flecha color violeta. (c) Diagrama de movimiento para un auto cuya aceleración constante es en la dirección *opuesta* a la velocidad en cada instante.

En el vínculo* Active Figures *http://www.pse6.com, el lector puede seleccionar la aceleración constante y velocidad inicial del auto y observar representaciones ilustradas y gráficas de su movimiento.

vectores de aceleración. Los vectores se trazan en diferentes instantes durante el movimiento del objeto. Describamos el movimiento del auto en cada diagrama.

En la figura 2.9a, las imágenes del auto están igualmente separadas, lo cual nos muestra que el auto se mueve el mismo desplazamiento en cada intervalo. Esto es consistente con el auto que se mueve con *velocidad positiva constante* y *aceleración cero*. Podríamos modelar el auto como una partícula y describirlo como una partícula que se mueve con velocidad constante.

En la figura 2.9b, las imágenes comienzan a aparecer más separadas conforme transcurre el tiempo. En este caso, el vector velocidad aumenta en el tiempo porque el desplazamiento del auto entre posiciones adyacentes aumenta en el tiempo. Esto sugiere que el auto se mueve con una *velocidad positiva* y una *aceleración positiva*. La velocidad y aceleración están en la misma dirección. En términos de nuestro análisis anterior sobre fuerza, imaginamos una fuerza que acelera al auto está en la misma dirección en la que se mueve, es decir, acelera.

En la figura 2.9c, podemos decir que el auto reduce su velocidad a medida que se mueve a la derecha porque su desplazamiento entre imágenes adyacentes disminuye con el tiempo. En este caso, esto sugiere que el auto se mueve a la derecha con una aceleración negativa constante. El vector velocidad disminuye en el tiempo y eventualmente llega a cero. A partir de este diagrama, vemos que los vectores de aceleración y velocidad *no están* en la misma dirección. El auto se mueve con una *velocidad positiva* pero con una *aceleración negativa*. (Este tipo de movimiento es exhibido por un auto que patina hasta detenerse después de aplicar sus frenos.) La velocidad y aceleración están en direcciones opuestas. En términos de nuestro anterior análisis de fuerza, imaginemos que una fuerza frena al auto en dirección opuesta a aquella en la que se mueve, es decir, reduce su velocidad.

Los vectores de aceleración, de color violeta en las figuras 2.9b y 2.9c son todos de igual longitud. En consecuencia, estos diagramas representan movimiento con aceleración constante. Éste es un tipo importante de movimiento que estudiaremos en la siguiente sección.

Pregunta rápida 2.4 ¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos? (a) Si un auto se desplaza hacia el este, su aceleración es hacia el este. (b) Si un auto reduce su velocidad, su aceleración debe ser negativa. (c) Una partícula con aceleración constante nunca puede detenerse y permanecer detenida.

Materiał chroniony prawem autorskim

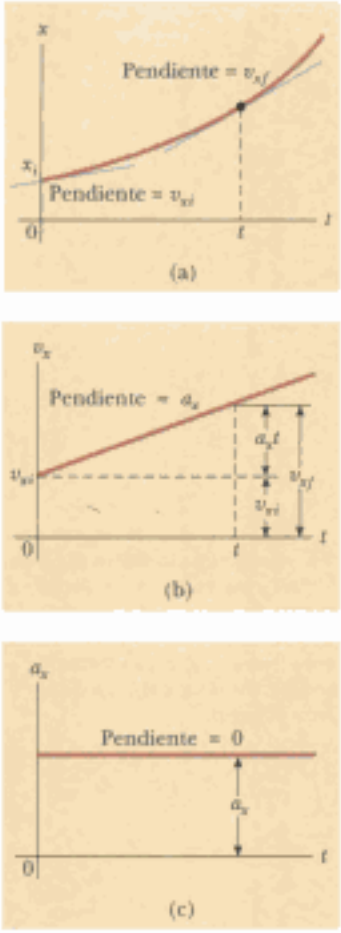


Figura activa 2.10 Partícula que se mueve a lo largo del eje x con aceleración constante a_x; (a) gráfica de posición-tiempo, (b) gráfica de velocidad-tiempo, y (c) gráfica de aceleración-tiempo.

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, el lector puede ajustar la aceleración constante y observar el efecto sobre las gráficas de posición y velocidad.

2.5 Movimiento en una dimensión con aceleración constante

Si la aceleración de una partícula varía con el tiempo, su movimiento puede ser complejo y difícil de analizar. No obstante, un tipo muy común y simple de movimiento unidimensional se presenta cuando la aceleración es constante. Cuando éste es el caso, la aceleración promedio $\bar{a}_x$ en cualquier intervalo es numéricamente igual a la aceleración instantánea a_x en cualquier instante dentro del intervalo, y la velocidad cambia en la misma proporción durante todo el movimiento.

Si sustituimos $\bar{a}_x$ por a_x en la ecuación 2.6 y tomamos $t_i = 0$ y t_f como cualquier tiempo t posterior, encontramos que

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t - 0}$$

o bien,

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \qquad \text{(para } a_x \text{ constante)} \tag{2.9}$$

Esta poderosa expresión permite determinar la velocidad de un objeto en *cualquier* tiempo t si conocemos la velocidad inicial v_{xi} del objeto y su aceleración a_x (constante). En la figura 2.10b aparece una gráfica de la velocidad-tiempo para este movimiento de aceleración constante. La gráfica es una recta, cuya pendiente (constante) es la aceleración a_x; esto es consistente con el hecho de que $a_x = dv_x/dt$ es una constante. Nótese que la pendiente es positiva; esto indica una aceleración positiva. Si la aceleración fuera negativa, entonces la pendiente de la recta de la figura 2.10b sería negativa.

Cuando la aceleración es constante, la gráfica de aceleración contra tiempo (figura 2.10c) es una recta con pendiente cero.

Debido a que la velocidad con aceleración constante varía linealmente con el tiempo según la ecuación 2.9, podemos expresar la velocidad promedio en cualquier intervalo como la media aritmética de la velocidad inicial v_{xi} y la velocidad final v_{xf}:

$$\bar{v}_x = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} \qquad \text{(para } a_x \text{ contante)} \tag{2.10}$$

Nótese que esta expresión para velocidad promedio aplica *sólo* en situaciones en las que la aceleración es constante.

Posición como función de velocidad y tiempo

Podemos ahora usar las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.10 para obtener la posición de un objeto como función del tiempo. Si recordamos que Δx en la ecuación 2.2 representa $x_f - x_i$, y si reconocemos que $\Delta t = t_f - t_i = t - 0 = t$, encontramos

$$x_f - x_i = \bar{v}t = \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t$$

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t \qquad \text{(para } a_x \text{ constante)} \tag{2.11}$$

Esta ecuación da la posición final de la partícula en el tiempo t en términos de las velocidades inicial y final.

Podemos obtener otra expresión útil para la posición de una partícula que se mueve con aceleración constante al sustituir la ecuación 2.9 en la 2.11:

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}[v_{xi} + (v_{xi} + a_x t)]t$$

Posición como función del tiempo

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \qquad \text{(para } a_x \text{ constante)} \tag{2.12}$$

Esta ecuación da la posición final de la partícula en el tiempo t en términos de la velocidad inicial y la aceleración.

La gráfica de posición-tiempo para movimiento con aceleración constante (positiva) que se muestra en la figura 2.10a se obtiene de la ecuación 2.12. Nótese que la curva es una

Materiał chroniony prawem autorskim

parábola. La pendiente de la recta tangente a esta curva en $t = 0$ es igual a la velocidad inicial v_{xi}, y la pendiente de la recta tangente en cualquier tiempo t posterior es igual a la velocidad v_{xf} en ese tiempo.

Por último, podemos obtener una expresión para la velocidad final que no contiene al tiempo como variable al sustituir el valor de t de la ecuación 2.9 en la 2.11:

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})\left(\frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x}\right) = \frac{v_{xf}^2 - v_{xi}^2}{2a_x}$$

$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \qquad \text{(para } a_x \text{ constante)} \qquad (2.13)$$

Velocidad como función de la posición

Esta ecuación da la velocidad final en términos de la aceleración y el desplazamiento de la partícula.

Para movimiento con aceleración *cero*, vemos de las ecuaciones 2.9 y 2.12 que

$$\left.\begin{aligned} v_{xf} &= v_{xi} = v_x \\ x_f &= x_i + v_x t \end{aligned}\right\} \text{ cuando } a_x = 0$$

Esto es, cuando la aceleración de una partícula es cero, su velocidad es constante y su posición cambia linealmente con el tiempo.

Pregunta rápida 2.5 En la figura 2.11, relacione cada gráfica v_x-t de la izquierda con la gráfica a_x-t de la derecha que mejor describa el movimiento.

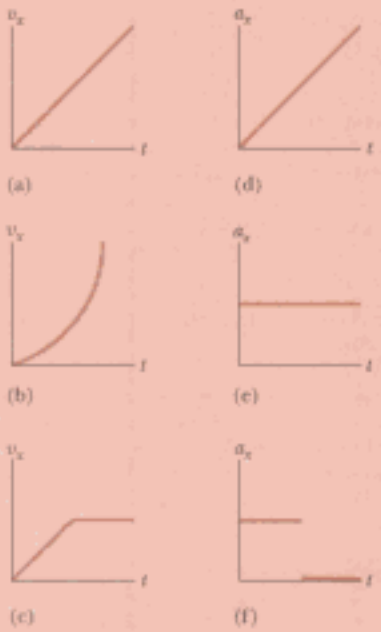


Figura 2.11 (Pregunta Rápida 2.5) Las partes (a), (b) y (c) son gráficas v_x-t de objetos en movimiento unidimensional. Las posibles aceleraciones de cada objeto como función del tiempo se muestran en desorden en (d), (e) y (f).

Las ecuaciones de la 2.9 a la 2.13 son **ecuaciones cinemáticas que se pueden utilizar para resolver cualquier problema de movimiento unidimensional con aceleración constante.** Recuerde que estas relaciones se obtuvieron de las definiciones de velocidad

Materiał chroniony prawem autorskim

Tabla 2.2

Ecuaciones cinemáticas para el movimiento de una partícula bajo aceleración constante

Ecuación	Información dada por la ecuación
$v_{xf} = v_{xi} + a_x t$	Velocidad como función del tiempo
$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t$	Posición como función de velocidad y tiempo
$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	Posición como función del tiempo
$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$	Velocidad como función de posición

Nota: El movimiento es a lo largo del eje x.

y aceleración, junto con algunas sencillas manipulaciones algebraicas y el requisito de que la aceleración sea constante.

Por comodidad, las cuatro ecuaciones cinemáticas utilizadas con más frecuencia se incluyen en la tabla 2.2. La elección de cuál ecuación usar en una situación dada depende de qué se conoce de antemano. A veces es necesario usar dos de estas ecuaciones para despejar dos incógnitas. Por ejemplo, suponga que se dan la velocidad inicial v_{xi} y la aceleración a_x. Entonces se puede hallar (1) la velocidad en el tiempo t, con el uso de $v_{xf} = v_{xi} + a_x t$ y (2) la posición en el tiempo t, con el uso de $x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$. El lector debe reconocer que las cantidades que varían durante el movimiento son posición, velocidad y tiempo.

Es posible adquirir considerable experiencia en el uso de estas ecuaciones al resolver varios ejercicios y problemas. En numerosas ocasiones el lector descubrirá que se puede usar más de un método para obtener una solución. Recuerde que estas ecuaciones de cinemática *no se pueden* usar en una situación en la que la aceleración varíe con el tiempo; sólo se pueden usar cuando la aceleración es constante.

Ejemplo 2.6 Para ingresar al flujo de tránsito

(A) Estime su aceleración promedio cuando ascienda por la rampa de entrada a una carretera interestatal.

Solución Este problema requiere más que una estimación normal. Estamos tratando de hallar un valor de a_x, pero ese valor es difícil de calcular directamente. Las otras variables que participan en cinemática son posición, velocidad y tiempo. La velocidad es probablemente la más fácil de calcular. Supongamos una velocidad final de 100 km/h, de modo que sea posible entrar al tránsito. Multiplicamos este valor por (1 000 m/1 km) para convertir kilómetros a metros y luego multiplicamos por (1 h/3 600 s) para convertir horas a segundos. Estos dos cálculos juntos son casi equivalentes al dividir entre 3. De hecho, sólo digamos que la velocidad final es $v_{xf} \approx 30$ m/s. (Recuerde, está bien este tipo de aproximación y la omisión de dígitos cuando se hagan estimaciones. Si empezara con unidades del sistema inglés de ingeniería, podría aproximar 1 mi/h como alrededor de 0.5 m/s y continuar desde ahí).

Ahora suponga que subió por la rampa a aproximadamente un tercio de su velocidad final, de modo que $v_{xi} \approx 10$ m/s. Por último, suponemos que toma unos 10 s para acelerar de v_{xi} a v_{xf}, si se basa este cálculo en nuestra experiencia previa sobre automóviles. Podemos hallar entonces la aceleración promedio, con el uso de la ecuación 2.6:

$$\bar{a}_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t} \approx \frac{30 \text{ m/s} - 10 \text{ m/s}}{10 \text{ s}}$$

$$= \mathbf{2 \text{ m/s}^2}$$

Sí, estamos de acuerdo en que hemos hecho muchas aproximaciones hasta aquí, pero **este tipo de esfuerzo mental puede ser sorprendentemente útil y con frecuencia da resultados que no son muy diferentes de los obtenidos de mediciones cuidadosas.** No tema el lector a tratar de hacer suposiciones y a efectuar algún redondeo más bien drástico de números para simplificar estimaciones. Los físicos trabajan en este tipo de análisis todo el tiempo.

(B) ¿Qué distancia recorrió durante la primera mitad del intervalo durante el cual aceleró?

Solución Supongamos que la aceleración es constante, con el valor calculado en la parte (A). Como el movimiento tiene lugar en una recta y la velocidad es siempre en la misma dirección, la distancia recorrida desde el punto inicial es igual a la posición final del auto. Podemos calcular la posición final en 5 s con la ecuación 2.12:

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$= 0 + (10 \text{ m/s})(5 \text{ s}) + \frac{1}{2}(2 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s})^2 = 50 \text{ m} + 25 \text{ m}$$

$$= \mathbf{75 \text{ m}}$$

Este resultado indica que si no había acelerado, su velocidad inicial de 10 m/s habría resultado en un movimiento de 50 m al subir por la rampa durante los primeros 5 s. Los otros 25 m es el resultado de su creciente velocidad durante ese intervalo.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 2.7 Aterrizaje en un portaaviones

Un avión de reacción aterriza en un portaaviones a 140 mi/h (≈ 63 m/s).

(A) ¿Cuál es la aceleración (supuesta constante) si se detiene en 2.0 s debido a un cable sujetador que engancha el avión y lo detiene?

Solución Definimos nuestro eje x como la dirección de movimiento del avión. Una cuidadosa lectura del problema revela que además de la velocidad inicial dada de 63 m/s, también sabemos que la velocidad final es cero. También observamos que no tenemos información acerca del cambio en la posición del avión cuando está reduciendo su velocidad. La ecuación 2.9 es la única de la tabla 2.2 donde no aparece posición, por lo que podemos usarla para hallar la aceleración del avión, modelado como una partícula:

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t} = \frac{0 - 63\ \text{m/s}}{2.0\ \text{s}}$$

$$= \mathbf{-31\ m/s^2}$$

(B) Si el avión hace contacto con la pista en la posición $x_i = 0$, ¿cuál es su posición final?

Solución Ahora podemos usar cualquiera de las otras tres ecuaciones de la tabla 2.2 para hallar la posición final. Escojamos la ecuación 2.11:

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t = 0 + \tfrac{1}{2}(63\ \text{m/s} + 0)(2.0\ \text{s})$$

$$= \mathbf{63\ m}$$

Si el avión recorre más que esto, podría caer al mar. La idea de usar cables sujetadores para reducir la velocidad de aviones y hacer posible que aterricen con seguridad en portaaviones, se originó durante la Primera Guerra Mundial. Los cables todavía son una parte vital de la operación de portaaviones modernos.

¿Qué pasaría si? Suponga que el avión aterriza en la cubierta del portaaviones con una velocidad mayor a 63 m/s, pero con la misma aceleración que la calculada en la parte (A). ¿Cómo cambia esto la respuesta a la parte (B)?

Respuesta Si el avión se desplaza con más rapidez al principio, se detendrá más lejos desde su punto inicial, de modo que la respuesta a la parte (B) debe ser más grande. Matemáticamente, vemos en la ecuación 2.11 que si v_{xi} es mayor, entonces x_f será mayor.

Si la cubierta de vuelo tiene una longitud de 75 m, podemos hallar la velocidad máxima inicial con la que el avión puede aterrizar y todavía detenerse en la cubierta a la aceleración dada de la ecuación 2.13:

$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

$$\rightarrow v_{xi} = \sqrt{v_{xf}^2 - 2a_x(x_f - x_i)}$$

$$= \sqrt{0 - 2(-31\ \text{m/s}^2)(75\ \text{m} - 0)}$$

$$= 68\ \text{m/s}$$

Ejemplo 2.8 ¡Cuidado con el límite de rapidez!

Un auto que viaja a una rapidez constante de 45.0 m/s pasa donde está una policía motociclista oculta tras un anuncio. Un segundo después que el auto pasa el anuncio, la motociclista arranca desde el anuncio para alcanzarlo, acelerando a un ritmo constante de 3.00 m/s². ¿Cuánto tarda la motociclista en alcanzar al auto?

Solución Consideremos que el auto y la motociclista son partículas. La figura 2.12 ayuda a aclarar la secuencia de eventos.

Primero, escribimos expresiones para la posición de cada uno de los vehículos como función del tiempo. Es conveniente escoger la posición del anuncio como el origen para hacer $t_B = 0$ como el tiempo en que la motociclista empieza a moverse. En ese instante, el auto ya ha recorrido una distancia de 45.0 m porque se ha desplazado a una velocidad constante de $v_x = 45.0$ m/s durante 1 s. Entonces, la posición inicial del auto es $x_B = 45.0$ m.

Como el auto se mueve con rapidez constante, su aceleración es cero. La aplicación de la ecuación 2.12 (con $a_x = 0$) da la posición del auto en cualquier tiempo t:

$$x_{\text{auto}} = x_B + v_{x\,\text{auto}}t = 45.0\ \text{m} + (45.0\ \text{m/s})t$$

Un rápido examen muestra que en $t = 0$, esta expresión da la posición inicial correcta del auto cuando la motociclista empieza a moverse: $x_{\text{auto}} = x_B = 45.0$ m.

La motociclista arranca desde el reposo en $t_B = 0$ y acelera a 3.00 m/s² desde el origen. Por lo tanto, su posición en cualquier tiempo t se puede hallar de la ecuación 2.12:

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

$$x_{\text{policía}} = 0 + (0)t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = \tfrac{1}{2}(3.00\ \text{m/s}^2)t^2$$

$v_{x\,\text{auto}} = 45.0$ m/s
$a_{x\,\text{auto}} = 0$
$a_{x\,\text{policía}} = 3.00$ m/s²

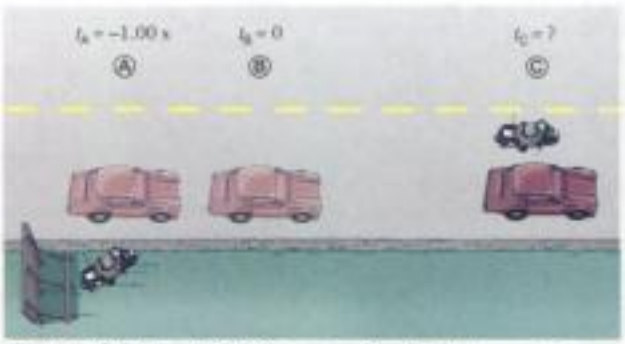


Figura 2.12 (Ejemplo 2.8) Un auto a alta velocidad pasa donde está una policía motociclista.

Materiał chroniony prawem autorskim

La motociclista alcanza al auto en el instante en que su posición sea igual a la del auto, que es la posición Ⓒ:

$$x_{\text{policía}} = x_{\text{auto}}$$

$$\tfrac{1}{2}(3.00\ \text{m/s}^2)t^2 = 45.0\ \text{m} + (45.0\ \text{m/s})t$$

Esto da la ecuación cuadrática

$$1.50t^2 - 45.0t - 45.0 = 0$$

La solución positiva de esta ecuación es $t =$ **31.0 s.**

(Como ayuda para la solución de esta ecuación cuadrática, vea el apéndice B.2).

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si la motociclista tuviera una motocicleta más potente con una aceleración mayor? ¿Cómo cambiaría esto el tiempo en el que la motociclista alcanza al auto?

Respuesta Si la motocicleta tiene una aceleración mayor, la motociclista alcanzará más pronto al auto y la respuesta para el tiempo será menor a 31 s. Matemáticamente, escribamos la ecuación cuadrática final en términos de los parámetros del problema:

$$\tfrac{1}{2}a_x t^2 - v_{x\,\text{auto}}t - x_{\text{B}} = 0$$

La solución a esta ecuación cuadrática es:

$$t = \frac{v_{x\,\text{auto}} \pm \sqrt{v_{x\,\text{auto}}^2 + 2a_x x_{\text{B}}}}{a_x}$$

$$= \frac{v_{x\,\text{auto}}}{a_x} + \sqrt{\frac{v_{x\,\text{auto}}^2}{a_x{}^2} + \frac{2x_{\text{B}}}{a_x}}$$

donde hemos escogido el signo positivo porque esa es la única opción consistente con un tiempo $t > 0$. Como todos los términos del lado derecho de la ecuación tienen la aceleración a_x en el denominador, aumentar la aceleración reducirá el tiempo en el que la motociclista alcanza al auto.

Galileo Galilei
Físico y astrónomo italiano (1564-1642)
Galileo formuló las leyes que gobiernan el movimiento de objetos en caída libre, e hizo muchos otros descubrimientos importantes en física y astronomía. Galileo públicamente defendió lo afirmado por Nicolás Copérnico de que el Sol está en el centro del universo (sistema heliocéntrico). Publicó *Diálogo Sobre dos Nuevos Sistemas del Mundo* para apoyar el modelo de Copérnico, opinión que la iglesia declaró herética. (*North Wind*)

2.6 Objetos en caída libre

Es bien conocido que, en ausencia de la resistencia del aire, todos los objetos que se dejen caer cerca de la superficie de nuestro planeta caen hacia ésta con la misma aceleración constante bajo la influencia de la gravedad de la Tierra. No fue sino hasta cerca del año 1600 que esta conclusión fue aceptada. Antes de ese año, las enseñanzas del gran filósofo Aristóteles (384-322 a.C.) habían sostenido que los objetos más pesados caen más rápido que los más livianos.

El italiano Galileo Galilei (1564-1642) originó nuestras ideas actuales en relación con la caída de objetos. Según una leyenda, él demostró el comportamiento de objetos que caen al observar que dos pesos diferentes, lanzados simultáneamente desde la torre inclinada de Pisa, llegaron al suelo casi al mismo tiempo. Aunque hay alguna duda de que él realizó este experimento en particular, está bien establecido que Galileo llevó a cabo numerosos experimentos sobre objetos en movimiento en planos inclinados. En sus experimentos hizo rodar pelotas hacia abajo de una pendiente pequeña y midió las distancias que recorrían en intervalos sucesivos. El propósito de la pendiente fue reducir la aceleración; con la aceleración reducida, Galileo pudo hacer mediciones precisas de los intervalos. Al aumentar gradualmente la pendiente del plano, finalmente pudo sacar conclusiones acerca de objetos en caída libre porque una pelota en caída libre es equivalente a una pelota que baja por un plano vertical.

Es posible que el lector desee intentar el siguiente experimento: Deje caer simultáneamente, desde la misma altura, una moneda y un pedazo de papel arrugado. Si los efectos de la resistencia del aire son insignificantes, ambos experimentarán el mismo movimiento y llegarán al suelo al mismo tiempo. En el caso ideal, en el que no existe resistencia del aire, este movimiento se conoce como *caída libre*. Si este mismo experimento se lleva a cabo en el vacío, donde la resistencia del aire es verdaderamente insignificante, el papel y la moneda caerían con la misma aceleración, aun cuando el papel no estuviera arrugado. El 2 de agosto de 1971 el astronauta David Scott realizó un experimento de estas características en la Luna. Simultáneamente, dejó caer un martillo y una pluma, que cayeron juntos a la superficie lunar. ¡Es seguro que esta demostración hubiera complacido a Galileo!

Cuando empleamos la expresión *objeto en caída libre* no necesariamente nos referimos a un objeto en caída desde el reposo. **Un objeto en caída libre es aquel que se mueve libremente bajo la influencia sólo de la gravedad, cualquiera que sea su movimiento inicial. Los objetos lanzados hacia arriba o hacia abajo, así como los que son solta-**

¡ADVERTENCIA!

2.6 *g* y g

Asegúrese de no confundir el símbolo *g* en letra cursiva para la aceleración en caída libre con el símbolo g que se usa como abreviatura de "gramo".

Materiał chroniony prawem autorskim

dos desde el reposo, caen todos libremente una vez que sean soltados. Cualquier objeto en caída libre experimenta una aceleración dirigida hacia abajo, independientemente de su movimiento inicial.

Denotaremos la magnitud de la *aceleración en caída libre* por el símbolo g. El valor de g cerca de la superficie terrestre decrece si la altitud crece. Además, se presentan ligeras variaciones en g con cambios en latitud. Es común definir "arriba" como la dirección $+y$ y usar y como la variable de posición en ecuaciones cinemáticas. En la superficie de la Tierra, el valor de g es aproximadamente $9.80\ m/s^2$. A menos que se indique lo contrario, usaremos este valor de g cuando efectuemos cálculos. Para hacer estimaciones rápidas, use $g = 10\ m/s^2$.

Si despreciamos la resistencia del aire y suponemos que la aceleración en caída libre no varía con la altitud en distancias cortas verticales, entonces el movimiento de un objeto en caída libre que se mueva verticalmente es equivalente al movimiento en una dimensión bajo aceleración constante. Por lo tanto, se pueden aplicar las ecuaciones creadas en la sección 2.5 para objetos que se muevan con aceleración constante. La única modificación que necesitamos hacer en estas ecuaciones para objetos en caída libre es tomar nota que el movimiento es en la dirección vertical (la dirección y) en lugar de la dirección horizontal (x) y que la aceleración es hacia abajo y tiene magnitud de $9.80\ m/s^2$. Por lo tanto, siempre escogemos $a_y = -g = -9.80\ m/s^2$, donde el signo negativo significa que la aceleración de un objeto en caída libre es hacia abajo. En el capítulo 13 estudiaremos la forma de trabajar con variaciones en g debidas a la altitud.

Pregunta rápida 2.6 Una pelota se lanza hacia arriba. Cuando la pelota está en caída libre, ¿la aceleración (a) aumenta (b) disminuye (c) aumenta y luego disminuye (d) disminuye y luego aumenta (e) permanece constante?

Pregunta rápida 2.7 Después que una pelota es lanzada hacia arriba y está en el aire, ¿su velocidad (a) aumenta (b) disminuye (c) aumenta y luego disminuye (d) disminuye y luego aumenta (e) permanece constante?

¡ADVERTENCIA!

2.7 El signo de g

Recuerde que g es un número positivo; es tentador sustituir $-9.80\ m/s^2$ por g, pero debemos resistir esta tentación. La aceleración gravitacional hacia abajo se indica explícitamente al expresar la aceleración como $a_y = -g$.

¡ADVERTENCIA!

2.8 Aceleración en la parte superior del movimiento

Es común el concepto erróneo de que la aceleración de un proyectil en la parte superior de su trayectoria es cero. Si bien la velocidad en la parte superior del movimiento de un objeto lanzado hacia arriba momentáneamente se va a cero *la aceleración es todavía aquella debida a la gravedad* en este punto. Si la velocidad y aceleración fueran ambas cero, ¡el proyectil permanecería en la parte superior!

Ejemplo conceptual 2.9 Los paracaidistas atrevidos

Un paracaidista salta de un helicóptero suspendido en el aire. Unos cuantos segundos después, salta otro paracaidista y ambos caen a lo largo de la misma línea vertical. Considere insignificante la resistencia del aire, de modo que ambos paracaidistas caen con la misma aceleración. La diferencia en la rapidez de ambos ¿permanece igual en toda la caída? La distancia vertical entre ellos ¿permanece igual en toda la caída?

Solución En un instante dado, las magnitudes de la velocidad de los paracaidistas son diferentes, porque uno de ellos lleva ventaja. En cualquier intervalo Δt después de este instante; sin embargo, los dos paracaidistas aumentan su rapidez en la misma cantidad, porque tienen la misma aceleración. Por lo tanto, la diferencia en la rapidez de ambos permanece igual en toda la caída.

El primer paracaidista siempre tiene una mayor rapidez que el segundo. En consecuencia, en un intervalo dado, el primero cubre una mayor distancia que el segundo y aumenta la distancia que los separa.

Ejemplo 2.10 Descripción del movimiento de una pelota lanzada

Una pelota es lanzada directamente hacia arriba a 25 m/s. Estime su velocidad a intervalos de 1 s.

Solución Escojamos la dirección hacia arriba como positiva. Sin importar si la pelota se mueve hacia arriba o hacia abajo, su velocidad vertical cambia aproximadamente -10 m/s por cada segundo que permanezca en el aire. Inicia a 25 m/s. Una vez transcurrido 1 s, todavía se mueve hacia arriba pero a 15 m/s, porque su aceleración es hacia abajo (la aceleración hacia abajo hace que disminuya su velocidad). Después de otro segundo, su velocidad hacia arriba se ha reducido a 5 m/s. Ahora viene la parte truculenta: después de otro medio segundo, su velocidad es cero. La pelota ha llegado a su punto más alto. Después de la última mitad de este intervalo de 1 s, la pelota se mueve a -5 m/s. (El signo negativo nos dice que la pelota se mueve ahora en la dirección negativa, es decir, *hacia abajo*. Su velocidad ha cambiado de $+5$ m/s a -5 m/s $-$ ($+5$ m/s) $= -10$ m/s en ese segundo). Continúa hacia abajo, y después que ha transcurrido otro 1 s, cae a una velocidad de -15 m/s. Por último, después de otro 1 s, ha llegado a su punto inicial original y se mueve hacia abajo a -25 m/s.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo conceptual 2.11 Siga la pelota que rebota

Se deja caer una pelota de tenis desde la altura del hombro (unos 1.5 m) y rebota tres veces antes de ser atrapada. Trace gráficas de su posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo, con la dirección +y definida hacia arriba.

Solución Para nuestro dibujo, alarguemos horizontalmente las cosas para ver lo que sucede. (Incluso si la pelota se moviera horizontalmente, este movimiento no afectaría su movimiento vertical).

De la figura 2.13a vemos que la pelota está en contacto con el piso en los puntos Ⓑ, Ⓓ, y Ⓕ. Como la velocidad de la pelota cambia de negativa a positiva tres veces durante estos rebotes (figura 2.13b), la pendiente de la gráfica posición-tiempo debe cambiar en la misma forma. Nótese que disminuye el intervalo entre rebotes. ¿Por qué es esto?

Durante el resto del movimiento de la pelota, la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo de la figura 2.13b debería ser $-9.80\ \text{m/s}^2$. La gráfica de aceleración-tiempo es una recta horizontal en estos tiempos, porque la aceleración no cambia cuando la pelota está en caída libre. Cuando la pelota está en contacto con el piso, la velocidad cambia considerablemente durante un intervalo muy corto, y por lo tanto la aceleración debe ser bastante grande y positiva. Esto corresponde a las rectas muy inclinadas hacia arriba en la gráfica velocidad-tiempo y a los picos en la gráfica aceleración-tiempo.

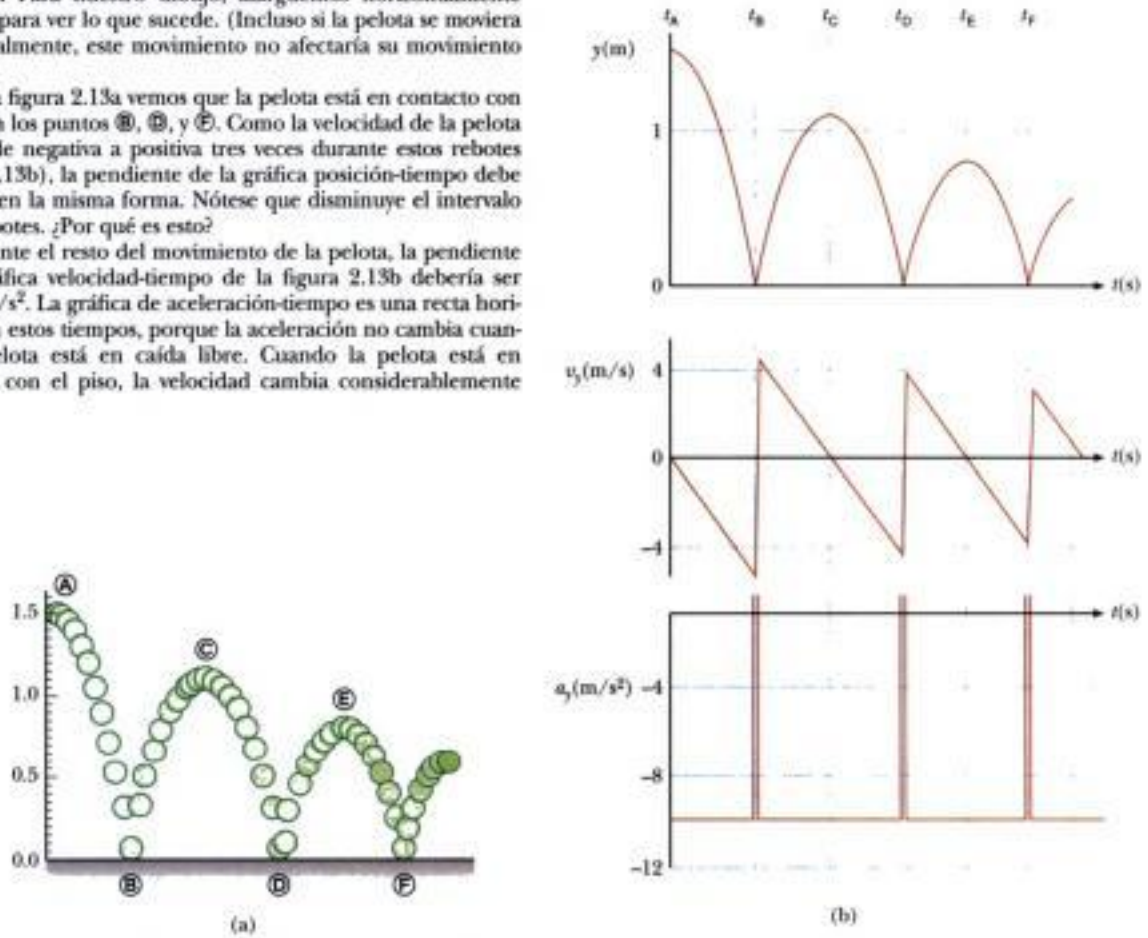


Figura activa 2.13 (Ejemplo conceptual 2.11) (a) Una pelota se deja caer desde una altura de 1.5 m y rebota en el piso. (El movimiento horizontal no se considera aquí porque no afecta al movimiento vertical). (b) Gráficas de posición, velocidad y aceleración contra tiempo.

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, el lector puede ajustar el valor para g y la cantidad de "rebote" de la pelota, y observar el movimiento resultante de la pelota con ilustración y gráficamente.

Pregunta rápida 2.8 ¿Qué valores representan la velocidad vertical y la aceleración de la pelota en los puntos Ⓐ, Ⓒ, y Ⓔ de la figura 2.13a?

(a) $v_y = 0,\ a_y = -9.80\ \text{m/s}^2$

(b) $v_y = 0,\ a_y = 9.80\ \text{m/s}^2$

(c) $v_y = 0,\ a_y = 0$

(d) $v_y = -9.80\ \text{m/s},\ a_y = 0$

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 2.12 No es mal tiro para un novato

Una piedra lanzada desde lo alto de un edificio recibe una velocidad inicial de 20.0 m/s directamente hacia arriba. El edificio mide 50.0 m de altura, y en su descenso la piedra libra apenas el borde del techo, como se ve en la figura 2.14. Tomando $t_A = 0$ como el tiempo en que la piedra sale de la mano del lanzador en la posición Ⓐ, determine **(A)** el tiempo en el que la piedra alcanza su máxima altura, **(B)** la altura máxima, **(C)** el tiempo en el que la piedra regresa a la altura de la cual fue lanzada, **(D)** la velocidad de la piedra en este instante, y **(E)** la velocidad y posición de la piedra en $t = 5.00$ s.

Solución (A) Cuando la piedra se mueve de Ⓐ a Ⓑ, su velocidad debe cambiar en 20 m/s porque se detiene en Ⓑ. Como la gravedad hace que las velocidades verticales cambien en alrededor de 10 m/s por cada segundo de caída libre, la piedra debe tardar unos 2 s para pasar de Ⓐ a Ⓑ en nuestro dibujo. Para calcular el tiempo t_B exacto en el que la piedra alcanza su máxima altura, usamos la ecuación 2.9, $v_{yB} = v_{yA} + a_y t$, tomando nota que $v_{yB} = 0$ y poniendo el inicio de las lecturas del reloj en $t_A = 0$:

$$0 = 20.0 \text{ m/s} + (-9.80 \text{ m/s}^2)t$$

$$t = t_B = \frac{20.0 \text{ m/s}}{9.80 \text{ m/s}^2} = \mathbf{2.04\ s}$$

Nuestra estimación estuvo muy cercana.

(B) Como la velocidad promedio para este primer intervalo es 10 m/s (el promedio de 20 m/s y 0 m/s) y como se mueve unos 2 s, esperamos que la piedra recorra unos 20 m. Al sustituir nuestro tiempo en la ecuación 2.12, podemos hallar la altura máxima medida desde la posición del lanzador, donde hacemos $y_A = 0$:

$$y_{máx} = y_B = y_A + v_{yA}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

$$y_B = 0 + (20.0 \text{ m/s})(2.04 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-9.80 \text{ m/s}^2)(2.04 \text{ s})^2$$

$$= \mathbf{20.4\ m}$$

Nuestra estimación de caída libre es muy precisa.

(C) No hay razón para pensar que el movimiento de la piedra de Ⓑ a Ⓒ sea otra que el contrario de su movimiento de Ⓐ a Ⓑ. El movimiento de Ⓐ a Ⓒ es simétrico. Por lo tanto, el tiempo necesario para que pase de Ⓐ a Ⓒ debe ser el doble del tiempo necesario para que pase de Ⓐ a Ⓑ. Cuando la piedra regrese a la altura de la que fue lanzada (posición Ⓒ), la coordenada y es cero otra vez. Con el uso de la ecuación 2.12, con $y_C = 0$, obtenemos

$$y_C = y_A + v_{yA}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$
$$0 = 0 + 20.0t - 4.90t^2$$

Ésta es una ecuación cuadrática y por ello tiene dos soluciones para $t = t_C$. La ecuación se puede factorizar para dar

$$t(20.0 - 4.90t) = 0$$

Una solución es $t = 0$, que corresponde al tiempo en que la piedra inicia su movimiento. La otra solución es $\mathbf{t = 4.08\ s}$, que es la solución que buscamos. Nótese que es el doble del valor que calculamos para t_B.

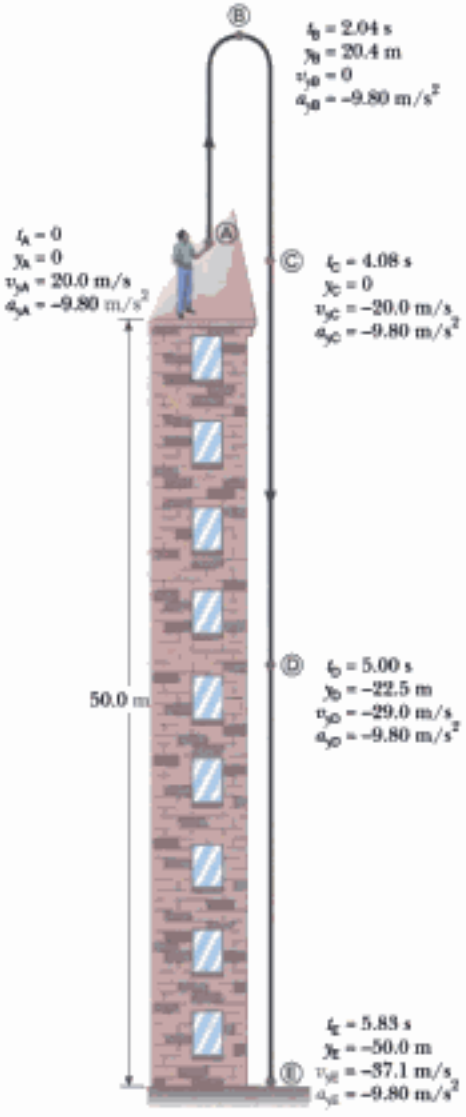


Figura 2.14 (Ejemplo 2.12) Posición y velocidad contra tiempo para una piedra en caída libre lanzada inicialmente hacia arriba con una velocidad $v_{yA} = 20.0$ m/s.

(D) De nuevo, esperamos que cualquier cosa en Ⓒ sea igual a esto mismo en Ⓐ, excepto que la velocidad es ahora en la dirección opuesta. El valor para t hallado en (c) puede ser insertado en la ecuación 2.9 para obtener

$$v_{yC} = v_{yA} + a_y t = 20.0 \text{ m/s} + (-9.80 \text{ m/s}^2)(4.08 \text{ s})$$

$$= \mathbf{-20.0\ m/s}$$

La velocidad de la piedra cuando regresa a su altura original es igual en magnitud a su velocidad inicial pero opuesta en dirección.

Materiał chroniony prawem autorskim

(E) Para esta parte hacemos caso omiso de la primera parte del movimiento (Ⓐ→Ⓑ) y consideramos lo que ocurre cuando la piedra cae desde la posición Ⓑ, donde tiene velocidad vertical cero, a la posición Ⓓ. Definimos el tiempo inicial como $t_B = 0$. Como el tiempo dado para esta parte del movimiento relativo a nuestro nuevo cero de tiempo es 5.00 s − 2.04 s = 2.96 s, estimamos que la aceleración debida a la gravedad habrá cambiado la rapidez en unos 30 m/s. Podemos calcular esto desde la ecuación 2.9, donde tomamos $t = 2.96$:

$$v_{yD} = v_{yB} + a_y t = 0 \text{ m/s} + (-9.80 \text{ m/s}^2)(2.96 \text{ s})$$
$$= \mathbf{-29.0 \text{ m/s}}$$

Con la misma facilidad podríamos hacer nuestro cálculo entre las posiciones Ⓐ (donde regresamos a nuestro tiempo original $t_A = 0$) y Ⓓ:

$$v_{yD} = v_{yA} + a_y t = 20.0 \text{ m/s} + (-9.80 \text{ m/s}^2)(5.00 \text{ s})$$
$$= -29.0 \text{ m/s}$$

Para demostrar aun más que podemos escoger diferentes instantes, usemos la ecuación 2.12 para hallar la posición de la piedra en $t_D = 5.00$ s (con respecto a $t_A = 0$) al definir un nuevo instante inicial, $t_C = 0$:

$$y_D = y_C + v_{yC} t + \tfrac{1}{2} a_y t^2$$
$$= 0 + (-20.0 \text{ m/s})(5.00 \text{ s} - 4.08 \text{ s})$$
$$+ \tfrac{1}{2}(-9.80 \text{ m/s}^2)(5.00 \text{ s} - 4.08 \text{ s})^2$$
$$= \mathbf{-22.5 \text{ m}}$$

¿Qué pasaría si? **¿Qué pasaría si el edificio midiera 30.0 m de alto en lugar de 50.0 m? ¿Qué respuestas en las partes (A) y (E) cambiarían?**

Respuesta Ninguna de las respuestas cambiaría. Todo el movimiento tiene lugar en el aire, y la piedra no interactúa con el suelo durante los primeros 5.00 s. (Nótese que incluso para un edificio de 30.0 m de altura, la piedra está arriba del suelo en $t = 5.00$ s.) Por lo tanto, la altura del edificio no es problema. Matemáticamente, si vemos de nuevo nuestros cálculos, vemos que nunca escribimos la altura del edificio en ninguna ecuación.

2.7 Ecuaciones de cinemática deducidas del cálculo

Esta sección supone que el lector está familiarizado con las técnicas de cálculo integral. Si todavía no ha estudiado integrales en su curso de cálculo, debe saltarse esta sección o cubrirla después que haya estudiado integrales.

La velocidad de una partícula que se mueve en línea recta se puede obtener si se conoce su posición como función del tiempo. Matemáticamente, la velocidad es igual a la derivada de la posición con respecto al tiempo. También es posible hallar la posición de una partícula si se conoce su velocidad como función del tiempo. En cálculo, el procedimiento empleado para efectuar este trabajo se conoce como *integración* o hallar la *antiderivada*. Gráficamente, es equivalente a hallar el área bajo una curva.

Suponga que la gráfica $v_x - t$ para una partícula que se mueve a lo largo del eje x es como se ilustra en la figura 2.15. Dividamos el intervalo $t_f - t_i$ en muchos intervalos pequeños,

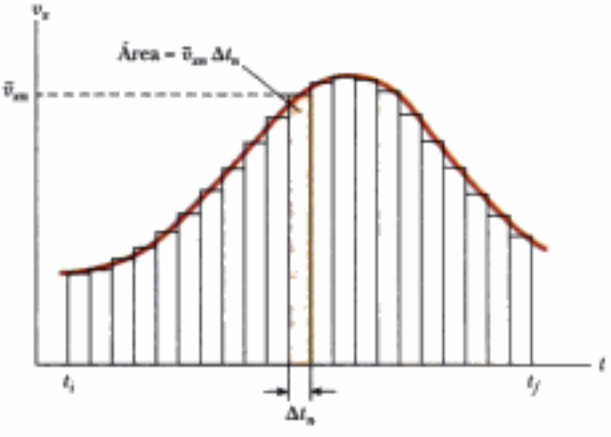


Figura 2.15 Velocidad versus tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje x. El rectángulo sombreado es el desplazamiento Δx en el intervalo Δt_n, mientras que el área debajo de la curva es el desplazamiento total de la partícula.

Materiał chroniony prawem autorskim

cada uno de duración Δt_n. De la definición de velocidad promedio vemos que el desplazamiento durante cualquier intervalo pequeño, como el sombreado en la figura 2.15, está dado por $\Delta x_n = \bar{v}_{xn}\,\Delta t_n$ donde $\bar{v}_{xn}$ es la velocidad promedio en ese intervalo. Por lo tanto, el desplazamiento durante este intervalo pequeño es simplemente el área del rectángulo sombreado. El desplazamiento total para el intervalo $t_f - t_i$ es la suma de las áreas de todos los rectángulos:

$$\Delta x = \sum_n \bar{v}_{xn}\,\Delta t_n$$

donde el símbolo Σ (letra griega sigma mayúscula) significa una suma de todos los términos, es decir, de todos los valores de n. En este caso, la suma se toma sobre todos los rectángulos de t_i a t_f. Ahora, a medida que los intervalos se hagan más y más pequeños, el número de términos en la suma aumenta y la suma se aproxima a un valor igual al área bajo la gráfica velocidad-tiempo. Por lo tanto, en el límite $n \to \infty$, o $\Delta t_n \to 0$, el desplazamiento es

$$\Delta x = \lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_n v_{xn}\,\Delta t_n \tag{2.14}$$

o bien,

Desplazamiento = área bajo la gráfica v_x-t

Nótese que hemos sustituido la velocidad promedio $\bar{v}_{xn}$ con la velocidad instantánea v_{xn} en la suma. Como se puede ver de la figura 2.15, esta aproximación es válida en el límite de intervalos muy pequeños. Por lo tanto, si conocemos la gráfica v_x-t para movimiento a lo largo de una recta, podemos obtener el desplazamiento durante cualquier intervalo al medir el área bajo la curva correspondiente a ese intervalo.

El límite de la suma mostrada en la ecuación 2.14 se denomina **integral definida** y se escribe

Integral definida

$$\lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_n v_{xn}\,\Delta t_n = \int_{t_i}^{t_f} v_x(t)\,dt \tag{2.15}$$

donde $v_x(t)$ denota la velocidad en cualquier tiempo t. Si se conoce la forma funcional explícita de $v_x(t)$ y se dan los límites, entonces la integral se puede evaluar. A veces la gráfica v_x-t para una partícula en movimiento tiene una forma mucho más sencilla que la mostrada en la figura 2.15. Por ejemplo, suponga que una partícula se mueve a velocidad constante v_{xi}. En este caso, la gráfica v_x-t es una recta horizontal, como se ve en la figura 2.16, y el desplazamiento de la partícula durante el intervalo Δt es simplemente el área del rectángulo sombreado:

$$\Delta x = v_{xi}\,\Delta t \qquad (\text{cuando } v_x = v_{xi} = \text{constante})$$

Como otro ejemplo, considere una partícula que se mueve con una velocidad que es proporcional a t, como en la figura 2.17. Tomando $v_x = a_x t$, donde a_x es la constante de

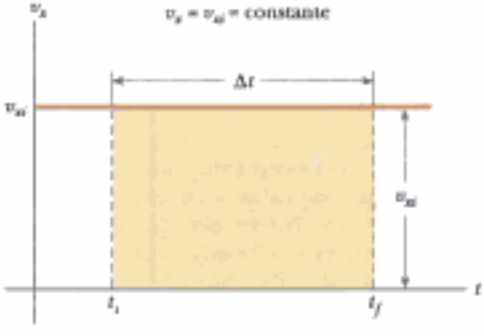


Figura 2.16 Curva de velocidad-tiempo para una partícula que se mueve con velocidad v_{xi} constante. El desplazamiento de la partícula durante el intervalo $t_f - t_i$ es igual al área del rectángulo sombreado.

Materiał chroniony prawem autorskim

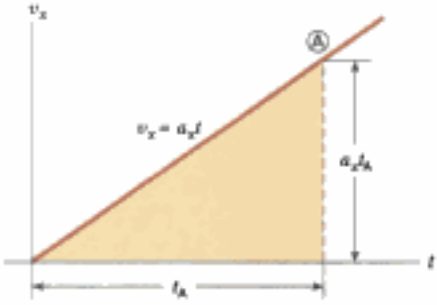


Figura 2.17 Curva de velocidad-tiempo para una partícula que se mueve con una velocidad que es proporcional al tiempo.

proporcionalidad (la aceleración), encontramos que el desplazamiento de la partícula durante el intervalo $t = 0$ a $t = t_A$ es igual al área del triángulo sombreado de la figura 2.17:

$$\Delta x = \tfrac{1}{2}(t_A)(a_x t_A) = \tfrac{1}{2}\, a_x t_A^2$$

Ecuaciones cinemáticas

Ahora usamos las ecuaciones definidas para aceleración y velocidad para derivar dos de nuestras ecuaciones cinemáticas, ecuaciones 2.9 y 2.12.

La ecuación definida para la aceleración (ecuación 2.7),

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

se puede escribir como $dv_x = a_x dt$, o bien, en términos de una integral (o antiderivada), como

$$v_{xf} - v_{xi} = \int_0^t a_x dt$$

Para el caso especial en el que la aceleración es constante, a_x se puede sacar de la integral para obtener

$$v_{xf} - v_{xi} = a_x \int_0^t dt = a_x(t - 0) = a_x t \tag{2.16}$$

que es la ecuación 2.9.

Ahora consideremos la ecuación definida para la velocidad (ecuación 2.5):

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

Podemos escribir esto como $dx = v_x dt$, o en forma de integral como

$$x_f - x_i = \int_0^t v_x dt$$

Como $v_x = v_{xf} = v_{xi} + a_x t$, esta expresión se convierte en

$$x_f - x_i = \int_0^t (v_{xi} + a_x t)\, dt = \int_0^t v_{xi}\, dt + a_x \int_0^t t dt = v_{xi}(t - 0) + a_x\left(\frac{t^2}{2} - 0\right)$$
$$= v_{xi} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2$$

que es la ecuación 2.12.

Además de lo que el lector podría esperar aprender acerca de conceptos físicos, una habilidad muy útil que debería tomar de su curso de física, es la capacidad para resolver problemas complicados. La forma en que los físicos abordan situaciones complejas y las descomponen en partes manejables, es extremadamente útil. En la página siguiente se encuentra una estrategia general para solución de problemas que lo ayudará a avanzar por estos pasos. Para ayudarle a recordar los pasos de la estrategia, se denominan *Conceptualizar, Clasificar, Analizar y Finalizar.*

Materiał chroniony prawem autorskim

ESTRATEGIA GENERAL PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Conceptualizar

- Lo primero que se debe hacer al abordar un problema es *considerar* y *comprender* la situación. Estudie cuidadosamente cualesquier diagramas, gráficas, tablas o fotografías que acompañen al problema. Imagine una película, que corra en su mente, de lo que ocurre en el problema.
- Si no se cuenta con un diagrama, siempre se debe hacer un rápido bosquejo de la situación. Indique cualesquier valores conocidos, quizá en una tabla o directamente en su dibujo.
- Ahora concéntrese en qué información algebraica o numérica se da en el problema. Con todo cuidado lea el enunciado del problema y busque frase clave como son "arranca desde el reposo" ($v_i = 0$), "se detiene" ($v_f = 0$), o "en caída libre" ($a_y = -g = -9.80\ \mathrm{m/s^2}$).
- En seguida concéntrese en el resultado esperado de resolver el problema. ¿Exactamente qué pide la pregunta? ¿El resultado final será numérico o algebraico? ¿Piensa usted qué unidades esperar?
- No olvide incorporar información de su propia experiencia y sentido común. ¿Cómo debe ser una respuesta razonable? Por ejemplo, no esperaría calcular que la velocidad de un automóvil sea 5×10^6 m/s.

Clasificar

- Una vez que tenga una buena idea de lo que es el problema, necesita *simplificar* el problema. Elimine los detalles que no sean importantes para la solución. Por ejemplo, haga un modelo de un objeto en movimiento como si fuera partícula. Si es apropiado, pase por alto la resistencia del aire o fricción entre objetos que se deslizan y una superficie.
- Después de simplificar el problema, es importante *clasificar* el problema. ¿Es un *problema de sustitución*, por ejemplo donde unos números simplemente se pueden sustituir en la definición? Si es así, es probable que el problema se termine cuando se haga esta sustitución; si no lo es, estamos frente a lo que se conoce como *análisis del problema*, y la situación debe ser analizada más a fondo para alcanzar una solución.
- Si es un problema de análisis, requiere de más clasificación. ¿Ha visto usted este tipo de problema? ¿Cae en la creciente lista de tipos de problemas que usted haya resuelto antes? Si es capaz de clasificar un problema, puede ser mucho más fácil trazar un plan para resolverlo. Por ejemplo, si su simplificación muestra que el problema puede ser tratado como una partícula en movimiento bajo aceleración constante y usted ya ha resuelto este problema (como los ejemplos de la sección 2.5), la solución al presente problema sigue un patrón similar.

Analizar

- Ahora usted debe analizar el problema y esforzarse en obtener una solución matemática. Debido a que ya clasificó el problema, no debe ser demasiado difícil seleccionar ecuaciones relevantes que aplican al tipo de situación del problema. Por ejemplo, si el problema comprende una partícula que se mueve bajo aceleración constante, las ecuaciones 2.9 y 2.13 son pertinentes.
- Utilice álgebra (y cálculo, si es necesario) para despejar simbólicamente la variable incógnita en términos de lo que se da. Sustituya los números apropiados, calcule el resultado y haga un redondeo del número adecuado de cifras significativas.

Finalizar

- Ésta es la parte más importante. Examine su respuesta numérica. ¿Tiene las unidades correctas? ¿Satisface sus expectativas de su conceptualización del problema? ¿Qué le parece la forma algebraica del resultado, antes que sustituya valores numéricos? ¿Tiene sentido? Examine las variables del problema para ver si la respuesta cambiaría en una forma físicamente lógica, si drásticamente aumentaron o disminuyeron, o incluso se hicieron cero. La observación de casos difíciles para ver si dan valores esperados, es una forma muy útil de asegurarse de obtener resultados razonables.
- Piense en la forma en que este problema se compara con otros que ya haya resuelto. ¿Cómo fue similar? ¿En qué formas críticas difiere? ¿Por qué se asignó este problema? El lector debe haber aprendido algo para hacerlo. ¿Puede imaginarse qué? Si es una nueva categoría de problema, asegúrese de comprenderlo para que pueda usarlo como modelo para resolver futuros problemas de la misma categoría.

Cuando resuelva problemas complejos, es posible que necesite identificar una serie de subproblemas, y aplicar la estrategia de solución de problemas a cada uno. Para problemas muy sencillos, es probable que no necesite esta estrategia para nada, pero cuando vea un problema y no sepa qué hacer con él, recuerde los pasos de la estrategia y úselos como guía.

Como práctica, sería útil que regrese a los ejemplos de este capítulo, e identifique los pasos de *Conceptualizar, Clasificar, Analizar* y *Finalizar*. En el siguiente capítulo, empezaremos a mostrar explícitamente estos pasos en los ejemplos.

Materiał chroniony prawem autorskim

RESUMEN

Después que una partícula se mueve a lo largo del eje x desde alguna posición inicial x_i a alguna posición final x_f, su **desplazamiento** es

$$\Delta x \equiv x_f - x_i \tag{2.1}$$

La **velocidad promedio** de una partícula durante algún intervalo es el desplazamiento Δx dividido entre el intervalo Δt durante el cual ocurre ese desplazamiento:

$$\bar{v}_x \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.2}$$

La **rapidez promedio** de una partícula es igual a la razón entre la distancia total que recorre y el intervalo total durante el cual recorre esa distancia:

$$\text{Rapidez promedio} = \frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}} \tag{2.3}$$

La **velocidad instantánea** de una partícula se define como el límite de la razón $\Delta x/\Delta t$ cuando Δt se aproxima a cero. Por definición, este límite es igual a la derivada de x con respecto a t, o la rapidez de cambio de la posición en el tiempo:

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{2.5}$$

La **rapidez instantánea** de una partícula es igual a la magnitud de su velocidad instantánea.

La **aceleración promedio** de una partícula se define como la relación del cambio en su velocidad Δv_x dividida entre el intervalo Δt durante el cual ocurre ese cambio:

$$\bar{a}_x \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} \tag{2.6}$$

La **aceleración instantánea** es igual al límite de la razón $\Delta v_x/\Delta t$ cuando Δt se aproxima a 0. Por definición, este límite es igual a la derivada de v_x con respecto a t, o la razón de cambio de la velocidad en el tiempo:

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \tag{2.7}$$

Cuando la velocidad y aceleración del objeto están en la misma dirección, el objeto está acelerando. Por otra parte, cuando la velocidad y aceleración del objeto están en direcciones opuestas, el objeto está reduciendo su velocidad. Recordar que $F \propto a$ es una forma útil de identificar la dirección de la aceleración.

Las **ecuaciones de cinemática** para una partícula que se mueve a lo largo del eje x con aceleración uniforme a_x (constante en magnitud y dirección) son

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \tag{2.9}$$

$$x_f = x_i + \bar{v}_x t = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t \tag{2.11}$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \tag{2.12}$$

$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \tag{2.13}$$

Un objeto en caída libre en presencia de la gravedad de la Tierra experimenta una aceleración en caída libre dirigida hacia el centro de la Tierra. Si se desprecia la resistencia del aire, si el movimiento ocurre cerca de la superficie terrestre, y si el intervalo del movimiento es pequeño en comparación con el radio de la Tierra, entonces la aceleración g en caída libre es constante sobre el intervalo de movimiento, donde g es igual a 9.80 m/s^2.

Los problemas complicados se abordan mejor en una forma organizada. Cuando los necesite, el estudiante debe recordar y aplicar los pasos de *conceptualizar, clasificar, analizar* y *finalizar* de la estrategia general para solución de problemas.

Materiał chroniony prawem autorskim

PREGUNTAS

1. La rapidez del sonido en el aire es de 331 m/s. Durante una tormenta, trate el lector de estimar su distancia desde un rayo al medir el retraso en tiempo entre el relámpago y el trueno. Puede pasar por alto el tiempo que tarda el relámpago en llegar. ¿Por qué?

2. La velocidad promedio de una partícula que se mueve en una dimensión tiene un valor positivo. ¿Es posible, que la velocidad instantánea, haya sido negativa en cualquier tiempo en el intervalo? Suponga que la partícula inició en el origen $x = 0$. Si su velocidad promedio es positiva, ¿podría la partícula alguna vez haber estado en la región $-x$ del eje?

3. Si la velocidad promedio de un objeto es cero en algún intervalo, ¿qué se puede decir acerca del desplazamiento del objeto para ese intervalo?

4. ¿Puede alguna vez la velocidad instantánea de un objeto, en un instante, ser mayor en magnitud que la velocidad promedio en un intervalo que contenga al instante? ¿Puede alguna vez ser menor?

5. Si la velocidad promedio de un objeto es diferente de cero en algún intervalo, ¿significa esto que su velocidad instantánea nunca es cero durante el intervalo? Explique su respuesta.

6. Si la velocidad promedio de un objeto es cero en algún intervalo, demuestre que su velocidad instantánea debe ser cero en algún tiempo durante el intervalo. En su prueba, puede ser útil trazar una gráfica de x contra t y anotar que $v_x(t)$ es una función continua.

7. Si la velocidad de una partícula es diferente de cero, ¿puede su aceleración ser diferente de cero? Explique.

8. Si la velocidad de una partícula es cero, ¿puede su aceleración ser diferente de cero? Explique.

9. Dos autos se están moviendo en la misma dirección en carriles paralelos a lo largo de una carretera. En algún instante, la velocidad del auto A excede la velocidad del auto B. ¿Significa esto que la aceleración de A es mayor que la de B? Explique.

10. ¿Es posible que la velocidad y la aceleración de un objeto tengan signos contrarios? Si no es así, de una prueba; si lo es, dé un ejemplo de tal situación y trace una gráfica de velocidad-tiempo para demostrar su punto de vista.

11. Considere las siguientes combinaciones de signos y valores para velocidad y aceleración de una partícula con respecto a un eje x unidimensional.

	Velocidad	*Aceleración*
a.	Positiva	Positiva
b.	Positiva	Negativa
c.	Positiva	Cero
d.	Negativa	Positiva
e.	Negativa	Negativa
f.	Negativa	Cero
g.	Cero	Positiva
h.	Cero	Negativa

Describa qué hace una partícula en cada caso, y dé un ejemplo real para un automóvil en un eje unidimensional este-oeste, con el este considerada la dirección positiva.

12. ¿Pueden usarse las ecuaciones de cinemática (ecuaciones 2.9-2.13) en una situación donde la aceleración varía en el tiempo? ¿Pueden usarse cuando la aceleración es cero?

13. Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba desde el techo de un edificio. La posición de la piedra, depende de la ubicación escogida para el origen del sistema de coordenadas? La velocidad de la piedra ¿depende de la elección del origen? Explique sus respuestas.

14. Un niño lanza una canica al aire con una velocidad inicial v_0. Otro niño deja caer una pelota en el mismo instante. Compare las aceleraciones de los dos objetos mientras están en vuelo.

15. Un estudiante en lo alto de un edificio de altura h lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de v_0 y luego lanza una segunda pelota hacia abajo con la misma velocidad inicial, v_0. ¿Cómo se comparan las velocidades finales de las pelotas cuando llegan al suelo?

16. Un objeto cae libremente desde una altura h. Es soltado en el tiempo cero y llega al suelo en el tiempo t. (a) Cuando el objeto está a una altura $0.5h$, ¿es el tiempo menor que $0.5t$, igual a $0.5t$ o mayor que $0.5t$? (b) Cuando el tiempo es $0.5t$, ¿es la altura del objeto mayor que $0.5h$, igual a $0.5h$ o menor que $0.5h$? Fundamente sus respuestas.

17. Se deja caer una pelota desde una ventana en un piso superior de un edificio. Llega al suelo con velocidad v. Ahora se repite el lanzamiento, pero abajo, en la calle, está un amigo que lanza otra pelota hacia arriba a una velocidad v. Su amigo lanza la pelota hacia arriba exactamente al mismo tiempo que usted deja caer la suya desde la ventana. En algún lugar, las pelotas se cruzan entre sí. ¿Está este lugar *a la mitad de la distancia* entre la ventana y el suelo, *arriba* de este punto, o *abajo* de este punto?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, difícil = solución guiada con sugerencias disponibles en http://www.pse6.com

= use computadora para resolver el problema = problemas numéricos y simbólicos por pares

Sección 2.1 Posición, velocidad y rapidez

1. La posición de un auto de carreras es observada en diferentes tiempos; los resultados se resumieron en la siguiente tabla. Hállese la velocidad promedio del auto para (a) el primer segundo, (b) los últimos 3 s, y (c) todo el periodo completo de observación.

t(s)	0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
x(m)	0	2.3	9.2	20.7	36.8	57.5

Materiał chroniony prawem autorskim

2. (a). Las dunas de arena de un desierto se mueven con el tiempo, cuando la arena es barrida en el lado de barlovento para asentarse en el lado de sotavento. Se sabe que este "caminar" de dunas es de hasta 20 pies en un año y puede ser de hasta 100 pies por año en tiempos particularmente ventosos. Calcule la rapidez promedio en cada caso en m/s. (b) Las uñas de nuestros dedos crecen al ritmo con que se desplazan los continentes, del orden de 10 mm por año. ¿Aproximadamente cuánto tardó América del Norte en separarse de Europa, una distancia de unas 3 000 millas?

3. En la figura P2.3 se ilustra la gráfica de posición contra tiempo para cierta partícula que se mueve a lo largo del eje x. Encuentre la velocidad promedio en los intervalos (a) 0 a 2 s, (b) 0 a 4 s, (c) 2 s a 4 s, (d) 4 s a 7 s, (e) 0 a 8 s.

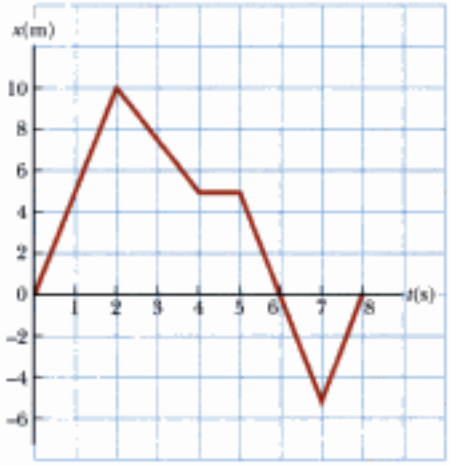


Figura P2.3 Problemas 3 y 9.

4. Una partícula se mueve de acuerdo a la ecuación $x = 10t^2$ donde x está en metros y t es en segundos. (a) Encuentre la velocidad promedio para el intervalo de 2.00 s a 3.00 s. (b) Encuentre la velocidad promedio para el intervalo de 2.00 s a 2.10 s.

5. Una persona camina primero a una rapidez constante de 5.00 m/s a lo largo de una recta del punto A al punto B, y luego regresa a lo largo de la línea de B a A a una rapidez constante de 3.00 m/s. ¿Cuál es (a) su rapidez promedio en todo el viaje? (b) ¿cuál es su velocidad promedio en todo el viaje?

Sección 2.2 Velocidad y rapidez instantáneas

6. La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x varía en el tiempo de acuerdo a la expresión $x = 3t^2$, donde x está en metros y t es en segundos. Evalúe su posición (a) en $t = 3.00$ s y (b) en 3.00 s + Δt. (c) Evalúe el límite $\Delta x/\Delta t$ cuando Δt se aproxima a cero, para hallar la velocidad en $t = 3.00$ s.

7. En la figura P2.7 se ilustra una gráfica de posición-tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje x. (a) Encuentre la velocidad promedio en el intervalo $t = 1.50$ s a $t = 4.00$ s. (b) Determine la velocidad instantánea en $t = 2.00$ s al medir la pendiente de la tangente que se ve en la gráfica. (c) ¿En qué valor de t es cero la velocidad?

8. (a) Utilice los datos del problema 1 para construir una gráfica suave de posición contra tiempo. (b) Con la construcción de tangentes a la curva $x(t)$, encuentre la velocidad instantánea del auto en varios instantes. (c) Grafique la velocidad instantánea contra el tiempo y, de ésta, determine la aceleración promedio del auto. (d) ¿Cuál fue la velocidad inicial del auto?

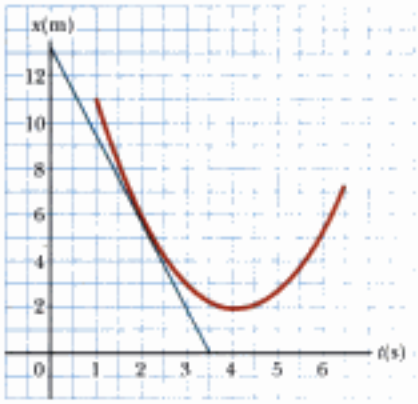


Figura P2.7

9. Encuentre la velocidad instantánea de la partícula descrita en la figura P2.3 en los siguientes tiempos: (a) $t = 1.0$ s, (b) $t = 3.0$ s, (c) $t = 4.5$ s, y (d) $t = 7.5$ s.

10. Una liebre y una tortuga compiten en una carrera sobre una pista de 1.00 km de largo. La tortuga avanza lentamente, en línea recta y de modo uniforme, a una rapidez máxima de 0.200 m/s hacia la línea de meta. La liebre corre a su máxima rapidez de 8.00 m/s hacia la meta, una distancia de 0.800 km, y luego se detiene a molestar a la tortuga. ¿Qué tan cerca de la meta puede la liebre dejar que la tortuga se aproxime antes de reanudar la carrera, que la tortuga gana en un final de fotografía? Suponga que, cuando corren, ambos animales se mueven de modo uniforme a su rapidez respectiva máxima.

Sección 2.3 Aceleración

11. Una superbola de 50.0 g que se desplaza a 25.0 m/s bota en una pared de ladrillo y rebota a 22.0 m/s. Una cámara de alta velocidad registra este evento. Si la superbola está en contacto con la pared durante 3.50 ms, ¿cuál es la magnitud de la aceleración promedio de la superbola durante este intervalo? (*Nota:* 1 ms = 10^{-3} s.)

12. Una partícula arranca desde el reposo y acelera como se ve en la figura P2.12. Determine (a) la rapidez de la partícula en $t = 10.0$ s y en $t = 20.0$ s, y (b) la distancia recorrida en los primeros 20.0 s.

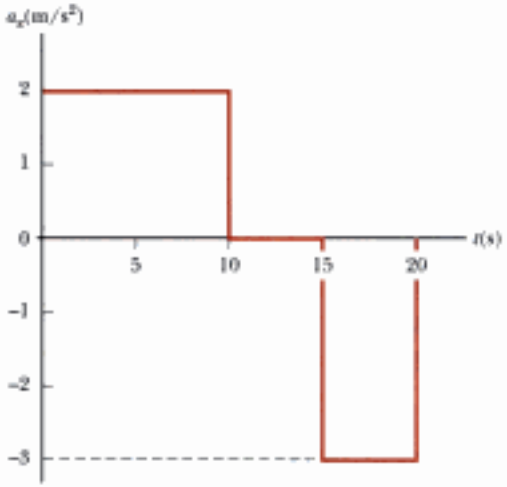


Figura P2.12

Materiał chroniony prawem autorskim

13. Secretariat (un caballo) ganó el Derby de Kentucky con tiempos para sucesivos segmentos de cuarto de milla de 25.2 s, 24.0 s, 23.8 s, y 23.0 s. (a) Encuentre su rapidez promedio durante cada segmento de cuarto de milla. (b) Suponiendo que la rapidez instantánea de Secretariat en la línea de meta fuera la misma que la rapidez promedio durante el cuarto de milla final, encuentre su aceleración promedio para toda la carrera. (Los caballos en el Derby arrancan desde el reposo).

14. En la figura P2.14 se muestra una gráfica de velocidad-tiempo para un objeto que se mueve a lo largo del eje x. (a) Trace una gráfica de la aceleración contra tiempo. (b) Determine la aceleración promedio del objeto en los intervalos $t = 5.00$ s a $t = 15.0$ s y $t = 0$ a t 20.0 s.

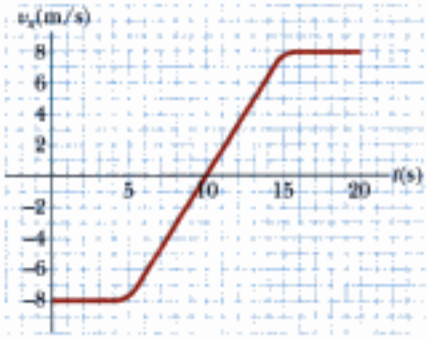


Figura P2.14

15. Una partícula se mueve a lo largo del eje x según la ecuación $x = 2.00 + 3.00t - 1.00t^2$, donde x está en metros y t en segundos. En $t = 3.00$ s, encuentre (a) la posición de la partícula, (b) su velocidad, y (c) su aceleración.

16. Un objeto se mueve a lo largo del eje x según la ecuación $x(t) = (3.00t^2 - 2.00t + 3.00)$m. Determine (a) la rapidez promedio entre $t = 2.00$ s y $t = 3.00$ s, (b) la rapidez instantánea en $t = 2.00$ s y en $t = 3.00$ s, (c) la aceleración promedio entre $t = 2.00$ s y $t = 3.00$ s, y (d) la aceleración instantánea en $t = 2.00$ s y $t = 3.00$ s.

17. La figura P2.17 muestra una gráfica de v_x contra t para el movimiento de un motociclista cuando éste arranca desde el reposo y se mueve a lo largo del camino en línea recta. (a) Encuentre la aceleración promedio para el intervalo $t = 0$ a $t = 6.00$ s. (b) Estime el tiempo en el que la aceleración tiene su máximo valor positivo y el valor de la aceleración en ese instante. (c) ¿Cuándo es cero la aceleración? (d) Estime el valor máximo negativo de la aceleración y el tiempo en el que éste ocurre.

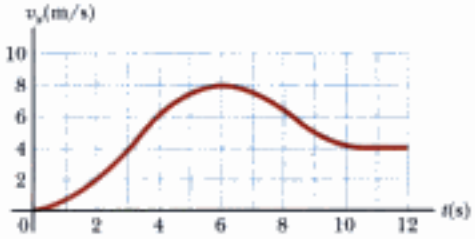


Figura P2.17

Sección 2.4 Diagramas de movimiento

18. Trace diagramas de movimiento para (a) un objeto que se mueve a la derecha a velocidad constante, (b) un objeto que se mueve a la derecha y acelera a un ritmo constante, (c) un objeto que se mueve a la derecha y reduce su velocidad a un ritmo constante, (d) un objeto que se mueve a la izquierda y acelera a un ritmo constante, y (e) un objeto que se mueve a la izquierda y reduce su velocidad a un ritmo constante. (f) ¿Cómo cambiarían sus dibujos si los cambios en velocidad no fueran uniformes, es decir, si la velocidad no cambiara a un ritmo constante?

Sección 2.5 Movimiento en una dimensión con aceleración constante

19. Julio Verne, en 1865, sugirió enviar personas a la Luna al disparar una cápsula espacial desde un cañón de 220 m de largo con una velocidad de lanzamiento de 10.97 km/s. ¿Cuál hubiera sido la nada realista gran aceleración experimentada por los viajeros espaciales durante el lanzamiento? Compare su respuesta con la aceleración en caída libre de 9.80 m/s^2.

20. Un camión recorre 40.0 m en 8.50 s cuando suavemente reduce su velocidad hasta una rapidez final de 2.80 m/s. (a) Encuentre su rapidez original. (b) Encuentre su aceleración.

21. Un objeto que se mueve con aceleración uniforme tiene una velocidad de 12.0 cm/s en la dirección positiva x cuando su coordenada x es 3.00 cm. Si su coordenada x 2.00 s después es de −5.00 cm, ¿cuál es su aceleración?

22. Un auto BMW 745i puede frenar hasta detenerse en una distancia de 121 pies desde una velocidad de 60.0 mi/h. Para frenar hasta detenerse desde una velocidad de 80 mi/h requiere una distancia de frenado de 211 pies. ¿Cuál es la aceleración promedio de frenado para (a) 60 mi/h hasta el reposo, (b) 80 mi/h hasta el reposo, (c) 80 mi/h a 60 mi/h? Exprese las respuestas en mi/h y en m/s^2.

23. Un bote de alta velocidad que se mueve a 30.0 m/s se aproxima a una boya sin estela que está a 100 m adelante. Al disminuir la aceleración, el piloto reduce la velocidad del bote con una aceleración constante de −3.50 m/s^2. (a) ¿Cuánto tarda el bote en llegar a la boya? (b) ¿Cuál es la velocidad del bote cuando llega a la boya?

24. La figura 2.24 representa parte de los datos de rendimiento de un auto propiedad de un orgulloso estudiante de física. (a) Calcule, de esta gráfica, la distancia total recorrida. (b) ¿Qué distancia recorre el auto entre los tiempo $t = 10$ s y $t = 40$ s? (c) Trace una gráfica de su aceleración contra tiempo entre $t = 0$ y $t = 50$ s. (d) Escriba una ecuación para x como función del tiempo para cada fase del movimiento, representada por (i) $0a$, (ii) ab, (iii) bc. (e) ¿Cuál es la velocidad promedio del auto entre $t = 0$ y $t = 50$ s?

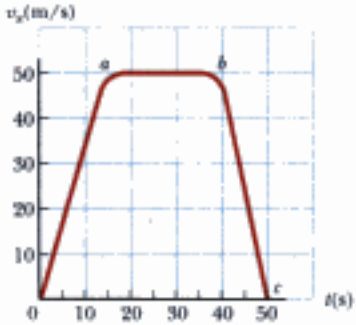


Figura P2.24

Materiał chroniony prawem autorskim

25. Una partícula se mueve a lo largo del eje x. Su posición está dada por la ecuación $x = 2 + 3t - 4t^2$ con x en metros y t en segundos. Determine (a) su posición cuando cambia su dirección y (b) su velocidad cuando regresa a la posición que tenía en $t = 0$.

26. En la pista de carreras de autos Daytona 500, un Ford Thunderbird y un Mercedes Benz corren lado a lado en una recta a 71.5 m/s. El conductor del Thunderbird se da cuenta que debe hacer una parada en el puesto de servicio, y suavemente reduce su velocidad hasta detenerse en una distancia de 250 m. Está durante 5.00 s en el puesto y luego acelera, alcanzando su velocidad previa de 71.5 m/s después de una distancia de 350 m. En este instante, ¿qué distancia se quedó el Thunderbird atrás del Mercedes, que ha continuado a velocidad constante?

27. Un avión a reacción aterriza a una rapidez de 100 m/s y puede acelerar a un ritmo máximo de $-5.00\ \text{m/s}^2$ hasta llegar al reposo. (a) Desde el instante en que el avión toca la pista, ¿cuál es el intervalo mínimo necesario en tiempo antes que se detenga? (b) ¿Puede este avión aterrizar en el aeropuerto de una pequeña isla tropical, donde la pista mide 0.800 km de largo?

28. Un auto se aproxima a una cuesta a 30.0 m/s cuando su motor falla de pronto justo al pie de la cuesta. El auto se mueve con una aceleración constante de $-2.00\ \text{m/}^2$ cuando sube por inercia a la cuesta. (a) Escriba las ecuaciones para la posición a lo largo de la pendiente y para la velocidad como funciones del tiempo, tomando $x = 0$ al pie de la cuesta, donde $v_i = 30.0$ m/s. (b) Determine la máxima distancia que el auto rueda cuesta arriba.

29. El conductor de un auto aplica el freno súbitamente al ver que un tronco bloquea el camino. El auto reduce su velocidad uniformemente con una aceleración de $-5.60\ \text{m/s}^2$ durante 4.20 s, dejando marcas rectas de patinazo de 62.4 m de largo que terminan en el árbol. ¿Con qué rapidez golpea entonces el auto al árbol?

30. *¡Auxilio, falta una de nuestras ecuaciones!* Describimos un movimiento con aceleración constante con las variables y parámetros v_{xi}, v_{xf}, a_x, t y $x_f - x_i$. De las ecuaciones de la tabla 2.2, la primera no contiene $x_f - x_i$. La segunda no contiene a_x; la tercera omite a v_{xf} y la última deja fuera a t. Entonces, para completar el conjunto debe haber una ecuación que *no* contenga v_{xi}. Dedúzcala de las otras y utilícela para resolver el problema 29 en un solo paso.

31. Durante muchos años, el coronel John P. Stapp, USAF, fue poseedor del récord mundial de velocidad en tierra. El 19 de marzo de 1954 condujo un trineo impulsado por cohetes que corrió por una vía a una velocidad de 632 mi/h. Él y el trineo se detuvieron con seguridad en 1.40 s (figura P2.31). Determine (a) la aceleración negativa que experimentó y (b) la distancia que recorrió durante esta aceleración negativa.

32. Un camión en una carretera recta inicia desde el reposo, acelerando a $2.00\ \text{m/s}^2$ hasta que alcanza una rapidez de 20.0 m/s. Entonces el camión se desplaza durante 20.0 s a rapidez constante hasta que se aplican los frenos, deteniendo el camión de un modo uniforme en otros 5.00 s. (a) ¿Cuánto tiempo está el camión en movimiento? (b) ¿Cuál es la velocidad promedio del camión para el movimiento descrito?

33. Un electrón en un tubo de rayos catódicos acelera desde 2.00×10^4 m/s a 6.00×10^6 m/s en 1.50 cm. (a) ¿Cuánto tarda el electrón en recorrer este 1.50 cm? (b) ¿Cuál es la aceleración?

34. En un acelerador lineal de 100 m, se acelera un electrón al 1.00% de la velocidad de la luz en 40.0 m antes que se mueva por inercia 60.0 m hasta el blanco. (a) ¿Cuál es la aceleración del electrón durante los primeros 40.0 m? (b) ¿Cuánto tarda el vuelo total?

35. Dentro de una máquina compleja como lo es una línea de ensamble robótica, suponga que una pieza en particular se desliza en una vía recta. Un sistema de control mide la velocidad promedio de la pieza durante cada intervalo sucesivo de tiempo $\Delta t_0 = t_0 - 0$, la compara con el valor v_i que debe ser, y enciende y apaga un servomotor para dar a la pieza el pulso corrector de aceleración. El pulso está formado por una aceleración constante a_m aplicada durante el intervalo $\Delta t_m = t_m - 0$ dentro del siguiente intervalo de control Δt_0. Como se ve en la figura P2.35, la pieza puede ser modelada como que tiene aceleración cero cuando el motor está apagado (entre t_m y t_0). Una computadora del sistema de control escoge el tamaño de la aceleración para que la velocidad final de la pieza tenga el valor correcto v_i. Suponga que la pieza está inicialmente en reposo y ha de tener una velocidad instantánea v_i en el tiempo t_0. (a) Encuentre el valor requerido de a_m en términos de v_i y t_m. (b) Demuestre que el desplazamiento Δx de la pieza durante el intervalo Δt_0 está dado por $\Delta x = v_i\,(t_0 - 0.5t_m)$. Para valores especificados de v_i y t_0, (c) ¿cuál es el desplazamiento mínimo de la pieza? (d) ¿Cuál es el desplazamiento máximo de la pieza? (e) Los desplazamientos mínimo y máximo, ¿son físicamente aceptables?

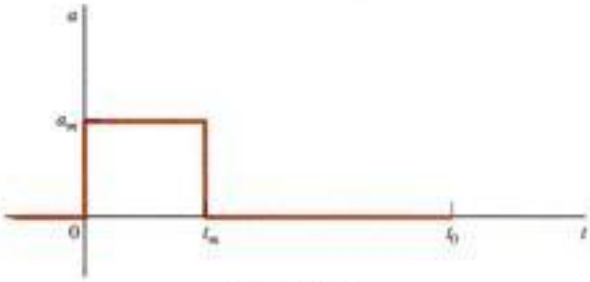


Figura P2.35

Figura P2.31 *(Izquierda)* Coronel John Stapp en trineo de cohete. *(Derecha)* El rostro del coronel Stapp deformado por el esfuerzo de la rápida aceleración negativa.

Materiał chroniony prawem autorskim

36. Un deslizador en una vía de aire lleva una bandera de longitud ℓ y con ella cruza una fotopuerta estacionaria, que mide el intervalo Δt_d durante el cual la bandera bloquea un rayo de luz infrarroja que pasa de lado a lado de la fotopuerta. La relación $v_d = \ell/\Delta t_d$ es la velocidad promedio del deslizador sobre esta parte de su movimiento. Suponga que el deslizador se mueve con aceleración constante. (a) Defienda o cuestione la idea de que v_d es igual a la velocidad instantánea del deslizador cuando está a la mitad del cruce por el espacio de la fotopuerta. (b) Defienda o cuestione la idea de que v_d es igual a la velocidad instantánea del deslizador cuando está a la mitad del cruce por la fotopuerta en tiempo.

37. Una pelota arranca desde el reposo y acelera a 0.500 m/s² mientras baja por un plano inclinado de 9.00 m de largo. Cuando llega al pie del plano, la pelota rueda hacia arriba por otro plano, donde, después de avanzar 15.0 m, llega al reposo. (a) ¿Cuál es la rapidez de la pelota al pie del primer plano? (b) ¿Cuánto tarda en rodar hacia abajo en el primer plano? (c) ¿Cuál es la aceleración a lo largo del segundo plano? (d) ¿Cuál es la rapidez de la pelota a 8.00 m a lo largo del segundo plano?

38. Speedy Sue, en un auto a 30.0 m/s, entra en un túnel de un solo carril. Ella observa entonces un camión lento de reparto a 155 m al frente que se mueve a 5.00 m/s. Sue aplica los frenos, pero puede acelerar sólo a -2.00 m/s², porque el pavimento está mojado. ¿Habrá choque? Si es así, determine a qué distancia dentro del túnel y en qué momento ocurre la colisión; si no hay choque, determine la distancia más cercana entre el auto de Sue y el camión de reparto.

39. Por un método gráfico resuelva el Ejemplo 2.8 "¡Cuidado con el límite de rapidez!". En la misma gráfica trace la posición contra tiempo para el auto y el policía de tránsito. De la intersección de las dos curvas de tiempo en que el policía alcanza al auto.

Sección 2.6 Objetos en caída libre

Nota: En todos los problemas de esta sección, pase por alto los efectos de la resistencia del aire.

40. Una pelota de golf se suelta desde el reposo del techo de un edificio muy alto. Despreciando la resistencia del aire, calcule (a) la posición y (b) la velocidad de la pelota después de 1.00, 2.00 y 3.00 s.

41. *Todas las mañanas a las siete*
Hay veinte soldados perforando en la piedra
El jefe llega y dice, "sigan y venzan
Al taladro de hierro fundido.

Y taladren, soldados, taladren." Y taladren, soldados, taladren
Es trabajo todo el día por azúcar para el té
Más allá del ferrocarril. Y taladren, soldados, taladren.

El nombre del mayordomo era John McAnn.
Por Dios, era un hombre maldecido.
Un día una explosión prematura estalló
Y una milla en el aire subió el gran Jim Goff. Y taladren...

Entonces cuando llegó el día de pago
Jim Goff encontró que le faltaba un dólar.
Cuando preguntó por qué, vino la respuesta:
"Se le descontó el tiempo que estuvo en el cielo." Y taladren...
—Canción popular norteamericana

¿Cuál era el sueldo por hora de Goff? Exprese las suposiciones que haga para calcularlo.

42. Se lanza una pelota directamente hacia abajo, con una rapidez inicial de 8.00 m/s, desde una altura de 30.0 m. ¿Después de qué intervalo de tiempo llega la pelota al suelo?

43. Una estudiante lanza un llavero verticalmente hacia arriba a su hermana del club femenino de estudiantes, que está en una ventana 4.00 m arriba. Las llaves son atrapadas 1.50 s después por el brazo extendido de la hermana. (a) ¿Con qué velocidad inicial fueron lanzadas las llaves? (b) ¿Cuál era la velocidad de las llaves justo antes que fueran atrapadas?

44. Emilia desafía a su amigo David para que atrape un billete de dólar como sigue. Ella sostiene el billete verticalmente, como se ve en la figura P2.44, con el centro del billete entre los dedos índice y pulgar de David. David debe atrapar el billete sin mover su mano hacia abajo después que Emilia lo suelte. Si su tiempo de reacción es de 0.2 s, ¿lo atrapará? Explique su razonamiento.

George Semple

Figura P2.44

45. En Mostar, Bosnia, la prueba máxima del valor de un joven era saltar de un puente de 400 años de antigüedad (ahora destruido) hacia el río Neretva, 23.0 m abajo del puente. (a) ¿Cuánto duraba el salto? (b) ¿Con qué rapidez caía el joven al impacto con el agua? (c) Si la rapidez del sonido en el aire es 340 m/s, ¿cuánto tiempo, después de saltar el clavadista, un espectador sobre el puente escucha el golpe en el agua?

46. Una pelota se deja caer desde el reposo desde una altura h arriba del suelo. Otra pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo en el instante en que se suelta la primera pelota. Determine la velocidad de la segunda pelota si las dos pelotas deben encontrarse a una altura $h/2$ sobre el nivel del suelo.

47. Una pelota de béisbol es golpeada de modo que sube directamente hacia arriba después de ser tocada por el bat. Un aficionado observa que la pelota tarda 3.00 s en alcanzar su máxima altura. Encuentre (a) su velocidad inicial y (b) la altura que alcanza.

48. Es posible disparar una flecha a una rapidez de hasta 100 m/s. (a) Si se desprecia la fricción, ¿a qué altura subiría una flecha lanzada a esta velocidad si se dispara directamente hacia arriba?

Materiał chroniony prawem autorskim

49. Un osado ranchero, sentado en la rama de un árbol, desea caer verticalmente sobre un caballo que galopa abajo del árbol. La rapidez constante del caballo es 10.0 m/s. y la distancia de la rama al nivel de la silla de montar es 3.00 m. (a) ¿Cuál debe ser la distancia horizontal entre la silla y la rama cuando el ranchero hace su movimiento? (b) ¿Cuánto tiempo estará él en el aire?

50. Se reporta que una mujer ha caído 144 pies desde el piso 17 de un edificio, aterrizando en una caja metálica de ventilador, que ella aplastó a una profundidad de 18.0 pulg. Ella sufrió sólo lesiones de menor importancia. Despreciando la resistencia del aire, calcule (a) la rapidez de la mujer inmediatamente antes que chocara con el ventilador, (b) su aceleración promedio cuando hizo contacto con la caja, y (c) el tiempo que tardó para aplastar la caja.

51. La altura de un helicóptero sobre el suelo está dada por $h = 3.00t^3$, donde h está en metros y t en segundos. Después de 2.00 s, el helicóptero suelta una pequeña bolsa de correo. ¿Cuánto tiempo después de ser soltada llega la bolsa al suelo?

52. Un objeto en caída libre requiere 1.50 s para recorrer los últimos 30.0 m antes de llegar al suelo. ¿Desde qué altura sobre el nivel del suelo cayó?

Sección 2.7 Ecuaciones de cinemática deducidas del cálculo

53. Los ingenieros que construyen automotores se refieren a la rapidez de cambio de la aceleración en el tiempo como el tirón. Si un objeto se mueve en una dimensión de modo que su tirón J sea constante, (a) determine expresiones para su aceleración $a_x(t)$, velocidad $v_x(t)$ y posicion $x(t)$, dado que su aceleración, velocidad y posición iniciales son a_{xi}, v_{xi} y x_i, respectivamente. (b) Demuestre que $a_x^2 = a_{xi}^2 + 2J(v_x - v_{xi})$.

54. Un estudiante viaja en una bicicleta equipada con un pequeño motor a lo largo de un camino recto, según se describe por la gráfica de velocidad contra tiempo de la figura P2.54. Trace esta gráfica en la parte media de una hoja de papel de gráfica. (a) Directamente sobre su gráfica, trace una gráfica de la posición contra tiempo, alineando las coordenadas del tiempo de las dos gráficas. (b) Trace una gráfica de la aceleración contra tiempo directamente abajo de la gráfica de v_x-t, de nuevo alineando las coordenadas de tiempo. En cada gráfica, muestre los valores numéricos de x y a_x para todos los puntos de inflexión. (c) ¿Cuál es la aceleración en $t = 6$ s? (d) Encuentre la posición (con respecto al punto de partida) en $t = 6$ s. (e) ¿Cuál es la posición final de la bicicleta en $t = 9$ s?

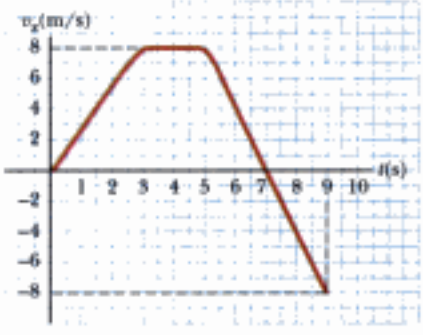


Figura P2.54

55. La rapidez de una bala cuando se desplaza por el cañón de un rifle hacia la abertura está dada por $v = (-5.00 \times 10^7)t^2 + (3 \times 10^5)t$, donde v está en metros por segundo y t es en segundos. La aceleración de la bala justo cuando sale del cañón es cero. (a) Determine la aceleración y posición de la bala como función del tiempo cuando la bala está en el cañón. (b) Determine el lapso en que la bala es acelerada. (c) Encuentre la rapidez a la que la bala sale del cañón. (d) ¿Cuál es la longitud del cañón?

56. La aceleración de una canica en cierto líquido es proporcional al cuadrado de la rapidez de la canica, y está dada (en unidades del SI) por $a = -3.00v^2$ para $v > 0$. Si la canica entra a este fluido con una rapidez de 1.50 m/s, ¿cuánto tardará antes que la rapidez de la canica se reduzca a la mitad de su valor inicial?

Problemas adicionales

57. Un auto tiene una velocidad inicial v_0 cuando el conductor ve un objeto frente a él en el camino. Su tiempo de reacción es Δt_r, y la aceleración de frenado del auto es a. Demuestre que la distancia total de frenado es

$$s_{alto} = v_0 \Delta t_r - v_0^2/2a.$$

Recuerde que a es un número negativo.

58. La luz amarilla de preventiva de un semáforo estará encendida el tiempo suficiente para permitir que un conductor pase por el crucero o con toda seguridad se detenga antes de llegar a él. Un auto puede detenerse si su distancia desde el crucero es mayor que la distancia de frenado encontrada en el problema previo. Si el auto está a menor distancia de frenado desde el crucero, la luz amarilla debe permanecer encendida el tiempo suficiente para permitir que el auto pase totalmente por dicha intersección. (a) Demuestre que la luz amarilla debe permanecer encendida durante un intervalo de

$$\Delta t_{luz} = \Delta t_r - (v_0/2a) + (s_i/v_0)$$

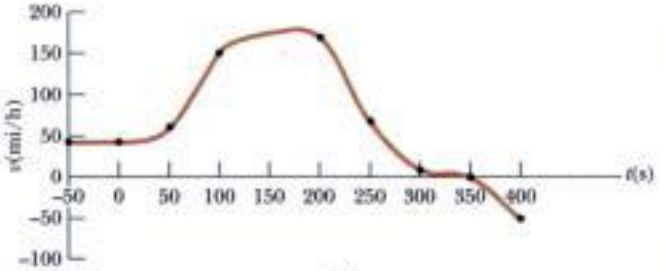
donde Δt_r es el tiempo de reacción del conductor, v_0 es la velocidad del auto que se aproxima a la luz a la rapidez límite, a es la aceleración de frenado, y s_i es el ancho del crucero. (b) Como planificador de tránsito, usted espera que los autos se aproximen a un crucero de 16.0 m de ancho con una rapidez de 60.0 km/h. Sea precavido y suponga un tiempo de reacción de 1.10 s para tomar en cuenta la indecisión de un conductor. Encuentre el lapso que la luz amarilla debe permanecer encendida. Utilice una aceleración de frenado de -2.00 m/s^2.

59. El Acela es el Porsche de los trenes norteamericanos. En la figura P2.59a se ilustra este tren eléctrico que está en servicio en la corrida de Washington a Nueva York. Con dos unidades motrices y seis vagones, puede llevar 304 pasajeros a 170 mi/h. Los vagones se inclinan hasta 6° de la vertical para evitar que los pasajeros se sientan empujados a un costado cuando el tren pase por curvas. Su mecanismo de frenado usa generadores eléctricos para recuperar su energía de movimiento. En la figura P2.59b se ve una gráfica de velocidad-tiempo para el Acela. (a) Describa el movimiento del tren en cada intervalo sucesivo de tiempo. (b) Encuentre la aceleración positiva máxima del tren en el movimiento graficado. (c) Encuentre el desplazamiento del tren en millas entre $t = 0$ y $t = 200$ s.

60. Liz corre hacia una plataforma del tren subterráneo sólo para ver que su tren ya salió; se detiene y ve pasar los vagones, cada uno

Materiał chroniony prawem autorskim

(a)



(b)

Figura P2.59 (a) El Acela; 1 171 000 lb de frío acero rugiendo a 150 mi/h. (b) Gráfica de velocidad contra tiempo para el Acela.

de los cuales mide 8.60 m de largo. El primero pasa junto a ella en 1.50 s y el segundo en 1.10 s. Encuentre la aceleración constante del tren.

61. El pelo de un perro ha sido cortado y ahora está creciendo a 1.04 mm al día. Con el invierno acercándose, este ritmo de crecimiento del pelo está aumentando continuamente 0.132 mm/día cada semana. ¿Cuánto crecerá el pelo del perro durante cinco semanas?

62. Un cohete de prueba se lanza verticalmente hacia arriba desde un pozo. Una catapulta le da una rapidez inicial de 80.0 m/s al nivel del suelo. Sus motores se encienden entonces y acelera hacia arriba a 4.00 m/s^2 hasta que alcanza una altitud de 1 000 m. En ese punto sus motores fallan y el cohete empieza a caer libremente, con una aceleración de −9.80 m/s^2. (a) ¿Cuánto tarda el cohete en moverse arriba del suelo? (b) ¿Cuál es la altitud máxima? (c) ¿Cuál es la velocidad justo antes de estrellarse en el suelo? (El lector necesitará considerar el movimiento mientras el motor está operando independiente del movimiento en caída libre).

63. Una automovilista conduce su auto por una carretera recta a rapidez constante de 15.0 m/s. Justo cuando pasa junto a un motociclista de tránsito, éste arranca acelerando a 2.00 m/s^2 para alcanzarla. Suponiendo que el oficial mantiene esta aceleración (a) determine el tiempo que tarda el oficial de tránsito en alcanzar a la automovilista. Encuentre (b) la rapidez y (c) el desplazamiento total del oficial cuando alcanza a la automovilista.

64. En la figura 2.10b, el área bajo la curva de velocidad contra tiempo y entre el eje vertical y el tiempo t (línea vertical interrumpida) representa el desplazamiento. Como se muestra, esta área está formada de un rectángulo y un triángulo. Calcule sus áreas y compare la suma de las dos áreas con la expresión del lado derecho de la ecuación 2.12.

65. Estableciendo un nuevo récord mundial en una carrera de 100 m, Maggie y Judy cruzan la línea de meta en un empate, haciendo ambas 10.2 s. Acelerando uniformemente, Maggie tardó 2.00 s y Judy 3.00 s en alcanzar la máxima rapidez, que mantuvieron durante el resto de la carrera. (a) ¿Cuál fue la aceleración de cada una de las corredoras? (b) ¿Cuáles fueron sus respectivas magnitudes máximas de rapidez? (c) ¿Cuál corredora estaba adelante en la marca de 6.00 s, y por cuándo?

66. Un tren suburbano corre entre dos estaciones citadinas. Como las estaciones están a sólo 1.00 km de distancia entre ellas, el tren nunca alcanza su máxima rapidez posible de crucero. Durante las horas de más congestionamiento, el maquinista reduce al mínimo el intervalo Δt entre dos estaciones al acelerar durante un intervalo Δt_1 a razón de $a_1 = 0.100$ m/s^2 y luego inmediatamente frenar con aceleración $a_2 = -0.500$ m/s^2 durante un intervalo Δt_2. Encuentre el intervalo mínimo de recorrido Δt y el intervalo Δt_1.

67. Una pelota de caucho duro, soltada a la altura del pecho, cae al pavimento y bota a casi la misma altura. Cuando está en contacto con el pavimento, el lado inferior de la pelota se achata momentáneamente. Suponga que la máxima profundidad de la deformación es del orden de 1 cm. Calcule el orden de magnitud estimado para la máxima aceleración de la pelota cuando está en contacto con el pavimento. Exprese sus suposiciones, las cantidades y los valores que estime para ellas.

68. En el centro de investigaciones John H. Glenn de la NASA en Cleveland, Ohio, se realiza investigación de cuerpos en caída libre al dejar caer paquetes experimentales desde lo alto de un tiro al vacío de 145 m de alto. Una caída libre imita al así llamado entorno de microgravedad de un satélite en órbita. (a) ¿Cuál es el intervalo máximo para caída libre si un paquete experimental se dejara caer todos los 145 m? (b) Especificaciones reales de la NASA toman en cuenta un intervalo de 5.18 s. ¿Qué distancia recorren los paquetes que se dejan caer y (c) cuál es su velocidad a los 5.18 s? (d) ¿Qué aceleración constante sería necesaria para detener un paquete experimental en la distancia restante en el tiro después de su caída de 5.18 s?

69. Un montañista y estudiante de física curioso trepa por un peñasco de 50.0 m que sobresale de un estanque de aguas en calma. Él lanza dos piedras verticalmente hacia abajo, con 1.00 s de diferencia entre ellas, y observa que producen un mismo sonido al llegar al agua. La primera tiene una rapidez inicial de 2.00 m/s. (a) ¿Cuánto tiempo, después de soltar la primera, es que llegan las dos piedras al agua? (b) ¿Qué velocidad inicial debe tener la segunda si han de llegar simultáneamente al agua? (c) ¿Cuál es la velocidad de cada una de ellas en el instante en que las dos llegan al agua?

70. Una piedra se deja caer desde el reposo hacia un pozo. Éste en realidad no mide 16 segundos de profundidad, como en la figura P2.70. (a) El sonido de la piedra al llegar al agua se escucha realmente 2.40 s después de soltarla desde el reposo. ¿A qué distancia de la boca del pozo está la superficie del agua? La velocidad del sonido en el aire (a temperatura ambiente) es de 336 m/s. (b) **¿Qué pasaría si?** Si se desprecia el tiempo de recorrido del sonido, ¿qué porcentaje de error se introduce cuando se calcula la profundidad del pozo?

71. Para proteger su alimento de osos hambrientos, un niño explorador sube su paquete de alimento con una cuerda que se lanza sobre la rama de un árbol a una altura h arriba de sus manos. Se aleja de la cuerda vertical con una velocidad constante $v_{niño}$, sosteniendo en sus manos el extremo libre de la cuerda (figura P2.71). (a) Demuestre que la velocidad v del paquete de alimento está dada por $x(x^2 + h^2)^{-1/2}v_{niño}$ donde x es la distancia que él

Materiał chroniony prawem autorskim

Con permiso de John Hart y Creators Syndicate, Inc.

Figura P2.70

se ha alejado de la cuerda vertical. (b) Demuestre que la aceleración a del paquete de alimento es $k^2(x^2 + k^2)^{-3/2}\, v_{niño}^2$. (c) ¿Qué valores tienen la aceleración a y la velocidad v poco después que él deja el punto más bajo del paquete ($x = 0$)? (d) ¿A qué valores tienden la velocidad y la aceleración del paquete cuando la distancia x continúa aumentando?

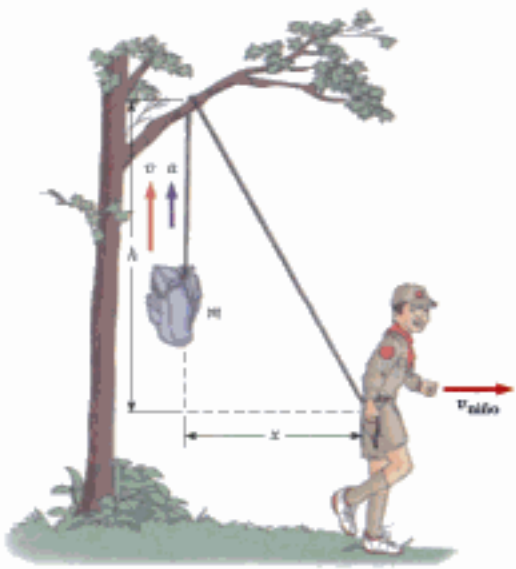


Figura P2.71 Problemas 71 y 72.

72. En el problema 71, sea la altura h igual a 6.00 m y la rapidez del $v_{niño}$ igual a 2.00 m/s. Suponga que el paquete de alimento arranca desde el reposo. (a) Tabule y grafique la gráfica de rapidez-tiempo. (b) Tabule y grafique la gráfica de aceleración-tiempo. Sea el rango de tiempo de 0 s a 5.00 s y el intervalo de tiempo de 0.500 s.

73. Kathy Kool compra un auto deportivo que puede acelerar a razón de 4.90 m/s². Ella decide probar su auto al correr contra otro aficionado, Stan Speedy. Ambos arrancan desde el reposo, pero el experimentado Stan arranca de la línea de salida 1.00 s antes que Kathy. Si Stan avanza con aceleración constante de 3.50 m/s² y Kathy mantiene una aceleración de 4.90 m/s², encuentre (a) el tiempo en el que Kathy alcanza a Stan, (b) la distancia que ella recorre antes de alcanzarlo, y (c) las magnitudes de rapidez de ambos autos en el instante en que ella lo alcanza.

74. Unos astronautas en un planeta distante lanzan una piedra al aire. Con ayuda de una cámara que toma imágenes a un ritmo constante, registran la altura de la piedra como función del tiempo, según se ve en la tabla P2.74. (a) Encuentre la velocidad promedio de la piedra en el intervalo entre cada medición y la siguiente. (b) Utilizando estas velocidades promedio para calcular velocidades instantáneas en los puntos medios de los intervalos, haga una gráfica de la velocidad como función el tiempo. ¿Se mueve la piedra con aceleración constante? Si no es así, trace la recta de mejor ajuste en la gráfica y calcule su pendiente para hallar la aceleración.

Tabla P2.74

Altura de una piedra contra tiempo

Tiempo (s)	Altura (m)	Tiempo (s)	Altura (m)
0.00	5.00	2.75	7.62
0.25	5.75	3.00	7.25
0.50	6.40	3.25	6.77
0.75	6.94	3.50	6.20
1.00	7.38	3.75	5.52
1.25	7.72	4.00	4.73
1.50	7.96	4.25	3.85
1.75	8.10	4.50	2.86
2.00	8.13	4.75	1.77
2.25	8.07	5.00	0.58
2.50	7.90		

75. Dos objetos, A y B, están conectados por una varilla rígida que tiene una longitud L. Los objetos se deslizan a lo largo de rieles guía perpendiculares, como se ve en la figura P2.75. Si A se desliza a la izquierda con una velocidad constante v, encuentre la velocidad de B cuando $\alpha = 60.0°$.

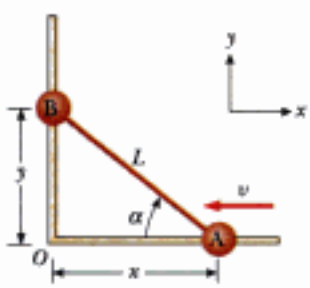


Figura P2.75

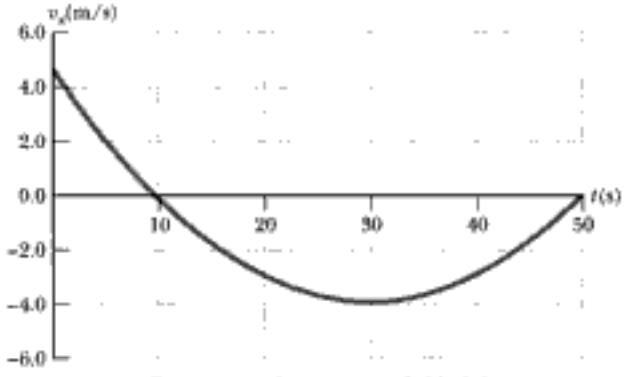
Materiał chroniony prawem autorskim

Respuestas a las *preguntas rápidas*

2.1 (c). Si la partícula se mueve a lo largo de una recta sin cambiar dirección, el desplazamiento y la distancia recorrida sobre cualquier intervalo será la misma. En consecuencia, la magnitud de la velocidad promedio y la rapidez promedio serán las mismas. Si la partícula invierte su dirección, no obstante, el desplazamiento será menor que la distancia recorrida. A su vez, la magnitud de la velocidad promedio será menor que la rapidez promedio.

2.2 (b). Si el auto está reduciendo su velocidad, una fuerza debe estar jalando en la dirección opuesta a su velocidad.

2.3 Falso. Su gráfica debe verse como la siguiente. Esta gráfica v_x-t muestra que la rapidez máxima es de unos 5.0 m/s, que es 18 km/h (=11 mi/h), y por lo tanto el conductor no estaba acelerando.



Respuesta a la pregunta rápida 2.3

2.4 (c). Si una partícula con aceleración constante se detiene y su aceleración permanece constante, debe empezar a moverse otra vez en la dirección opuesta. Si no es así, la aceleración cambiaría de su valor constante original a cero. La opción (a) no es correcta porque la dirección de aceleración no está especificada por la dirección de la velocidad. La opción (b) tampoco es correcta por contraejemplo —un auto que se mueve en la dirección $-x$ y reduce su velocidad tiene una aceleración positiva.

2.5 La gráfica (a) tiene una pendiente constante, lo que indica una aceleración constante; esto está representado por la gráfica (e).

La gráfica (b) representa una rapidez que está creciendo constantemente, pero no a un ritmo uniforme. Entonces, la aceleración debe ser creciente, y la gráfica que mejor indica esto es (d).

La gráfica (c) describe una velocidad que primero aumenta a un ritmo constante, lo que indica aceleración constante. Entonces la velocidad deja de crecer y se hace constante, lo que indica aceleración cero. Lo que mejor se asemeja a esta situación es la gráfica (f).

2.6 (e). Para todo el intervalo que la pelota está en caída libre, la aceleración es la que se debe a la gravedad.

2.7 (d). Mientras la pelota sube, está reduciendo su velocidad. Una vez que llegue al punto más alto, la pelota empieza a caer y aumenta su rapidez.

2.8 (a). En el punto más alto, la pelota está momentáneamente en reposo, pero todavía acelerando a $-g$.

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 3

Vectores

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

3.1 Sistemas de coordenadas

3.2 Cantidades vectoriales y escalares

3.3 Algunas propiedades de vectores

3.4 Componentes de un vector y unidades vectoriales

▲ *Estos controles de la cabina de un avión comercial ayudan al piloto a mantener el control sobre la velocidad de la nave, con qué velocidad volar y en qué dirección volar, lo que le permite aterrizar con seguridad. Las cantidades definidas por una magnitud y una dirección, por ejemplo velocidad, se llaman cantidades vectoriales. (Mark Wagner/Getty Images)*

Materiał chroniony prawem autorskim

En nuestro estudio de física, con frecuencia necesitamos trabajar con cantidades físicas que tienen propiedades numéricas y direccionales. Como se hizo notar en la sección 2.1, las cantidades de esta naturaleza son cantidades vectoriales. En este capítulo se expone el álgebra vectorial y algunas propiedades generales de cantidades vectoriales. Estudiamos la adición y sustracción de cantidades vectoriales, junto con algunas aplicaciones comunes a situaciones físicas.

En todo este texto se usan cantidades vectoriales y, por lo tanto, es imperativo que el estudiante domine tanto sus propiedades gráficas como las algebraicas.

3.1 Sistemas de coordenadas

Numerosos aspectos de la física se relacionan con la descripción de un punto en el espacio. En el capítulo 2, por ejemplo, vimos que la descripción matemática del movimiento de un objeto requiere un método para describir la posición del objeto en varios instantes. Esta descripción se logra con el uso de coordenadas, y en el capítulo 2 utilizamos el sistema de coordenadas cartesianas, en el que los ejes horizontal y vertical se cruzan en un punto definido como el origen (figura 3.1). Las coordenadas cartesianas también se denominan *coordenadas rectangulares*.

A veces es más conveniente representar un punto en un plano por sus *coordenadas polares planas* (r, θ), como se ve en la figura 3.2a. En este *sistema de coordenadas polares*, r es la distancia desde el origen al punto que tiene coordenadas cartesianas, (x, y), y θ es el ángulo entre una recta trazada del origen al punto y un eje fijo. Este eje fijo suele ser el eje x positivo, y θ por lo general se mide en sentido dextrógiro desde dicho eje. Del triángulo rectángulo de la figura 3.2b, encontramos que $\operatorname{sen}\theta = y/r$ y que $\cos\theta = x/r$. (En el apéndice B.4 se da un repaso de funciones trigonométricas.) Por lo tanto, comenzando con las coordenadas polares planas de cualquier punto, podemos obtener las coordenadas cartesianas mediante el uso de las ecuaciones siguientes:

$$x = r\cos\theta \tag{3.1}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta \tag{3.2}$$

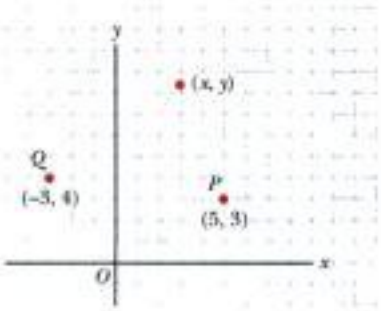


Figura 3.1 Designación de puntos de un sistema de coordenadas cartesianas. Todo punto está marcado con coordenadas (x, y).

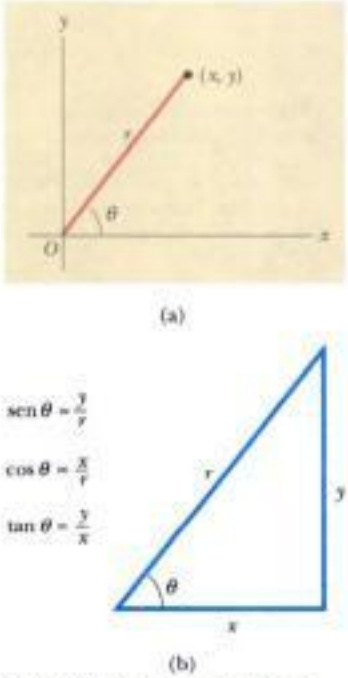


Figura 3.2 (a) Las coordenadas polares planas de un punto están representadas por la distancia r y el ángulo φ, donde φ se mide en sentido dextrógiro desde el eje x positivo. (b) Triángulo rectángulo empleado para relacionar (x, y) con (r, φ).

Materiał chroniony prawem autorskim

Además, las definiciones de trigonometría nos dicen que

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \tag{3.3}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.4}$$

La ecuación 3.4 es el conocido teorema de Pitágoras.

Estas cuatro expresiones que relacionan las coordenadas (x, y) con las coordenadas (r, θ) se aplican sólo cuando θ está definido como se muestra en la figura 3.2a, es decir, cuando θ positivo es un ángulo medido en sentido dextrógiro desde el eje x positivo. (Algunas calculadoras científicas hacen conversiones entre coordenadas cartesianas y polares con base en estas convenciones estándar.) Si el eje de referencia para el ángulo polar θ se selecciona como otro diferente al eje x positivo, o si el sentido de θ creciente se escoge distinto, entonces cambiarán las expresiones que relacionan los dos conjuntos de coordenadas.

Ejemplo 3.1 Coordenadas polares

Las coordenadas cartesianas de un punto del plano xy son $(x, y) = (-3.50, -2.50)$ m, como se ve en la figura 3.3. Hállense las coordenadas polares de este punto.

Solución Por medio de los ejemplos de éste y los dos capítulos siguientes, ilustramos el uso de la estrategia general para la solución de problemas que aparece al final del capítulo 2. En capítulos subsiguientes haremos menos referencias explícitas a esta estrategia, cuando el lector se familiarice con ella y la aplique por sí mismo. El dibujo de la figura 3.3 nos ayuda a *conceptualizar* el problema. Podemos *clasificar por categorías* éste como un problema de sustituciones. De la ecuación 3.4,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3.50\text{ m})^2 + (-2.50\text{ m})^2} = \mathbf{4.30\text{ m}}$$

y de la ecuación 3.3,

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.50\text{ m}}{-3.50\text{ m}} = 0.714$$

$$\theta = \mathbf{216°}$$

Nótese que es necesario usar los signos de x e y para hallar que el punto se encuentra en el tercer cuadrante del sistema de coordenadas. Esto es, $\theta = 216°$ y no $35.5°$.

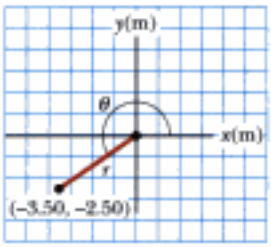


Figura activa 3.3 (Ejemplo 3.1) Encontrar coordenadas polares cuando se dan coordenadas cartesianas.

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, usted puede mover el punto en el plano xy y observar cómo cambian sus coordenadas polares y cartesianas.

3.2 Cantidades vectoriales y escalares

Como se hizo notar en el capítulo 2, algunas cantidades físicas son cantidades escalares, mientras que otras son cantidades vectoriales. Cuando se desea conocer la temperatura exterior para saber qué ropa usar, la única información necesaria es un número y la unidad "grados C" o "grados F". La temperatura es, por lo tanto, un ejemplo de una *cantidad escalar*:

Una **cantidad escalar** está especificada completamente por un solo valor con una unidad apropiada y no tiene dirección.

Otros ejemplos de cantidades escalares son volumen, masa, rapidez y los intervalos de tiempo. Se usan las reglas de aritmética ordinaria para manipular cantidades escalares.

Si el lector se está preparando para pilotear un avión pequeño y necesita conocer la velocidad del viento, debe conocer la rapidez del viento y su dirección. Debido a que la dirección es importante para su completa clasificación, la velocidad es una *cantidad vectorial*:

Materiał chroniony prawem autorskim

Una **cantidad vectorial** está especificada completamente por un número y unidades apropiadas, más una dirección.

Otro ejemplo de una cantidad vectorial es el desplazamiento, como sabemos del capítulo 2. Suponga que una partícula se mueve de algún punto Ⓐ hasta algún punto Ⓑ a lo largo de una trayectoria recta, como se ve en la figura 3.4. Representamos este desplazamiento al trazar una flecha de Ⓐ a Ⓑ, con la punta de la flecha apuntando desde el punto inicial. La dirección de la punta de flecha representa la dirección del desplazamiento, y la longitud de la flecha representa la magnitud del desplazamiento. Si la partícula se mueve a lo largo de alguna otra trayectoria de Ⓐ a Ⓑ, por ejemplo la línea punteada de la figura 3.4, su desplazamiento es todavía la flecha trazada de Ⓐ a Ⓑ. El desplazamiento depende sólo de las posiciones inicial y final, de modo que el vector desplazamiento es independiente de la trayectoria tomada entre estos dos puntos.

En este texto usamos letras negritas, por ejemplo **A**, para representar una cantidad vectorial. Es útil otra notación cuando es difícil la notación en negritas, como es el caso cuando se escribe en papel o en una pizarra, y consiste en escribir una flecha sobre el símbolo del vector: $\vec{A}$. La magnitud del vector **A** se escribe ya sea A o $|\mathbf{A}|$. La magnitud de un vector tiene unidades físicas, por ejemplo metros para desplazamiento o metros por segundo para velocidad. La magnitud de un vector *siempre* es un número positivo.

Figura 3.4 Cuando una partícula se mueve de Ⓐ a Ⓑ, a lo largo de una trayectoria arbitraria representada por la línea punteada, su desplazamiento es una cantidad vectorial mostrada por la flecha trazada de Ⓐ a Ⓑ.

Pregunta rápida 3.1 De las siguientes, ¿cuáles son cantidades vectoriales y cuáles son cantidades escalares? (a) su edad (b) aceleración (c) velocidad (d) rapidez (e) masa.

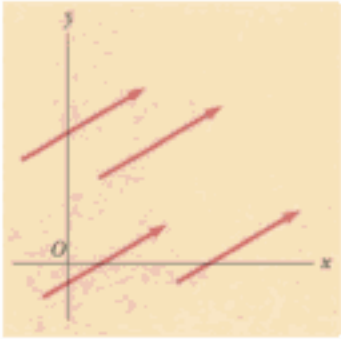


Figura 3.5 Estos cuatro vectores son iguales porque tienen longitudes iguales y apuntan en la misma dirección.

3.3 Algunas propiedades de vectores

Igualdad de dos vectores

Para muchos propósitos, dos vectores **A** y **B** pueden definirse como iguales si tienen la misma magnitud y apuntan en la misma dirección. Esto es, **A** = **B** sólo si $A = B$ y si **A** y **B** apuntan en la misma dirección a lo largo de líneas paralelas. Por ejemplo, todos los vectores de la figura 3.5 son iguales, aun cuando tienen diferentes puntos iniciales. Esta propiedad nos permite en un diagrama mover un vector a una posición paralela a sí mismo sin afectar el vector.

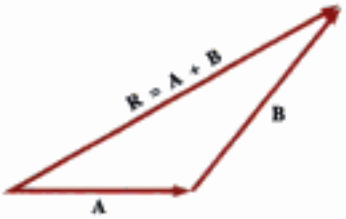


Figura 3.6 Cuando se adiciona un vector **B** a un vector **A**, la resultante **R** es el vector que corre de la cola de **A** a la punta de **B**.

Adición de vectores

Las reglas para adición de vectores se describen en forma conveniente con métodos gráficos. Para adicionar el vector **B** al vector **A**, primero se traza el vector **A** en un papel de gráficas, con su magnitud representada por una escala conveniente de longitud, y luego se traza el vector **B** a la misma escala con su cola iniciando de la punta de **A**, como se muestra en la figura 3.6. El **vector resultante** **R** = **A** + **B** es el vector trazado desde la cola de **A** hasta la punta de **B**.

Por ejemplo, si una persona camina 3.0 metros hacia el este y luego 4.0 metros hacia el norte, como se ve en la figura 3.7, se encontraría a 5.0 metros de donde inició, medido a un ángulo de 53° al norte del este. Su desplazamiento total es el vector adición de los desplazamientos individuales.

También se puede usar una construcción geométrica para adicionar más de dos vectores. Esto se ilustra en la figura 3.8 para el caso de cuatro vectores. El vector resultante **R** = **A** + **B** + **C** + **D** es el vector que completa el polígono. En otras palabras, **R es el vector trazado desde la cola del primer vector hasta la punta del último vector.**

Cuando se adicionan dos vectores, la adición es independiente del orden de la adición. (Esto puede parecer trivial, pero como se verá en el capítulo 11, el orden es importante

¡ADVERTENCIA!

3.1 Adición vectorial contra adición escalar

Recuerde que **A** + **B** = **C** es muy diferente de $A + B = C$. La primera es una adición vectorial, que debemos manejar con cuidado, como es el caso con el método gráfico descrito aquí. La segunda es una simple adición algebraica de números que se maneja con las reglas normales de aritmética.

Materiał chroniony prawem autorskim

Figura 3.7 Adición vectorial. Si camina primero 3.0 metros al este y luego 4.0 metros al norte, lo deja a 5.0 metros de su punto de partida.

cuando se multiplican vectores). Esto puede verse desde la construcción geométrica de la figura 3.9, y se conoce como la **ley conmutativa de la adición:**

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \tag{3.5}$$

Cuando se adicionan tres o más vectores, su adición es independiente de la forma en que los vectores individuales se agrupan juntos. Una prueba geométrica de esta regla para tres vectores se da en la figura 3.10. Esto se llama **ley asociativa de la adición:**

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \tag{3.6}$$

En resumen, **una cantidad vectorial tiene magnitud y dirección, y también obedece las leyes de la adición vectorial** como se ve en las figuras 3.6 a la 3.10. Cuando se adicionan dos o más vectores, todos ellos deben tener las mismas unidades y todos ellos deben ser del mismo tipo de cantidad. No tendría sentido adicionar un vector velocidad (por ejemplo 60 km/h al este) a un vector de desplazamiento (por ejemplo, 200 km al norte), porque representan cantidades físicas diferentes. La misma regla se aplica a escalares. Por ejemplo, sería inconsistente adicionar intervalos (de tiempo) con temperaturas.

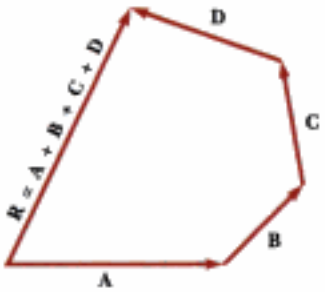


Figura 3.8 Construcción geométrica para adiciónr cuatro vectores. El vector resultante **R** es, por definición, el que completa el polígono.

Negativo de un vector

El negativo del vector **A** se define como el vector que al adicionarse a **A** da cero como la adición vectorial. Esto es, $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0$. Los vectores **A** y **–A** tienen la misma magnitud pero apuntan en direcciones opuestas.

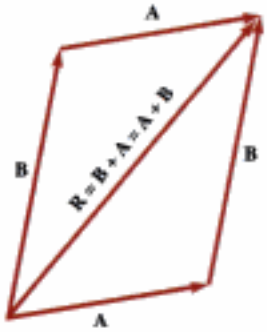


Figura 3.9 Esta construcción muestra que **A** + **B** = **B** + **A**, es decir, que la adición vectorial es conmutativa.

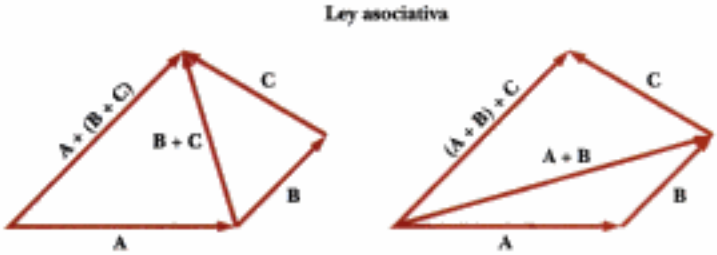


Figura 3.10 Construcciones geométricas para verificar la ley asociativa de la adición.

Materiał chroniony prawem autorskim

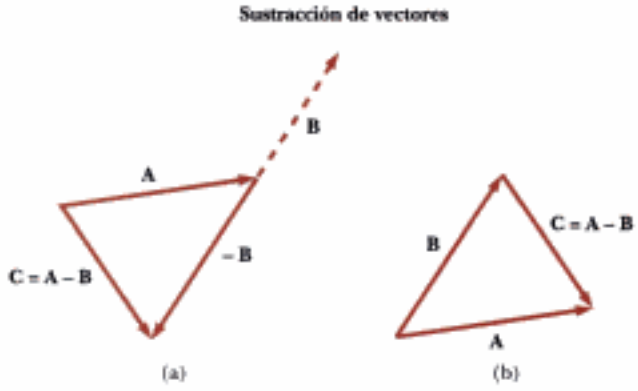


Figura 3.11 (a) Esta construcción muestra la forma de sustraer el vector **B** del vector **A**. El vector $-\mathbf{B}$ es igual en magnitud al vector **B** y apunta en dirección opuesta. Para sustraer **B** de **A**, aplique la regla de la adición vectorial a la combinación de **A** y $-\mathbf{B}$: Trace **A** a lo largo de algún eje conveniente, ponga la cola de $-\mathbf{B}$ en la punta de **A**, y **C** es la diferencia $\mathbf{A} - \mathbf{B}$. (b) Segunda forma de ver una sustracción vectorial. El vector diferencia $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ es el vector que debemos adicionar a **B** para obtener **A**.

Sustracción de vectores

La sustracción de vectores hace uso de la definición del negativo de un vector. Definimos la operación $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ como el vector $-\mathbf{B}$ adicionado al vector **A**:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \tag{3.7}$$

La construcción geométrica para sustraer dos vectores en esta forma está ilustrada en la figura 3.11a.

Otra forma de ver una sustracción vectorial es observar que la diferencia $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ entre dos vectores **A** y **B**. Es lo que debe adicionarse al segundo vector para obtener el primero. En este caso, el vector $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ apunta de la punta del segundo vector a la punta del primero, como se ve en la figura 3.11b.

Pregunta rápida 3.2 Las magnitudes de dos vectores **A** y **B** son $A = 12$ unidades y $B = 8$ unidades. ¿Cuál de los siguientes pares de números representa los posibles valores *máximo* y *mínimo* para la magnitud del vector resultante $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$? (a) 14.4 unidades, 4 unidades (b) 12 unidades, 8 unidades (c) 20 unidades, 4 unidades (d) ninguna de estas respuestas.

Pregunta rápida 3.3 Si el vector **B** se adiciona al vector **A**, ¿bajo qué condiciones el vector resultante $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ tiene magnitud $A + B$? (a) **A** y **B** son paralelos y en la misma dirección. (b) **A** y **B** son paralelos y en direcciones opuestas. (c) **A** y **B** son perpendiculares.

Pregunta rápida 3.4 Si el vector **B** se adiciona al vector **A**, ¿cuáles *dos* de las siguientes opciones deben ser verdaderas para que el vector resultante sea igual a cero? (a) **A** y **B** son paralelos y en la misma dirección. (b) **A** y **B** son paralelos y en direcciones opuestas. (c) **A** y **B** tienen la misma magnitud. (d) **A** y **B** son perpendiculares.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 3.2 Un viaje de vacaciones

Un auto recorre 20.0 kilómetros rumbo al norte y luego 35.0 kilómetros en dirección 60.0° al oeste del norte, como se ve en la figura 3.12a. Hállense la magnitud y dirección del desplazamiento resultante del auto.

Solución Los vectores **A** y **B** trazados en la figura 3.12a ayudan a *conceptualizar* el problema. Podemos *clasificar por categorías* esto como un problema de análisis relativamente sencillo en adición vectorial. El desplazamiento **R** es la resultante cuando se adicionan los dos desplazamientos individuales **A** y **B**. Podemos además clasificar por categorías esto como un problema acerca del análisis de triángulos, de modo que recurrimos a nuestra experiencia en geometría y trigonometría.

En este ejemplo mostramos dos formas para *analizar* el problema al hallar la resultante de dos vectores. La primera forma es resolver el problema geométricamente, con el uso de papel de gráficas y un transportador para medir la magnitud de **R** y su dirección en la figura 3.12a. (De hecho, aun cuando el lector considera que va a realizar un cálculo, debe trazar los vectores para comprobar sus resultados.) Con una regla y transportador comunes y corrientes, un diagrama grande suele dar respuestas a dos dígitos, pero no a la precisión de tres dígitos.

La segunda forma de resolver el problema es analizarlo algebraicamente. La magnitud de **R** se puede obtener de la ley de los cosenos cuando se aplica al triángulo (vea el apéndice B.4). Con $\theta = 180° - 60° = 120°$ y $R^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$, encontramos

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

$$= \sqrt{(20.0\text{ km})^2 + (35.0\text{ km})^2 - 2(20.0\text{ km})(35.0\text{ km})\cos 120°}$$

$$= \mathbf{48.2\text{ km}}$$

La dirección de **R** medida desde la dirección norte puede obtenerse de la ley de los senos (apéndice B.4):

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{B} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{R}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{B}{R}\operatorname{sen}\theta = \frac{35.0\text{ km}}{48.2\text{ km}}\operatorname{sen}120° = 0.629$$

$$\boldsymbol{\beta = 39.0°}$$

El desplazamiento resultante del auto es 48.2 kilómetros en una dirección 39.0° al oeste del norte.

Ahora *finalizamos* el problema. El ángulo θ que calculamos ¿concuerda con la estimación hecha al ver la figura 3.12a o con un ángulo real medido del diagrama usando el método gráfico? ¿Es razonable que la magnitud de **R** sea mayor que la de **A** y **B**? ¿Son correctas las unidades de **R**?

Si bien es cierto que el método gráfico de adicionar vectores funciona bien, sufre de dos desventajas. Primero, hay quienes encuentran que usar las leyes de los cosenos y los senos son engorrosas. En segundo término, un triángulo sólo resulta si se adicionan dos vectores. Si se adicionan tres o más vectores, la forma geométrica resultante no es un triángulo. En la sección 3.4 exploramos un nuevo método de adicionar vectores que resuelve estas dos desventajas.

¿Qué pasaría si? Suponga que el viaje fuera tomado con los dos vectores en orden inverso: 35.0 km a 60.0° al oeste del norte primero, y luego 20.0 km al norte. ¿Cómo cambiarían la magnitud y la dirección del vector resultante?

Respuesta No cambiarían. La ley conmutativa para la adición vectorial nos dice que el orden de vectores en una adición no es relevante. Gráficamente, la figura 3.12 muestra que los vectores adicionados en orden inverso nos da el mismo vector resultante.

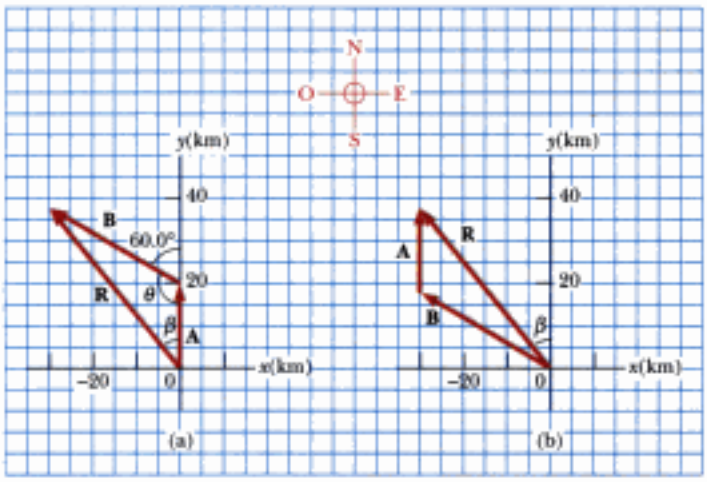


Figura 3.12 (Ejemplo 3.2) (a) Método gráfico para hallar el vector resultante de desplazamiento **R** = **A** + **B**. (b) Adicionar los vectores en orden inverso (**B** + **A**) da el mismo resultado para **R**.

Materiał chroniony prawem autorskim

Multiplicación de un vector por un escalar

Si un vector **A** se multiplica por una cantidad escalar positiva m, entonces el producto $m\mathbf{A}$ es un vector que tiene la misma dirección que **A** y magnitud mA. Si un vector **A** se multiplica por una cantidad escalar negativa $-m$, entonces el producto $-m\mathbf{A}$ es en dirección opuesta a **A**. Por ejemplo, el vector $5\mathbf{A}$ tiene una longitud cinco veces A y apunta en la misma dirección que **A**; el vector $-\frac{1}{3}\mathbf{A}$ tiene un tercio de la longitud de A y apunta en la dirección contraria a **A**.

3.4 Componentes de un vector y unidades vectoriales

El método gráfico para la adición de vectores no es recomendable cuando se necesita una exactitud muy alta en problemas de tres dimensiones. En esta sección se describe un método para la adición de vectores que utiliza la proyección de vectores a lo largo de ejes coordinados. A tales proyecciones se les llama **componentes** de un vector y un vector puede describirse completamente a partir de sus componentes.

Considere un vector **A** que esté en el plano xy y forme un ángulo arbitrario θ con el eje positivo x, como se muestra en la figura 3.13a. Este vector se puede expresar como la adición de otros dos vectores $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$. Con frecuencia vamos a referirnos a "componentes de un vector **A**", escrito A_x y A_y (sin notación en negritas). El componente A_x representa la proyección de A a lo largo del eje x, y la componente A_y representa la proyección de **A** a lo largo del eje y. Estos componentes pueden ser positivos o negativos. El componente A_x es positivo si $\mathbf{A}_x$ apunta en la dirección x positiva y es negativo si $\mathbf{A}_x$ apunta en la dirección x negativa. Lo mismo es cierto para el componente A_y.

De la figura 3.13 y de la definición de seno y coseno, vemos que $\cos\theta = A_x/A$ y que $\operatorname{sen}\theta = A_y/A$. Por lo tanto, los componentes de A son

$$A_x = A\cos\theta \tag{3.8}$$

$$A_y = A\operatorname{sen}\theta \tag{3.9}$$

Estos componentes forman dos lados de un triángulo rectángulo con una hipotenusa de longitud A. Por lo tanto, se deduce que la magnitud y dirección de **A** están relacionadas con sus componentes a través de las expresiones

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{3.10}$$

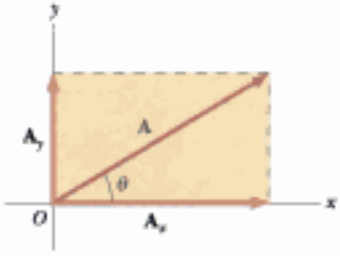
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) \tag{3.11}$$

Nótese que los **signos de los componentes A_x y A_y dependen del ángulo θ.** Por ejemplo, si $\theta = 120°$, entonces A_x es negativo y A_y es positivo. Si $\theta = 225°$, entonces A_x y A_y son negativos. La figura 3.14 resume los signos de los componentes cuando **A** se encuentra en los diferentes cuadrantes.

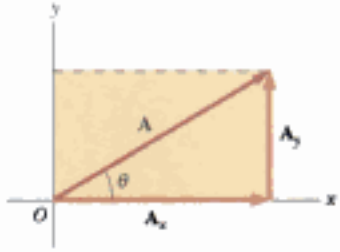
Cuando resuelva problemas, el lector puede especificar un vector **A** ya sea con sus componentes A_x y A_y o con su magnitud y dirección A y θ.

Pregunta rápida 3.5 Elija la respuesta correcta para que la oración sea verdadera: Un componente de un vector es (a) siempre, (b) nunca, o (c) a veces mayor que la magnitud del vector.

Suponga que se trabaja en un problema de física que requiere descomponer un vector en sus componentes. En numerosas aplicaciones es conveniente expresar los componentes de un sistema de coordenadas que tiene ejes que no son horizontal y vertical, pero que son perpendiculares entre sí. Si se seleccionan ejes de referencia o un ángulo que no sean los ejes y el ángulo que se muestra en la figura 3.13, los componentes deben modificarse según esas diferencias. Suponga que un vector **B** forma un ángulo θ' con el eje x' definido en la fi-



(a)



(b)

Figura 3.13 (a) Un vector **A** que se encuentre en el plano xy puede ser representado por sus vectores componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$. (b) El vector componente $\mathbf{A}_y$ de las y puede moverse a la derecha para que se adicione a $\mathbf{A}_x$. La adición vectorial de los vectores componentes es **A**. Estos tres vectores forman un triángulo rectángulo.

Componentes de el vector A

¡ADVERTENCIA!

3.2 Vectores componentes contra componentes

Los vectores $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ son los *vectores componentes* de **A**. Éstos no deben confundirse con los escalares A_x y A_y, a los que siempre vamos a denominar *componentes* de **A**.

y	
A_x negativo A_y positivo	A_x positivo A_y positivo
A_x negativo A_y negativo	A_x positivo A_y negativo

x

Figura 3.14 Los signos de las componentes de un vector **A** dependen del cuadrante en el que se encuentre el vector.

Materiał chroniony prawem autorskim

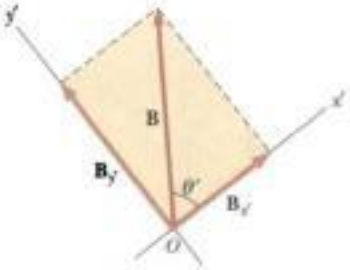
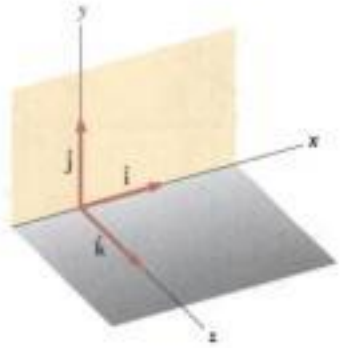
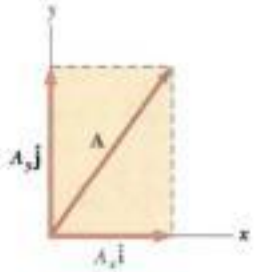


Figura 3.15 Vectores componentes de **B** en un sistema de coordenadas que está rotado.



(a)



(b)

Figura activa 3.16 (a) Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$ están dirigidos a lo largo de los ejes x, y, y z, respectivamente. (b) El vector $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$ que está en el plano xy tiene componentes A_x y A_y.

En el vínculo* Active Figures *en* http://www.pse6.com, *usted puede hacer girar los ejes de coordenadas en un espacio tridimensional y ver una representación del vector A en tres dimensiones.

gura 3.15. Los componentes de **B** a lo largo de los ejes x' y y' son $B_{x'} = B\cos\theta'$ y $B_{y'} = B$ sen θ', especificados por las ecuaciones 3.8 y 3.9. La magnitud y dirección de **B** se obtienen de las expresiones equivalentes a las ecuaciones 3.10 y 3.11. Por lo tanto, podemos expresar los componentes de un vector en cualquier sistema de coordenadas que sea conveniente para una situación en particular.

Vectores unitarios

Con frecuencia las cantidades vectoriales se expresan en términos de vectores unitarios. **Un vector unitario es un vector sin dimensiones que tiene una magnitud de exactamente 1.** Los vectores unitarios se utilizan para especificar una dirección dada y no tienen otra importancia física. Se usan sólo como conveniencia al describir una dirección en el espacio. Usaremos los símbolos $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$ para representar vectores unitarios que apuntan en las direcciones positivas x, y, y z, respectivamente. (Los "sombreros" sobre los símbolos son una notación estándar para vectores unitarios). Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$ forman un conjunto de vectores mutuamente perpendiculares de un sistema de coordenadas de mano derecha, como se muestra en la figura 3.16a. La magnitud de cada vector unitario es igual a 1, es decir, $|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1$.

Considere un vector **A** que se encuentra en el plano xy, como se muestra en la figura 3.16b. El producto del componente A_x y el vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$ es el vector $A_x\hat{\mathbf{i}}$, que se encuentra sobre el eje x y tiene magnitud $|A_x|$. (El vector $A_x\hat{\mathbf{i}}$ es una representación alterna del vector $\mathbf{A}_x$.) De la misma manera, $A_y\hat{\mathbf{j}}$ es un vector de magnitud $|A_y|$ que se encuentra sobre el eje y. (De nuevo, el vector $A_y\hat{\mathbf{j}}$ es una representación alterna del vector $\mathbf{A}_y$.) En consecuencia, la notación de vectores unitarios para el vector **A** es

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} \tag{3.12}$$

Por ejemplo, considere un punto situado en el plano xy y que tiene coordenadas cartesianas (x, y), como en la figura 3.17. El punto puede ser especificado por el vector de posición $\mathbf{r}$, que en forma de vectores unitarios está dado por

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} \tag{3.13}$$

Esta notación nos dice que las componentes de **r** son las longitudes x e y.

Ahora veamos cómo usar componentes para adicionar vectores cuando el método gráfico no es suficientemente preciso. Suponga que deseamos adicionar el vector **B** al vector **A** en la ecuación 3.12, donde el vector **B** tiene componentes B_x y B_y. Todo lo que hacemos es adicionar los componentes x e y por separado. El vector resultante $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ es, por lo tanto,

$$\mathbf{R} = (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}) + (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}})$$

o

$$\mathbf{R} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} \tag{3.14}$$

Dado que $\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$, vemos que los componentes del vector resultante son

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x \\ R_y &= A_y + B_y \end{aligned} \tag{3.15}$$

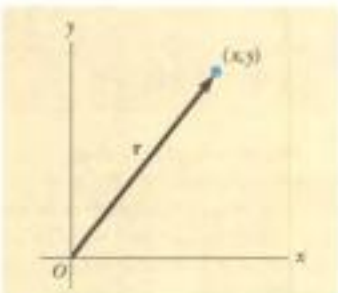


Figura 3.17 El punto cuyas coordenadas cartesianas son (x, y) puede ser representado por el vector de posición $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$.

Materiał chroniony prawem autorskim

Obtenemos la magnitud de **R** y el ángulo que forma con el eje x a partir de sus componentes, usando las relaciones

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2} \tag{3.16}$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x} \tag{3.17}$$

Podemos verificar esta adición por componentes con una construcción geométrica, como se ve en la figura 3.18. Recuerde que debe tomar nota de los signos de los componentes cuando use el método algebraico o el gráfico.

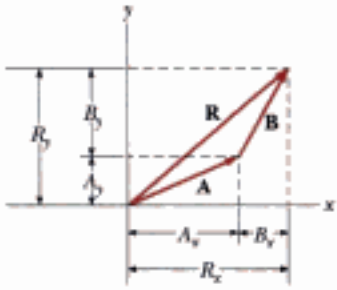


Figura 3.18 Esta construcción geométrica, para la adición de dos vectores, muestra la relación entre los componentes de la resultante **R** y los componentes de los vectores individuales.

A veces necesitamos considerar situaciones que comprenden el movimiento en tres direcciones componentes. La extensión de nuestros métodos a vectores tridimensionales es sencilla. Si **A** y **B** tienen componentes x, y, y z, los expresamos en la forma

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \tag{3.18}$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}} \tag{3.19}$$

La suma de **A** y **B** es

$$\mathbf{R} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{k}} \tag{3.20}$$

Nótese que la ecuación 3.20 difiere de la ecuación 3.14: en la ecuación 3.20, el vector resultante también tiene un componente z, $R_z = A_z + B_z$. Si un vector **R** tiene componentes x, y, y z, la magnitud del vector es $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$. El ángulo θ_x que **R** forma con el eje x se encuentra de la expresión $\cos\theta_x = R_x/R$, con expresiones similares para los ángulos con respecto a los ejes y y z.

Pregunta rápida 3.6 Si al menos un componente de un vector es un número positivo, el vector no puede (a) tener ningún componente que sea negativo (b) ser cero (c) tener tres dimensiones.

Pregunta rápida 3.7 Si $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 0$, los correspondientes componentes de los dos vectores **A** y **B** deben ser (a) iguales (b) positivos (c) negativos (d) de signo contrario.

Pregunta rápida 3.8 ¿Para cuál de los siguientes vectores es la magnitud del vector igual a uno de los componentes del vector? (a) $\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}$ (b) $\mathbf{B} = -3\hat{\mathbf{j}}$ (c) $\mathbf{C} = +5\hat{\mathbf{k}}$.

SUGERENCIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Adición de vectores

Cuando necesite adicionar dos o más vectores, use este procedimiento paso a paso:

- Seleccione un sistema de coordenadas conveniente. (Trate de reducir el número de componentes que necesite calcular, mediante la selección de ejes para alinear tantos vectores como sea posible).
- Trace un bosquejo con leyendas de los vectores descritos en el problema.
- Encuentre los componentes x e y de todos los vectores y los componentes resultantes (la adición algebraica de los componentes) en las direcciones x e y.
- Si es necesario, use el teorema de Pitágoras para hallar la magnitud del vector resultante y seleccione una función trigonométrica apropiada para hallar el ángulo que el vector resultante forme con el eje x.

¡ADVERTENCIA!

3.3 Componentes *x* e *y*

Las ecuaciones 3.8 y 3.9 asocian el coseno del ángulo con el componente x y el seno del ángulo con el componente y. Esto es verdadero *sólo* porque medimos el ángulo θ con respecto al eje x, de modo que no se aprenda de memoria estas ecuaciones. Si θ se mide con respecto al eje y (como en algunos problemas), estas ecuaciones serán incorrectas. Piense en cuál lado del triángulo que contiene los componentes es adyacente al ángulo y cuál lado es opuesto, y asigne el coseno y seno de acuerdo con esto.

¡ADVERTENCIA!

3.4 Tangentes y calculadoras

Generalmente, la función inversa de tangente en calculadoras da un ángulo entre −90° y +90°. En consecuencia, si el vector que el lector estudie se encuentra en el segundo o tercer cuadrante, el ángulo medido desde el eje positivo x será el ángulo que ejecute su calculadora más 180°.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 3.3 La adición de dos vectores

Encuentre la suma de dos vectores **A** y **B** que se encuentran en el plano xy y están dados por

$$\mathbf{A} = (2.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})\ \text{m} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = (2.0\hat{\mathbf{i}} - 4.0\hat{\mathbf{j}})\ \text{m}$$

Solución Se pueden trazar los vectores para conceptualizar la situación. Este problema se puede clasificar por categoría como problema de sustitución. La comparación de esta expresión para **A** con la expresión general $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$, vemos que $A_x = 2.0$ m y $A_y = 2.0$ m. De igual modo, $B_x = 2.0$ m y $B_y = -4.0$ m. Obtenemos el vector resultante R usando la ecuación 3.14:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (2.0 + 2.0)\hat{\mathbf{i}}\ \text{m} + (2.0 - 4.0)\hat{\mathbf{j}}\ \text{m}$$
$$= (4.0\hat{\mathbf{i}} - 2.0\hat{\mathbf{j}})\ \text{m}$$

o

$$R_x = 4.0\ \text{m} \qquad R_y = -2.0\ \text{m}$$

La magnitud de **R** se encuentra con la ecuación 3.16:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(4.0\ \text{m})^2 + (-2.0\ \text{m})^2} = \sqrt{20}\ \text{m}$$
$$= \mathbf{4.5\ m}$$

Podemos hallar la dirección de **R** de la ecuación 3.17:

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-2.0\ \text{m}}{4.0\ \text{m}} = -0.50$$

Una calculadora pueda dar la respuesta $-27°$ para $\theta = \tan^{-1}(-0.50)$. Esta respuesta es correcta si la interpretamos como 27° en el sentido dextrógiro desde el eje x. Nuestra forma estándar ha sido citar los ángulos medidos en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj desde el eje $+x$, y este ángulo para este vector es $\boldsymbol{\theta = 333°}$.

Ejemplo 3.4 El desplazamiento resultante

Una partícula experimenta tres desplazamientos consecutivos: $\mathbf{d}_1 = (15\hat{\mathbf{i}} + 30\hat{\mathbf{j}} + 12\hat{\mathbf{k}})$ cm, $\mathbf{d}_2 = (23\hat{\mathbf{i}} - 14\hat{\mathbf{j}} - 5.0\hat{\mathbf{k}})$ cm y $\mathbf{d}_3 = (-13\hat{\mathbf{i}} + 15\hat{\mathbf{j}})$ cm. Encuentre los componentes del desplazamiento resultante y su magnitud.

Solución Los desplazamientos tridimensionales son más difíciles de imaginar que los de dos dimensiones, porque estos últimos se pueden trazar en un papel. Para este problema, conceptualizaremos que el lector empieza con su lápiz en el origen de una hoja de papel de gráficas sobre la que ha trazado ejes x e y. Mueva su lápiz 15 centímetros a la derecha a lo largo del eje x, luego 30 centímetros hacia arriba a lo largo del eje y, y luego 12 centímetros *verticalmente alejándose* del papel de gráficas. Esto da el desplazamiento descrito por $\mathbf{d}_1$. De este punto, mueva su lápiz 23 centímetros a la derecha paralelamente al eje x, 14 centímetros paralelo al papel de gráficas en la dirección $-y$, y luego 5.0 centímetros verticalmente hacia abajo hacia el papel de gráficas. Está usted ahora en el desplazamiento desde el origen descrito por $\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2$. Desde este punto, mueva su lápiz 13 centímetros a la izquierda en la dirección $-x$, y (¡finalmente!) 15 centímetros paralelo al papel de gráficas a lo largo del eje y. Su posición final está en un desplazamiento $\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3$ desde el origen.

A pesar de la dificultad de conceptualizar en tres dimensiones, podemos *clasificar por categoría* este problema como un problema de sustitución, debido a los cuidadosos métodos de contabilidad que hemos creado para vectores. La manipulación matemática da seguimiento de este movimiento a lo largo de los tres ejes perpendiculares en una forma organizada y compacta:

$$\mathbf{R} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3$$
$$= (15 + 23 - 13)\hat{\mathbf{i}}\ \text{cm} + (30 - 14 + 15)\hat{\mathbf{j}}\ \text{cm} + (12 - 5.0 + 0)\hat{\mathbf{k}}\ \text{cm}$$
$$= (25\hat{\mathbf{i}} + 31\hat{\mathbf{j}} + 7.0\hat{\mathbf{k}})\ \text{cm}$$

El desplazamiento resultante tiene componentes $R_x = 25$ cm, $R_y = 31$ cm, and $R_z = 7.0$ cm. Su magnitud es

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$
$$= \sqrt{(25\ \text{cm})^2 + (31\ \text{cm})^2 + (7.0\ \text{cm})^2} = \mathbf{40\ cm}$$

Ejemplo 3.5 De paseo

Una excursionista inicia un viaje al caminar primero 25.0 kilómetros al sureste desde su auto. Se detiene y arma su tienda de campaña para pasar la noche. Al segundo día, camina 40.0 kilómetros en una dirección 60.0° al norte del este, en cuyo punto descubre una torre de guardabosque.

(A) Determine las componentes del desplazamiento de la excursionista para cada día.

Solución *Conceptualizamos* el problema al trazar un dibujo como el de la figura 3.19. Si denotamos los vectores de desplazamiento en los días primero y segundo por **A** y **B**, respectivamente, y usamos el auto como el origen de coordenadas, obte- nemos los vectores que se muestran en la figura 3.19. Al trazar la resultante **R**, podemos ahora *clasificar por categoría* este problema como uno que ya resolvimos antes: una adición de dos vectores. Esto debe dar una sugerencia del poder de clasificar por categoría; muchos nuevos problemas son muy semejantes a problemas que ya hemos resuelto si tenemos el cuidado de clasificarlos por categoría.

Analizaremos este problema al usar nuestro conocimiento de componentes vectoriales. El desplazamiento **A** tiene una magnitud de 25.0 kilómetros y está dirigido 45.0° abajo del eje x positivo. De las ecuaciones 3.8 y 3.9, sus componentes son

$$A_x = A\cos(-45.0°) = (25.0\ \text{km})(0.707) = \mathbf{17.7\ km}$$

$$A_y = A\,\text{sen}(-45.0°) = (25.0\ \text{km})(-0.707) = \mathbf{-17.7\ km}$$

El valor negativo de A_y indica que la excursionista camina en la dirección y negativa el primer día. Los signos de A_x y A_y también son evidentes de la figura 3.19.

El segundo desplazamiento **B** tiene una magnitud de 40.0 km y es 60.0° al norte del este. Sus componentes son

Materiał chroniony prawem autorskim

$$B_x = B\cos 60.0° = (40.0\text{ km})(0.500) = \mathbf{20.0\text{ km}}$$

$$B_y = B\,\text{sen}\,60.0° = (40.0\text{ km})(0.866) = \mathbf{34.6\text{ km}}$$

(B) Determine las componentes del desplazamiento resultante **R** de la excursionista para el viaje. Encuentre una expresión para **R** en términos de unidades vectoriales.

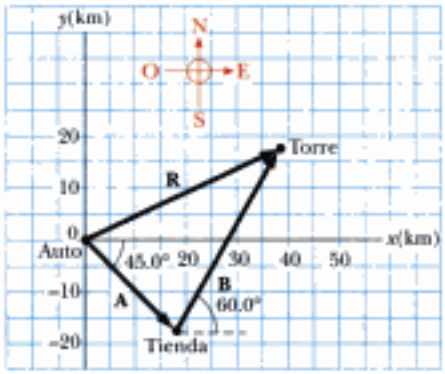


Figura 3.19 (Ejemplo 3.5) El desplazamiento total de la excursionista es el vector $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Solución El desplazamiento resultante para el viaje $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ tiene componentes dados por la ecuación 3.15:

$$R_x = A_x + B_x = 17.7\text{ km} + 20.0\text{ km} = \mathbf{37.7\text{ km}}$$

$$R_y = A_y + B_y = -17.7\text{ km} + 34.6\text{ km} = \mathbf{16.9\text{ km}}$$

En forma de vectores unitarios, podemos escribir el desplazamiento total como

$$\mathbf{R} = (\mathbf{37.7\hat{i} + 16.9\hat{j}})\text{ km}$$

Con las ecuaciones 3.16 y 3.17 encontramos que el vector **R** tiene una magnitud de 41.3 km y está dirigido 24.1° al norte del este.

Finalicemos. Las unidades de **R** son km, que es razonable para un desplazamiento. Si vemos la representación gráfica de la figura 3.19, estimamos que la posición final de la excursionista es de unos (38 km, 17 km), que es consistente con los componentes de **R** en nuestro resultado final. También, ambos componentes de **R** son positivos, poniendo la posición final en el primer cuadrante del sistema de coordenadas, que también es consistente con la figura 3.19.

Ejemplo 3.6 ¡Volemos!

Un avión para viajeros frecuentes toma la ruta que se muestra en la figura 3.20. Primero vuela desde el origen del sistema de coordenadas a la ciudad A, situada 175 km en una dirección 30.0° al norte del este. A continuación, vuela 153 km 20.0° al oeste del norte a la ciudad B. Finalmente, vuela 195 km al oeste a la ciudad C. Encuentre la ubicación de la ciudad C con respecto al punto de partida.

Solución Una vez más, un dibujo como el de la figura 3.20 nos permite *conceptualizar* el problema. Es conveniente escoger el sistema de coordenadas mostrado en la figura 3.20, donde el eje x apunta al este y el eje y apunta al norte. Denotemos los tres desplazamientos consecutivos por los vectores **a**, **b** y **c**.

Ahora podemos *clasificar por categoría* este problema como similar al ejemplo 3.5 que ya hemos resuelto. Hay dos diferencias principales. Primero, estamos adicionando tres vectores en lugar de dos. En segundo término, el ejemplo 3.5 nos guió al pedir primero los componentes en la parte (A). El presente ejemplo no tiene mucha guía y simplemente pide un resultado. Necesitamos *analizar* la situación y escoger una trayectoria. Seguiremos el mismo patrón que seguimos en el ejemplo 3.5, comenzando por hallar los componentes de los tres vectores **a**, **b** y **c**. El desplazamiento **a** tiene una magnitud de 175 km y los componentes

$$a_x = a\cos(30.0°) = (175\text{ km})(0.866) = 152\text{ km}$$

$$a_y = a\,\text{sen}(30.0°) = (175\text{ km})(0.500) = 87.5\text{ km}$$

El desplazamiento **b**, cuya magnitud es 153 km, tiene los componentes

$$b_x = b\cos(110°) = (153\text{ km})(-0.342) = -52.3\text{ km}$$

$$b_y = b\,\text{sen}(110°) = (153\text{ km})(0.940) = 144\text{ km}$$

Finalmente, el desplazamiento **c**, cuya magnitud es 195 km, tiene los componentes

$$c_x = c\cos(180°) = (195\text{ km})(-1) = -195\text{ km}$$

$$c_y = c\,\text{sen}(180°) = 0$$

Por lo tanto, los componentes del vector de posición **R** desde el punto de partida a la ciudad C son

$$R_x = a_x + b_x + c_x = 152\text{ km} - 52.3\text{ km} - 195\text{ km}$$

$$= \mathbf{-95.3\text{ km}}$$

$$R_y = a_y + b_y + c_y = 87.5\text{ km} + 144\text{ km} + 0 = \mathbf{232\text{ km}}$$

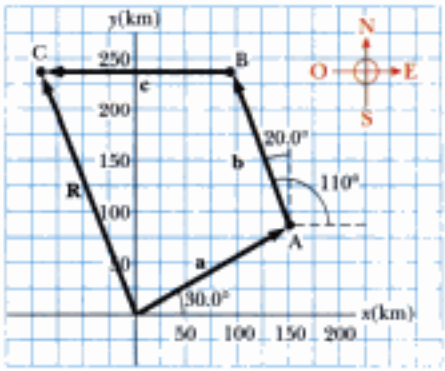


Figura 3.20 (Ejemplo 3.6) El avión sale del origen, vuela primero a la ciudad A, luego a la ciudad B y finalmente a la ciudad C.

Materiał chroniony prawem autorskim

En notación de vectores unitarios, $\mathbf{R} = (-95.3\hat{\mathbf{i}} + 232\hat{\mathbf{j}})$ km.

Con el uso de las ecuaciones 3.16 y 3.17 encontramos que el vector R tiene una magnitud de 251 km y está dirigido 22.3° al oeste del norte.

Para *finalizar* el problema, nótese que el avión puede llegar a la ciudad C desde el punto de partida al recorrer primero 95.3 km al oeste y luego recorrer 232 km al norte. O bien, podría seguir una trayectoria recta al punto C al volar una distancia $R = 251$ km en una dirección 22.3° al oeste del norte.

¿Qué pasaría si? Después de aterrizar en la ciudad C, el piloto desea regresar al origen a lo largo de una recta. ¿Cuáles son los componentes del vector que representa este desplazamiento? ¿Cuál debería ser el rumbo del avión?

Respuesta El vector deseado **H** es simplemente el negativo del vector **R**:

$$\mathbf{H} = -\mathbf{R} = (+95.3\hat{\mathbf{i}} - 232\hat{\mathbf{j}}) \text{ km}$$

El rumbo se encuentra al calcular el ángulo que el vector hace con el eje x:

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-232 \text{ m}}{95.3 \text{ m}} = -2.43$$

Esto da un ángulo de rumbo de $\theta = -67.7°$, o 67.7° al sur del este.

RESUMEN

Las **cantidades escalares** son aquellas que tienen sólo un valor numérico y no tienen dirección asociada. Las **cantidades vectoriales** tienen magnitud y dirección y obedecen las leyes de la adición vectorial. La magnitud de un vector es *siempre* un número positivo.

Cuando se adicionan dos o más vectores, todos ellos deben tener las mismas unidades y todos deben ser el mismo tipo de cantidad. Podemos adicionar dos vectores **A** y **B** gráficamente. En este método (figura 3.6), el vector resultante $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ corre de la cola de **A** a la punta de **B**.

Un segundo método de adicionar vectores incluye **componentes** de vectores. El componente A_x en las x del vector **A** es igual a la proyección de **A** a lo largo del eje x de un sistema de coordenadas, como se muestra en la figura 3.13, donde $A_x = A\cos\theta$. El componente A_y en las y del vector **A** es la proyección de **A** a lo largo del eje y, donde $A_y = A \operatorname{sen}\theta$. Debe el lector asegurarse de poder determinar cuáles funciones trigonométricas debe usar en todas las situaciones, en especial cuando θ se define como alguna cosa diferente al ángulo en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj desde el eje x positivo.

Si un vector **A** tiene un componente A_x en las x y un componente A_y en las y, el vector puede ser expresado en forma de vectores unitarios como $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$. En esta notación, $\hat{\mathbf{i}}$ es un vector unitario que apunta en la dirección x positiva, y $\hat{\mathbf{j}}$ es un vector unitario que apunta en la dirección y positiva. Como $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ son vectores unitarios, $|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = 1$.

Podemos hallar la resultante de dos o más vectores al resolver todos los vectores en sus componentes x e y, adicionando sus componentes resultantes x e y, y luego usar el teorema de Pitágoras para hallar la magnitud del vector resultante. Con el uso de una función trigonométrica apropiada, podemos hallar el ángulo que el vector resultante forma con respecto al eje x.

PREGUNTAS

1. Dos vectores tienen magnitudes iguales. ¿Puede su suma ser cero? Explique.
2. ¿Puede la magnitud del desplazamiento de una partícula ser mayor que la distancia recorrida? Explique.
3. Las magnitudes de dos vectores **A** y **B** son $A = 5$ unidades y $B = 2$ unidades. Encuentre los valores máximo y mínimo posibles para la magnitud del vector resultante $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.
4. ¿Cuáles de los siguientes son vectores y cuáles no lo son: fuerza, temperatura, el volumen de agua en una lata, el porcentaje de auditorio de un programa de TV, la altura de un edificio, la velocidad de un auto deportivo, la edad del universo?
5. Un vector **A** está en el plano xy. ¿Para qué orientaciones de **A** serán negativos sus dos componentes? ¿Para qué orientaciones tendrán signos opuestos sus componentes?

Materiał chroniony prawem autorskim

6. Un libro se mueve una vez alrededor del perímetro de una mesa con las dimensiones 1.0 m × 2.0 m. Si el libro termina en su posición inicial, ¿cuál es su desplazamiento? ¿Cuál es la distancia recorrida?

7. En un viaje a lo largo de una carretera interestatal recta, usted observa que el marcador de millas indica 260. Continúa el viaje hasta que el marcador llega a 150 y luego vuelve sobre sus pasos en la carretera hasta que el marcador indica 175. ¿Cuál es la magnitud de su desplazamiento resultante desde que el marcador indicaba 260?

8. Si el componente del vector **A** a lo largo de la dirección del vector **B** es cero, ¿qué se puede concluir acerca de los dos vectores?

9. ¿Puede la magnitud de un vector tener un valor negativo? Explique.

10. ¿Bajo qué circunstancias un vector diferente de cero, que está en el plano xy, tendría componentes de igual magnitud?

11. Si **A** = **B**, ¿qué se puede concluir acerca de los componentes de **A** y **B**?

12. ¿Es posible adicionar una cantidad vectorial a una cantidad escalar? Explique.

13. La resolución de vectores en componentes es equivalente a sustituir el vector original con la adición de dos vectores, cuya adición es la misma que el vector original. Hay un número infinito de pares de vectores que satisfacen esta condición; escogemos el par con un vector paralelo al eje x y el segundo paralelo al eje y. ¿Qué dificultad se introduciría al definir componentes relativos a los ejes que no son perpendiculares, por ejemplo, el eje x y un eje y orientado 45° respecto al eje x?

14. ¿En qué circunstancias está el componente x de un vector dado por la magnitud del vector por el seno de su ángulo de dirección?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, difícil = solución guiada con sugerencias disponibles en http://www.pse6.com

= use computadora para resolver el problema = problemas numéricos y simbólicos por pares

Sección 3.1 Sistemas de coordenadas

1. Las coordenadas polares de un punto son $r = 5.50$ m y $\theta = 240°$. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas de este punto?

2. Dos puntos en un plano tienen coordenadas polares (2.50 m, 30.0°) y (3.80 m, 120.0°). Determine (a) las coordenadas cartesianas de estos puntos y (b) la distancia entre ellos.

3. Una mosca se para en la pared de un cuarto. La esquina inferior izquierda de la pared se selecciona como el origen de un sistema de coordenadas cartesianas en dos dimensiones. Si la mosca está parada en el punto que tiene coordenadas (2.00, 1.00) m, (a) ¿qué tan lejos está de la esquina del cuarto? (b) ¿Cuál es su posición en coordenadas polares?

4. Dos puntos en el plano xy tienen coordenadas cartesianas (2.00, −4.00) m y (−3.00, 3.00) m. Determine (a) la distancia entre estos puntos y (b) sus coordenadas polares.

5. Si las coordenadas rectangulares de un punto están dadas por $(2, y)$ y sus coordenadas polares son $(r, 30°)$, determine y y r.

6. Si las coordenadas polares del punto (x, y) son (r, θ), determine las coordenadas polares para los puntos: (a) $(-x, y)$, (b) $(-2x, -2y)$, y (c) $(3x, -3y)$.

Sección 3.2 Cantidades vectoriales y escalares

Sección 3.3 Algunas propiedades de vectores

7. Una topógrafa mide el ancho de un río recto con el siguiente método: de pie directamente frente a un árbol que está en la margen opuesta, ella camina 100 m a lo largo de la rivera del río para establecer una línea de base; se detiene y mira el árbol. El ángulo desde su línea de base al árbol es 35.0°. ¿Cuál es el ancho del río?

8. Un peatón camina 6.00 km al este y luego 13.0 km al norte. Encuentre la magnitud y dirección del vector de desplazamiento resultante con el método gráfico.

9. Un avión vuela desde el campamento base al lago A, que está a 280 km de distancia, en una dirección de 20.0° al norte del este. Después de dejar caer provisiones vuela al lago B, que está 190 km a 30.0° al oeste del norte del largo A. Gráficamente determine la distancia y dirección del lago B al campamento base.

10. El vector **A** tiene una magnitud de 8.00 unidades y forma un ángulo de 45.0° con el eje x positivo. El vector **B** también tiene una magnitud de 8.00 unidades y está dirigido a lo largo del eje x negativo. Con métodos gráficos, encuentre (a) el vector adición **A** + **B** y (b) el vector diferencia **A** − **B**.

11. Un patinador se desliza a lo largo de una trayectoria circular de radio 5.00 m. Si avanza por inercia alrededor de la mitad del círculo, encuentre (a) la magnitud del vector de desplazamiento y (b) la distancia que patinó. (c) ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento si él patina alrededor de todo el círculo?

12. Una fuerza $\mathbf{F}_1$ de magnitud 6.00 unidades actúa en el origen en una dirección 30.0° arriba del eje x positivo. Una segunda fuerza $\mathbf{F}_2$ de magnitud 5.00 unidades actúa en el origen en la dirección del eje y positivo. Encuentre gráficamente la magnitud y dirección de la fuerza resultante $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$.

13. Arbitrariamente defina la "estatura vectorial instantánea" de una persona como el vector de desplazamiento desde el punto situado a la mitad entre sus pies y la parte superior de su cabeza. Ha-

Materiał chroniony prawem autorskim

ga una estimación de orden de magnitud de la estatura vectorial total de todas las personas de una población citadina de 100 000 (a) a las 10 de la mañana de un jueves, y (b) a las 5 de la mañana de un sábado. Explique su razonamiento.

14. Un perro que busca un hueso camina 3.50 m al sur, luego corre 8.20 m a un ángulo de 30.0° al norte del este, y finalmente camina 15.0 m al oeste. Con técnicas gráficas, encuentre el vector de desplazamiento resultante del perro.

15. Cada uno de los vectores de desplazamiento **A** y **B** mostrados en la figura P3.15 tiene una magnitud de 3.00 m. Gráficamente encuentre (a) **A** + **B**, (b) **A** − **B**, (c) **B** − **A**, (d) **A** − 2**B**. Reporte todos los ángulos en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj desde el eje *x* positivo.

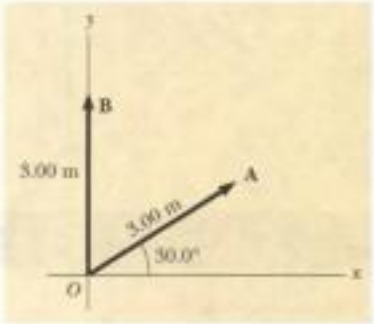


Figura P3.15 Problemas 15 y 37.

16. Tres desplazamientos son **A** = 200 m hacia el sur; **B** = 250 m hacia el oeste; **C** = 150 m, 30.0° al este del norte. Construya un diagrama por separado para cada una de las siguientes formas de adicionar estos vectores **R**$_1$ = **A** + **B** + **C**; **R**$_2$ = **B** + **C** + **A**; **R**$_3$ = **C** + **B** + **A**.

17. El carro de una montaña rusa se mueve 200 ft horizontalmente, y luego sube 135 ft a un ángulo de 30.0° sobre la horizontal. Luego se desplaza 135 ft a un ángulo de 40.0° hacia abajo. ¿Cuál es el desplazamiento desde su punto de partida? Utilice técnicas gráficas.

Sección 3.4 Componentes de un vector y unidades vectoriales

18. Encuentre los componentes horizontal y vertical del desplazamiento de 100 m de un superhéroe que vuela desde lo alto de un edificio siguiendo la trayectoria que se ilustra en la figura P3.18.

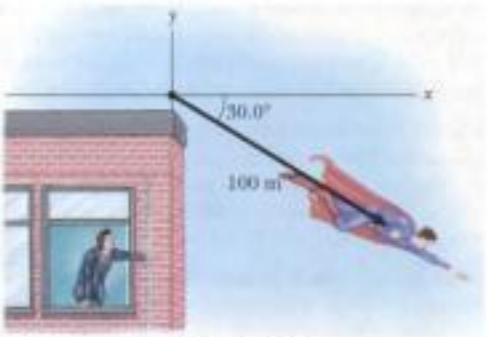


Figura P3.18

19. Un vector tiene un componente *x* de −25.0 unidades y un componente *y* de 40.0 unidades. Hállense la magnitud y dirección de este vector.

20. Una persona camina 25.0° al norte del este una distancia de 3.10 km. ¿Qué distancia tendría que caminar hacia el norte y al este para llegar al mismo lugar?

21. Obtenga expresiones en forma de componentes para los vectores de posición que tienen las siguientes coordenadas polares: (a) 12.8 m, 150° (b) 3.30 cm, 60.0° (c) 22.0 in., 215°.

22. Un vector de desplazamiento que se encuentra en el plano *xy* tiene una magnitud de 50.0 m y está dirigido a un ángulo de 120° con el eje positivo de las *x*. ¿Cuáles son los componentes rectangulares de este vector?

23. Una muchacha que reparte periódicos cubre su ruta al caminar 3.00 manzanas al oeste, 4.00 manzanas al norte y luego 6.00 manzanas al este. (a) ¿Cuál es su desplazamiento resultante? (b) ¿Cuál es la distancia total que recorre?

24. En 1992, Akira Matsushima, de Japón, cruzó Estados Unidos en un monociclo (bicicleta de una sola rueda), recorriendo unos 4 800 km en seis semanas. Suponga que, durante ese viaje, sin desviarse tuvo que cruzar una ciudad con numerosas calles de un solo sentido de circulación. En el centro de la ciudad, Matsushima tuvo que viajar en secuencia 280 m al norte, 220 m al este, 360 m al norte, 300 m al oeste, 120 m al sur, 60.0 m al este, 40.0 m al sur, 90.0 m al oeste (camino en construcción) y luego 70.0 m al norte. En ese punto, se detuvo para descansar. Mientras, un cuervo curioso decidió volar la distancia desde el punto de partida al de descanso directamente ("como vuela un cuervo"). Al cuervo le tomó 40.0 s recorrer esa distancia. Suponiendo que la velocidad del cuervo era constante, encuentre su magnitud y dirección.

25. Cuando exploraba una cueva, una espeleóloga inicia en la entrada y recorre las siguientes distancias. Avanza 75.0 m al norte, 250 m al este, 125 m a un ángulo de 30.0° al norte del este y 150 m al sur. Encuentre el desplazamiento resultante desde la entrada de la cueva.

26. Un mapa sugiere que Atlanta está a 730 millas en una dirección de 5.00° al norte del este desde Dallas. El mismo mapa muestra que Chicago está 560 millas en una dirección de 21.0° al oeste del norte de Atlanta. Modelando nuestro planeta como plano, use esta información para hallar el desplazamiento de Dallas a Chicago.

27. Dados los vectores **A** = 2.00$\hat{i}$ + 6.00$\hat{j}$ y **B** = 3.00$\hat{i}$ − 2.00$\hat{j}$, (a) trace el vector adición **C** = **A** + **B** y el vector diferencia **D** = **A** − **B**. (b) Calcule **C** y **D**, primero en términos de vectores unitarios y luego en términos de coordenadas polares, con ángulos medidos con respecto al eje + *x*.

28. Encuentre la magnitud y dirección de la resultante de tres desplazamientos que tienen componentes rectangulares (3.00, 2.00) m, (−5.00, 3.00) m, y (6.00, 1.00) m.

29. Un hombre que empuja un trapeador por un piso hace que aquél experimente dos desplazamientos. El primero tiene una magnitud de 150 cm y forma un ángulo de 120° con el eje *x* positivo. El desplazamiento resultante tiene una magnitud de 140 cm y está dirigido a un ángulo de 35.0° respecto al eje *x* positivo. Encuentre la magnitud y dirección del segundo desplazamiento.

30. El vector **A** tiene componentes *x* e *y* de −8.70 cm y 15.0 cm, respectivamente; el vector **B** tiene componentes *x* e *y* de 13.2 cm y −6.60 cm, respectivamente. Si **A** − **B** + 3**C** = 0, ¿cuáles son los componentes de **C**?

Materiał chroniony prawem autorskim

31. Considere los dos vectores $\mathbf{A} = 5\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}$ and $\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}$. Calcule (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, (b) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, (c) $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$, (d) $|\mathbf{A} - \mathbf{B}|$, y (e) las direcciones de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

32. Considere los tres vectores de desplazamiento $\mathbf{A} = (3\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}})$ m, $\mathbf{B} = (\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}})$ m, y $\mathbf{C} = (-2\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}})$ m. Use el método de componente para determinar (a) la magnitud y dirección del vector $\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$, (b) la magnitud y dirección de $\mathbf{E} = -\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C}$.

33. Una partícula experimenta los siguientes desplazamientos consecutivos: 3.50 m al sur, 8.20 m al noreste, y 15.0 m al oeste. ¿Cuál es el desplazamiento resultante?

34. En un juego de fútbol americano, un mariscal de campo toma el balón desde la línea de golpeo, corre hacia atrás 10.0 yardas, y luego 15.0 yardas en forma paralela a la línea de golpeo. En este punto, lanza un pase de 50 yardas hacia delante perpendicular a la línea de golpeo. ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento resultante del balón?

35. La vista aérea de la figura P3.35 muestra dos personas tirando de una mula terca. Encuentre (a) la fuerza individual que es equivalente a las dos fuerzas que se ilustran, y (b) la fuerza que una tercera persona tendría que ejercer sobre la mula para que sea cero la fuerza resultante. Las fuerzas se miden en unidades de newtons (se abrevia N).

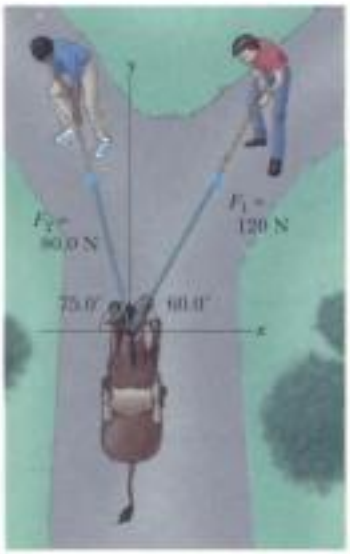


Figura P3.35

36. Un golfista novato necesita hacer tres tiros en el *green* para meter la pelota en el hoyo. Los desplazamientos sucesivos son 4.00 m al norte, 2.00 m al noreste, y 1.00 m a 30.0° al oeste del sur. Si empieza en el mismo punto inicial, un golfista experto podría meter la pelota en el hoyo en qué desplazamiento único?

37. Use el método de componentes para adicionar los vectores **A** y **B** que se muestra en la figura P3.15. Exprese la resultante $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ en notación de vectores unitarios.

38. En una operación de ensamble ilustrada en la figura P3.38, un robot mueve un objeto primero en línea recta hacia arriba y luego también al este, alrededor de un arco que forma un cuarto de círculo de radio 4.80 cm que está en un plano vertical este-oeste. El robot entonces mueve el objeto hacia arriba y al norte, un cuarto de círculo de radio 3.70 cm que está en el plano vertical norte-sur. Encuentre (a) la magnitud del desplazamiento total del objeto y (b) el ángulo que el desplazamiento total forma con la vertical.

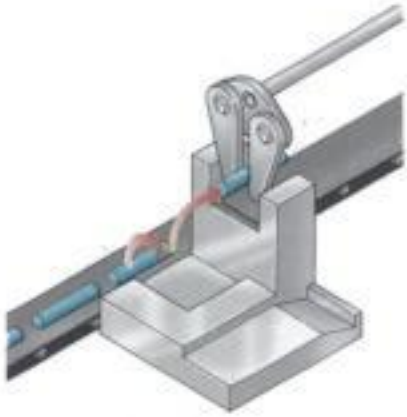


Figura P3.38

39. El vector **B** tiene componentes x, y y z de 4.00, 6.00 y 3.00 unidades, respectivamente. Calcule la magnitud de **B** y los ángulos que **B** forma con los ejes de coordenadas.

40. Una persona está de pie en el suelo, en el origen de un sistema de coordenadas. Un avión vuela sobre ella con velocidad constante paralela al eje x y a una altitud fija de 7.60×10^3 m. En el tiempo $t = 0$ el avión está directamente sobre la persona, de modo que el vector que va de la persona al avión es $\mathbf{P}_0 = (7.60 \times 10^3\ \text{m})\hat{\mathbf{j}}$. En $t = 30.0$ s el vector de posición que va de la persona al avión es $\mathbf{P}_{30} = (8.04 \times 10^3\ \text{m})\hat{\mathbf{i}} + (7.60 \times 10^3\ \text{m})\hat{\mathbf{j}}$. Determine la magnitud y orientación del vector de posición del avión en $t = 45.0$ s.

41. El vector **A** tiene componentes x, y y z de 8.00, 12.0 y −4.00 unidades, respectivamente. (a) Escriba una expresión vectorial para **A** en notación de vectores unitarios. (b) Obtenga una expresión de vectores unitarios para un vector **B** de un cuarto de la longitud de **A** que apunte en la misma dirección que **A**. (c) Obtenga una expresión de vectores unitarios para un vector **C** tres veces la longitud de **A** que apunte en la dirección opuesta a la dirección de **A**.

42. Las instrucciones para hallar un tesoro enterrado incluyen lo siguiente: dar 75 pasos a 240°, girar 135° y caminar 125 pasos, luego dar 100 pasos a 160°. Los ángulos se miden en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj desde un eje que apunta al este, la dirección $+x$. Determine el desplazamiento resultante desde el punto inicial.

43. Dados los vectores de desplazamiento $\mathbf{A} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}})$ m y $\mathbf{B} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 7\hat{\mathbf{k}})$ m, encuentre las magnitudes de los vectores (a) $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ y (b) $\mathbf{D} = 2\mathbf{A} - \mathbf{B}$, y exprese también cada uno en términos de sus componentes rectangulares.

44. Una estación de radar localiza un barco que se hunde a 17.3 km y rumbo 136° en el sentido de giro de las manecillas de un reloj desde el norte. Desde la misma estación, un avión de rescate está a una distancia horizontal de 19.6 km, 153° en el sentido de giro de las manecillas de un reloj desde el norte, con elevación de 2.20 km. (a) Escriba el vector de posición para el barco con respecto al avión, representando con $\hat{\mathbf{i}}$ el este, $\hat{\mathbf{j}}$ el norte, y $\hat{\mathbf{k}}$ hacia arriba. (b) ¿A qué distancia están el avión y el barco?

Materiał chroniony prawem autorskim

45. Cuando pasa sobre la isla Gran Bahama, el ojo de un huracán se mueve en una dirección 60.0° al norte del oeste con una rapidez de 41.0 km/h. Tres horas después, el curso del huracán de pronto cambia rumbo al norte, y su rapidez se reduce a 25.0 km/h. ¿A qué distancia de Gran Bahama está el ojo 4.50 h después que pasa sobre la isla?

46. (a) Un vector **E** tiene magnitud 17.0 cm y está dirigido 27.0° en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj desde el eje $+x$. Exprésela en notación de vectores unitarios. (b) El vector **F** tiene magnitud 17.0 cm y está dirigido 27.0° en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj desde el eje $+y$. Exprésela en notación de vectores unitarios.

47. El vector **A** tiene un componente x negativo de 3.00 unidades de longitud y un componente y positivo de 2.00 unidades de longitud. (a) Determine una expresión para **A** en notación de vectores unitarios. (b) Determine la magnitud y dirección de **A**. (c) ¿Qué vector **B** que se adicione a **A** da un vector resultante sin componente x y un componente y negativo de 4.00 unidades de longitud?

48. Un avión que sale del aeropuerto A vuela 300 km al este, luego 350 km a 30.0° al oeste del norte, y luego 150 km al norte para llegar finalmente de A a B en una línea recta. (a) Al día siguiente, otro avión vuela directamente de A a B en línea recta. ¿En qué dirección debe volar el piloto en este vuelo directo? (b) ¿Qué distancia volará el piloto en este vuelo directo? Suponga que no hay viento durante estos vuelos.

49. En la figura P3.49 se ilustran tres vectores de desplazamiento de una pelota de croquet, donde $|\mathbf{A}| = 20.0$ unidades, $|\mathbf{B}| = 40.0$ unidades, y $|\mathbf{C}| = 30.0$ unidades. Encuentre (a) la resultante en notación de vectores unitarios y (b) la magnitud y dirección del desplazamiento resultante.

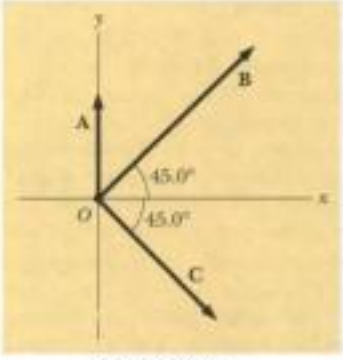


Figura P3.49

50. Si $\mathbf{A} = (6.00\hat{\mathbf{i}} - 8.00\hat{\mathbf{j}})$ unidades, $\mathbf{B} = (-8.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})$ unidades y $\mathbf{C} = (26.0\hat{\mathbf{i}} + 19.0\hat{\mathbf{j}})$ unidades, determine a y b tales que $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + \mathbf{C} = 0$.

Problemas adicionales

51. Dos vectores **A** y **B** tienen magnitudes precisamente iguales. Para que la magnitud de **A** + **B** sea cien veces mayor que la magnitud de **A** − **B**, ¿cuál debe ser el ángulo entre ellos?

52. Dos vectores **A** y **B** tienen magnitudes precisamente iguales. Para que la magnitud de **A** + **B** sea mayor que la magnitud de **A** − **B** por un factor n, ¿cuál debe ser el ángulo entre ellos?

53. Un vector está dado por $\mathbf{R} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$. Encuentre (a) las magnitudes de los componentes x, y y z, (b) la magnitud de **R**, y (c) los ángulos entre **R** y los ejes x, y y z.

54. El animal rellenado más grande del mundo es una serpiente de 420 m de largo, construida por niños noruegos. Suponga que la serpiente es colocada en un parque, como se muestra en la figura P3.54, formando dos lados rectos de un ángulo de 105°, con un lado de 240 m de largo. Olaf e Inge corren en una carrera que inventaron. Inge corre directamente desde la cola de la serpiente a su cabeza y Olaf inicia desde el mismo lugar, al mismo tiempo, pero corre a lo largo de la serpiente. Si ambos niños corren de manera uniforme a 12.0 km/h, ¿con qué antelación Inge llega a la cabeza de la serpiente antes que Olaf?

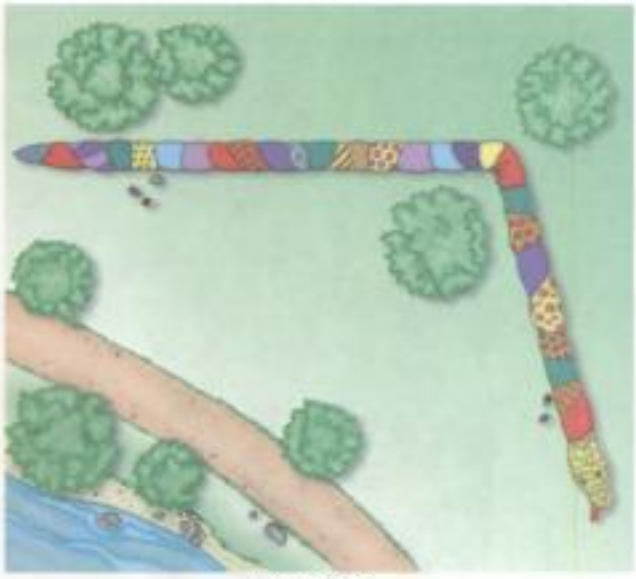


Figura P3.54

55. Un controlador de tráfico aéreo observa dos naves en su pantalla de radar. La primera está a una altitud de 800 m, a una distancia horizontal de 19.2 km y a 25.0° al sur del oeste. La segunda nave está a una altitud de 1 100 m, una distancia horizontal de 17.6 km y a 20.0° al sur del oeste. ¿Cuál es la distancia entre los dos aviones? (Ponga el eje x al oeste, el eje y al sur, y el eje z vertical).

56. Un barco transbordador transporta turistas entre tres islas. Navega de la primera isla a la segunda, a 4.76 km de distancia, en una dirección 37.0° al norte del este. Luego navega de la segunda isla a la tercera en una dirección 69.0° al oeste del norte. Finalmente, regresa a la primera isla al navegar en una dirección 28.0° al este del sur. Calcule la distancia entre (a) la segunda y tercera islas (b) la primera y tercera islas.

57. El rectángulo que se muestra en la figura P3.57 tiene lados paralelos a los ejes x e y. Los vectores de posición de dos esquinas son **A** = 10.0 m a 50.00° y **B** = 12.0 m a 30.0°. (a) Encuentre el perí-

Materiał chroniony prawem autorskim

metro del rectángulo. (b) Encuentre la magnitud y dirección del vector desde el origen a la esquina superior derecha del rectángulo.

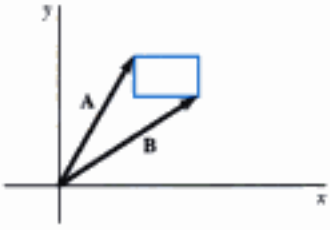


Figura P3.57

58. Encuentre la adición de estas cuatro fuerzas vectoriales: 12.0 N a la derecha a 35.0° arriba de la horizontal, 31.0 N a la izquierda a 55.0° arriba de la horizontal, 8.40 N a la izquierda a 35.0° abajo de la horizontal, y 24.0 N a la derecha a 55.0° abajo de la horizontal. Siga estos pasos: haga un dibujo de esta situación y seleccione los mejores ejes para x e y para que tenga el mínimo número de componentes. Entonces adicione los vectores por el método de componentes.

59. Una persona que salga a caminar sigue la trayectoria que se ilustra en la figura P3.59. El total del viaje consiste en cuatro trayectorias rectas. Al final de la caminata, ¿cuál es el desplazamiento resultante de la persona medido desde el punto de partida?

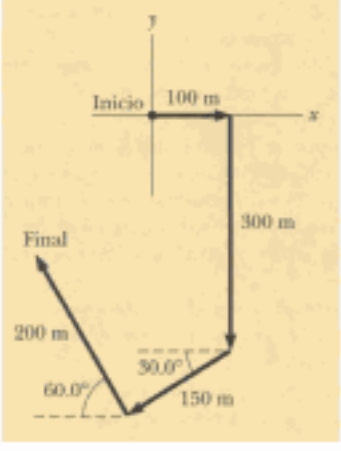


Figura P3.59

60. La posición instantánea de un objeto está especificada por su vector de posición $\mathbf{r}$, que va de un origen fijo a la ubicación del objeto puntual. Suponga que, para cierto objeto, el vector de posición es una función de tiempo, dado por $\mathbf{r} = 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 2t\hat{\mathbf{k}}$, donde r está en metros y t está en segundos. Evalúe $d\mathbf{r}/dt$. ¿Qué representa esto acerca del objeto?

61. Un avión comercial, que vuela inicialmente a 300 mi/h al este, de pronto entra en una región donde el viento está soplando a 100 mi/h hacia la dirección 30.0° al norte del este. ¿Cuáles son la nueva rapidez y dirección del avión con respecto al suelo?

62. Long John Silver, un pirata, ha enterrado su tesoro en una isla con cinco árboles, situados en los siguientes puntos: (30.0 m, −20.0 m), (60.0 m, 80.0 m), (−10.0 m, −10.0 m), (40.0 m, −30.0 m), y (−70.0 m, 60.0 m), todos medidos con respecto a algún origen, como en la figura P3.62. La bitácora de su barco instruye para iniciar en el árbol A y avanzar hacia el árbol B, pero para cubrir sólo la mitad de la distancia entre A y B. Luego avanzar hacia el árbol C, cubriendo un tercio de la distancia entre su actual posición y C. A continuación avanzar hacia D, cubriendo un cuarto de la distancia entre donde usted está y D. Finalmente, caminar hacia E, cubriendo un quinto de la distancia entre usted y E, parar, y cavar. (a) Suponga que usted ha determinado correctamente el orden en el que el pirata marcó los árboles como A, B, C, D y E, como se ve en la figura. ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde está enterrado su tesoro? (b) **¿Qué pasaría si** usted no sabe realmente la forma en que el pirata marcó los árboles? Reacomode el orden de los árboles [por ejemplo, B(30 m, −20 m), A(60 m, 80 m), E(−10 m, −10 m), C(40 m, −30 m), y D(−70 m, 60 m)] y repita el cálculo para demostrar que la respuesta no depende del orden en que los árboles están marcados.

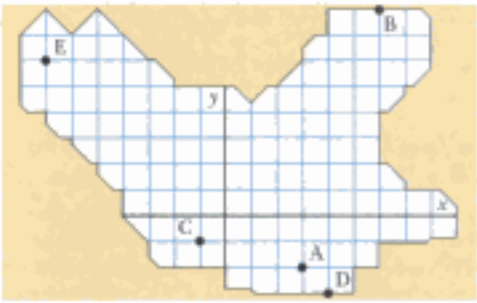


Figura P3.62

63. Considere un juego en el que N niños se colocan a iguales distancias alrededor de la circunferencia de un círculo. En el centro del círculo está una llanta. Cada niño sostiene una cuerda unida a la llanta y, a una señal, tiran de la cuerda. Todos los niños ejercen fuerzas F de la misma magnitud. En el caso $N = 2$, es fácil ver que la fuerza neta sobre la llanta será cero, porque los dos vectores de fuerza con direcciones opuestas adicionan cero. De igual modo, si $N = 4$, 6, 8 o cualquier entero par, la fuerza resultante sobre la llanta debe ser cero, porque las fuerzas ejercidas por cada par de niños en posiciones opuestas se cancelan. Cuando un número impar de niños está alrededor del círculo, no es obvio que la fuerza total sobre la llanta central sea cero. (a) Calcule la fuerza neta sobre la llanta en el caso $N = 3$ al adicionar los componentes de los tres vectores fuerza. Escoja que el eje x se encuentre a lo largo de una de las cuerdas. (b) **¿Qué pasaría si?** Determine la fuerza neta para el caso general donde N sea cualquier entero, impar o par, mayor de uno. Proceda como sigue: Suponga que la fuerza total no es cero, y entonces debe apuntar en alguna dirección en particular. Pensemos que cada uno de los niños se mueve una posición en el sentido de giro de las manecillas de un reloj. Dé una razón por la que la fuerza total entonces debe tener una dirección rotada $360°/N$ en el sentido de las manecillas de un reloj. Explique que la fuerza total debe ser, no obstante, igual que antes. Explique que la contradicción demuestra que la magnitud de la fuerza es cero. Este problema ilustra una técnica general útil de demostrar un resultado "por simetría", es decir, usar un poco de matemáticas de *teoría de grupo*. La situación particular se encuentra en realidad en física y química cuán-

Materiał chroniony prawem autorskim

do un conjunto de cargas eléctricas (iones) ejerce fuerzas eléctricas sobre un átomo situado en una posición central en una molécula o en un cristal.

64. Un paralelepípedo rectangular tiene dimensiones a, b y c, como se ve en la figura P3.64. (a) Obtenga una expresión vectorial para el vector $\mathbf{R}_1$ del plano diagonal. ¿Cuál es la magnitud de este vector? (b) Obtenga una expresión vectorial para el vector $\mathbf{R}_2$ en el plano diagonal. Note que $\mathbf{R}_1$, $c\hat{\mathbf{k}}$, y $\mathbf{R}_2$ forman un triángulo rectángulo y demuestre que la magnitud de $\mathbf{R}_2$ es $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

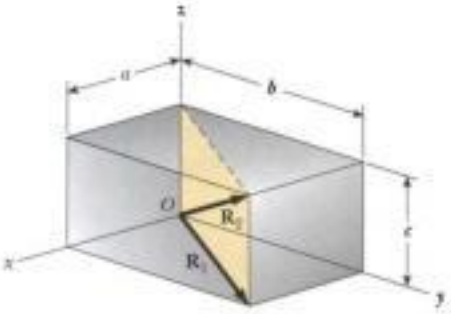


Figura P3.64

65. Los vectores **A** y **B** tienen magnitudes iguales de 5.00. Si la adición de **A** y **B** es el vector $6.00\hat{\mathbf{j}}$, determine el ángulo entre **A** y **B**.

66. En la figura P3.66 una araña está descansando después de empezar a tejer su telaraña. La fuerza gravitacional sobre la araña es 0.150 newtons hacia abajo. La araña está sostenida por diferentes fuerzas de tracción en los dos hilos que están arriba de ella, de modo que la fuerza vectorial resultante sobre la araña es cero. Los dos hilos son perpendiculares entre sí, por lo que hemos escogido que las direcciones x e y estén a lo largo de ellos. La tracción T_x es 0.127 newtons. Encuentre (a) la tracción T_y, (b) el ángulo que el eje x forma con la horizontal, y (c) el ángulo que el eje y forma con la horizontal.

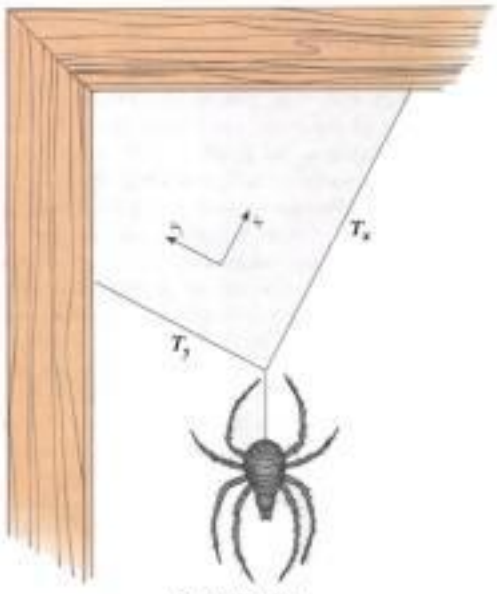


Figura P3.66

67. Un punto P está descrito por las coordenadas (x, y) con respecto al sistema de coordenadas cartesianas normal que se ilustra en la figura P3.67. Demuestre que (x', y'), las coordenadas de este punto en el sistema de coordenadas rotado, están relacionadas a (x, y) y al ángulo de rotación α por las expresiones

$$x' = x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha$$

$$y' = -x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha$$

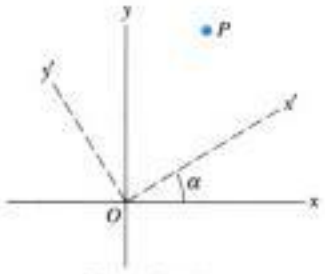


Figura P3.67

Respuestas a las *preguntas rápidas*

3.1 Escalares: (a), (d), (e). Ninguna de estas cantidades tiene una dirección. Vectores: (b), (c). Para estas cantidades, la dirección es necesaria para especificar completamente la cantidad.

3.2 (c). La resultante tiene su magnitud máxima $A + B = 12 + 8 = 20$ unidades cuando el vector **A** está orientado en la misma dirección que el vector **B**. El vector resultante tiene su magnitud mínima $A - B = 12 - 8 = 4$ unidades cuando el vector A está orientado en la dirección opuesta al vector **B**.

3.3 (a). Las magnitudes se adicionarán numéricamente sólo si los vectores están en la misma dirección.

3.4 (b) y (c). Para que adicionen cero, los vectores deben apuntar en direcciones opuestas y tener la misma magnitud.

3.5 (b). Del teorema de Pitágoras, la magnitud de un vector es siempre mayor que el valor absoluto de cada componente, a menos que haya sólo un componente diferente de cero, en cuyo caso la magnitud del vector es igual al valor absoluto de este componente.

3.6 (b). Del teorema de Pitágoras, vemos que la magnitud de un vector es diferente de cero si al menos un componente es diferente de cero.

3.7 (d). Cada conjunto de componentes, por ejemplo, los dos componentes A_x y B_x de x deben adición cero, de modo que los componentes deben ser de signo contrario.

3.8 (c). La magnitud de **C** es 5 unidades, la misma que el componente z. La respuesta (b) no es correcta porque la magnitud de cualquier vector es siempre un número positivo, en tanto que el componente de **B** es negativo.

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 4

Movimiento en dos dimensiones

▲ *Lava expulsada de una erupción volcánica. Nótense las trayectorias parabólicas de material ígneo proyectado hacia el aire. En este capítulo encontraremos que todos los proyectiles siguen una trayectoria parabólica en ausencia de resistencia del aire. (© Arndt/Premium Stock/PictureQuest)*

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración

4.2 Movimiento bidimensional con aceleración constante

4.3 Movimiento de proyectiles

4.4 Movimiento circular uniforme

4.5 Aceleración tangencial y radial

4.6 Velocidad y aceleración relativas

Materiał chroniony prawem autorskim

En este capítulo exploramos la cinemática de una partícula que se mueve en dos dimensiones. El conocimiento de conceptos básicos de movimiento en dos dimensiones nos permitirá examinar, en futuros capítulos, una amplia variedad de movimientos que van del movimiento de satélites en órbita al movimiento de electrones en un campo eléctrico uniforme. Comenzamos por estudiar en mayor detalle la naturaleza vectorial de la posición, velocidad y aceleración. Al igual que en el caso del movimiento en una dimensión, derivamos las ecuaciones cinemáticas para movimiento en dos dimensiones a partir de definiciones fundamentales de estas tres cantidades. A continuación tratamos el movimiento de un proyectil y el movimiento circular uniforme como casos especiales de movimiento en dos dimensiones. También estudiamos el de movimiento relativo, que muestra por qué observadores en diferentes marcos de referencia pueden medir diferentes posiciones, velocidades y aceleraciones para una partícula dada.

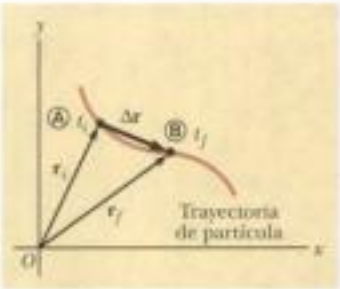


Figura 4.1 Una partícula que se mueve en el plano xy está localizada con el vector de posición $\mathbf{r}$ trazado del origen a la partícula. El desplazamiento de la partícula, cuando se mueve de Ⓐ a Ⓑ en el intervalo $\Delta t = t_f - t_i$ es igual al vector $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$.

4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración

En el capítulo 2 encontramos que el movimiento de una partícula a lo largo de una línea recta se conoce por completo si se conoce su posición como función del tiempo. Extendamos ahora esta idea al movimiento en el plano xy. Comenzamos por describir la posición de una partícula por su **vector de posición** $\mathbf{r}$, trazado del origen de algún sistema de coordenadas a la partícula situada en el plano xy, como en la figura 4.1. En el tiempo t_i la partícula está en el punto Ⓐ, descrito por el vector de posición $\mathbf{r}_i$. En algún tiempo posterior t_f está en el punto Ⓑ, descrito por el vector de posición $\mathbf{r}_f$. La trayectoria de Ⓐ a Ⓑ no es necesariamente una línea recta. Cuando la partícula se mueve de Ⓐ a Ⓑ en el intervalo $\Delta t = t_f - t_i$, su vector de posición cambia de $\mathbf{r}_i$ a $\mathbf{r}_f$. Como ya vimos en el capítulo 2, el desplazamiento es un vector, y el desplazamiento de la partícula es la diferencia entre su posición final y su posición inicial. Ahora definimos el **vector de desplazamiento** $\Delta\mathbf{r}$ para la partícula de la figura 4.1 como la diferencia entre su vector de posición final y su vector de posición inicial:

Vector de desplazamiento

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i \tag{4.1}$$

La dirección de $\Delta\mathbf{r}$ está indicada en la figura 4.1. Como vemos de la figura, la magnitud de $\Delta\mathbf{r}$ es *menor* que la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria curva seguida por la partícula.

Como ya explicamos en el capítulo 2, con frecuencia es útil cuantificar el movimiento al ver la razón entre un desplazamiento dividido entre el intervalo de tiempo durante el cual ocurre ese desplazamiento, lo cual da la rapidez de cambio de posición. En cinemática bidimensional (o tridimensional), todo es igual que en cinemática unidimensional, excepto que ahora debemos usar sólo notación vectorial en lugar de signos positivo y negativo para indicar la dirección del movimiento.

Definimos la **velocidad promedio** de una partícula durante el intervalo Δt como el desplazamiento de la partícula dividido entre el intervalo de tiempo:

Velocidad promedio

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \tag{4.2}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Mark C. Burnett/Photo Researchers, Inc.

Figura 4.2 Vista panorámica de un parque de béisbol. Un bateador que conecta un cuadrangular recorre las bases y termina donde empezó. En consecuencia, su velocidad promedio para todo el recorrido es cero, pero su rapidez promedio no es cero, sino que es igual a la distancia alrededor de las bases dividida entre el intervalo de tiempo durante el cual corre alrededor del cuadro.

La multiplicación o división de una cantidad vectorial entre una cantidad escalar como lo es Δt cambia sólo la magnitud del vector, no su dirección. Como el desplazamiento es una cantidad vectorial y el intervalo de tiempo es una cantidad escalar positiva, concluimos que la velocidad promedio es una cantidad vectorial dirigida a lo largo de $\Delta\mathbf{r}$.

Nótese que la velocidad promedio entre puntos es *independiente de la trayectoria* tomada. Esto es porque la velocidad promedio es proporcional al desplazamiento, que depende sólo de los vectores de posición inicial y final y no de la trayectoria tomada. Al igual que con el movimiento en una dimensión, concluimos que si una partícula inicia su movimiento en algún punto y regresa a este punto por cualquier trayectoria, su velocidad promedio es cero para este viaje, porque su desplazamiento es cero. La figura 4.2 sugiere esta situación en un parque de béisbol. Cuando un bateador conecta un cuadrangular, él corre alrededor de las bases y regresa al cojín (o almohadilla) de *home*. Entonces, su velocidad promedio es cero durante este viaje. Su rapidez promedio, sin embargo, no es cero.

Considere de nuevo el movimiento de una partícula entre dos puntos del plano *xy*, como se ve en la figura 4.3. Cuando el intervalo sobre el cual observamos el movimiento se hace cada vez más pequeño, la dirección del desplazamiento se aproxima a la de la línea tangente a la trayectoria en Ⓐ. La **velocidad instantánea** $\mathbf{v}$ se define como el límite de la velocidad promedio $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ cuando Δt se aproxima a cero:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{4.3}$$

Esto es, la velocidad instantánea es igual a la derivada del vector de posición con respecto al tiempo. La dirección del vector de velocidad instantánea en cualquier punto en la trayectoria de una partícula es a lo largo de la línea tangente a la trayectoria en ese punto y en la dirección del movimiento.

La magnitud del vector de velocidad instantánea $v = |\mathbf{v}|$ se llama *rapidez*, que es una cantidad escalar.

Cuando una partícula se mueve de un punto a otro a lo largo de cierta trayectoria, su vector de velocidad instantánea cambia de $\mathbf{v}_i$ en el tiempo t_i a $\mathbf{v}_f$ en el tiempo t_f. Conocer la velocidad en estos puntos, nos permite determinar la aceleración promedio de la partícula: la **aceleración promedio** $\bar{\mathbf{a}}$ de una partícula cuando se mueve de una posición a otra, se define como el cambio en el vector de velocidad instantánea $\Delta\mathbf{v}$ dividido entre el intervalo de tiempo Δt durante el cual ocurre ese cambio:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \tag{4.4}$$

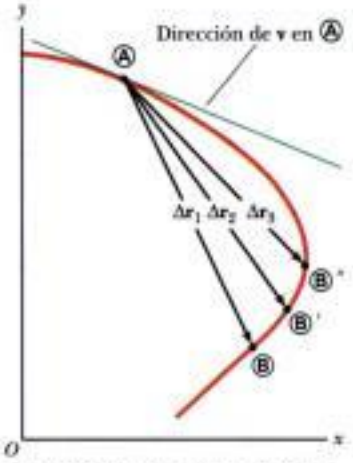


Figura 4.3 Cuando una partícula se mueve entre dos puntos, su velocidad promedio está en la dirección del vector de desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$. Cuando el punto final de la trayectoria se mueve de Ⓑ a Ⓑ′ a Ⓑ″, los desplazamientos respectivos e intervalos de tiempo correspondientes se hacen cada vez más pequeños. En el límite que el punto en que el punto final se aproxima a Ⓐ, Δt se aproxima a cero, y la dirección de $\Delta\mathbf{r}$ se aproxima a la de la línea tangente a la curva en Ⓐ. Por definición, la velocidad instantánea en Ⓐ está en la dirección de esta tangente.

Materiał chroniony prawem autorskim

¡ADVERTENCIA!

4.1 Adición de vectores

Mientras que la adición de vectores tratada en el capítulo 3 comprende vectores de *desplazamiento*, la adición de vectores se puede aplicar a *cualquier* tipo de cantidad vectorial. La figura 4.4, por ejemplo, muestra la adición de vectores de *velocidad* con el uso del método gráfico.

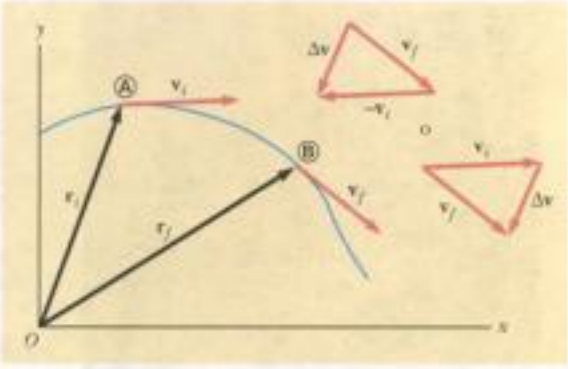


Figura 4.4 Una partícula se mueve de la posición Ⓐ a la Ⓑ. Su vector velocidad cambia de $\mathbf{v}_i$ a $\mathbf{v}_f$. Los diagramas vectoriales de arriba a la derecha muestran dos formas de determinar el vector $\Delta\mathbf{v}$ a partir de las velocidades inicial y final.

Como $\bar{\mathbf{a}}$ es la razón de una cantidad vectorial $\Delta\mathbf{v}$ y una cantidad escalar positiva Δt, concluimos que la aceleración promedio es una cantidad vectorial dirigida a lo largo de $\Delta\mathbf{v}$. Como se indica en la figura 4.4, la dirección de $\Delta\mathbf{v}$ se encuentra por adición del vector $-\mathbf{v}_i$ (el negativo de $\mathbf{v}_i$) al vector $\mathbf{v}_f$, porque por definición $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i$.

Cuando la aceleración promedio de una partícula cambia durante intervalos diferentes de tiempo, es útil definir su aceleración instantánea. La **aceleración instantánea, a,** se define como el valor límite de la razón $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ cuando Δt se aproxima a cero:

Aceleración instantánea

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{4.5}$$

En otras palabras, la aceleración instantánea es igual a la derivada del vector velocidad con respecto al tiempo.

Es importante reconocer que varios cambios pueden ocurrir cuando una partícula acelera. En primer lugar, la magnitud del vector velocidad (la rapidez) puede cambiar con el tiempo como en el movimiento en línea recta (una dimensión). En segundo término, la dirección del vector velocidad puede cambiar con el tiempo incluso si su magnitud (rapidez) permanece constante, como en el movimiento en trayectoria curva (dos dimensiones). Por último, la magnitud y la dirección del vector velocidad pueden cambiar simultáneamente.

Pregunta rápida 4.1 De los siguientes enunciados, ¿qué no puede posiblemente estar acelerando? (a) Un objeto que se mueve con rapidez constante (b) un objeto que se mueve con velocidad constante (c) Un objeto que se mueve a lo largo de una curva.

Pregunta rápida 4.2 Considere los siguientes controles en un automóvil: acelerador, freno, volante. Los controles de esta lista que producen una aceleración del automóvil son (a) los tres controles (b) el acelerador y el freno (c) sólo el freno (d) sólo el acelerador.

4.2 Movimiento bidimensional con aceleración constante

En la sección 2.5 investigamos el movimiento en una dimensión en que la aceleración es constante porque este tipo de movimiento es común. Consideremos ahora el movimiento bidimensional durante el cual la aceleración permanece constante en magnitud y dirección. Esto también será útil para analizar algunos tipos comunes de movimiento.

El vector de posición para una partícula que se mueve en el plano *xy* se puede escribir como

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} \tag{4.6}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

donde x, y, y $\mathbf{r}$ cambian con el tiempo cuando la partícula se mueve mientras los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ permanecen constantes. Si se conoce el vector de posición, la velocidad de la partícula puede obtenerse de las ecuaciones 4.3 y 4.6, que dan

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} \tag{4.7}$$

Como $\mathbf{a}$ se asume constante, sus componentes a_x y a_y también son constantes. Por lo tanto, podemos aplicar las ecuaciones de cinemática a los componentes x e y del vector velocidad. La sustitución, de la ecuación 2.9 $v_{xf} = v_{xi} + a_x t$ y $v_{yf} = v_{yi} + a_y t$ en la ecuación 4.7 para determinar la velocidad final en cualquier tiempo t, obtenemos

$$\mathbf{v}_f = (v_{xi} + a_x t)\hat{\mathbf{i}} + (v_{yi} + a_y t)\hat{\mathbf{j}}$$

$$= (v_{xi}\hat{\mathbf{i}} + v_{yi}\hat{\mathbf{j}}) + (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}})t$$

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t \tag{4.8}$$

Vector velocidad como función del tiempo

Este resultado expresa que la velocidad de una partícula en algún tiempo t es igual al vector adición de su velocidad inicial $\mathbf{v}_i$ y la velocidad adicional $\mathbf{a}t$ adquirida en el tiempo t como resultado de su aceleración constante. Es la versión vectorial de la ecuación 2.9.

Del mismo modo, de la ecuación 2.12 sabemos que las coordenadas x e y de una partícula que se mueve con aceleración constante son

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \qquad y_f = y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

La sustitución de estas expresiones en la ecuación 4.6 (y marcando el vector de posición final $\mathbf{r}_f$) da

$$\mathbf{r}_f = (x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2)\hat{\mathbf{i}} + (y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2)\hat{\mathbf{j}}$$

$$= (x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}}) + (v_{xi}\hat{\mathbf{i}} + v_{yi}\hat{\mathbf{j}})t + \tfrac{1}{2}(a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}})t^2$$

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \tag{4.9}$$

Vector de posición como función del tiempo

que es la versión vectorial de la ecuación 2.12. Esta ecuación nos dice que el vector de posición $\mathbf{r}_f$ es el vector adición de la posición original $\mathbf{r}_i$, un desplazamiento $\mathbf{v}_i t$ que surge de la velocidad inicial de la partícula y un desplazamiento $\frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$ que resulta de la aceleración constante de la partícula.

Las representaciones gráficas de las ecuaciones 4.8 y 4.9 se ilustran en la figura 4.5. Nótese de la figura 4.5a, que $\mathbf{v}_f$ generalmente no está a lo largo de la dirección de $\mathbf{v}_i$ o de $\mathbf{a}$ porque la relación entre estas cantidades es una expresión vectorial. Por la misma razón, de la

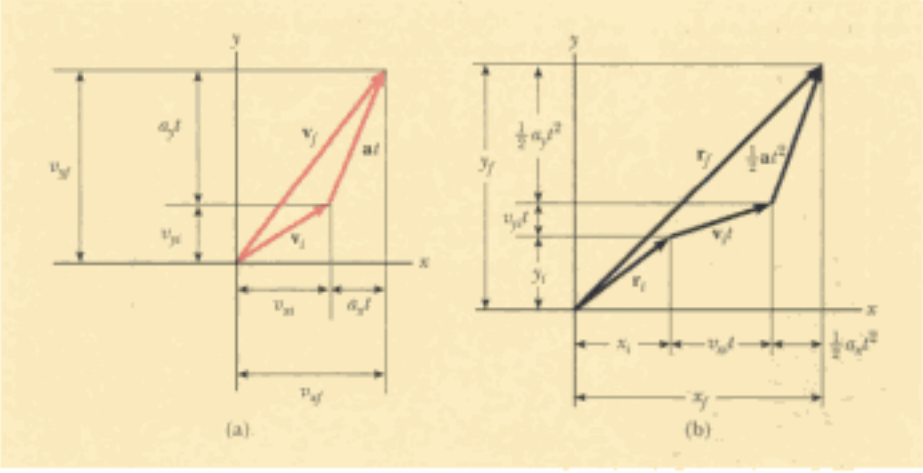


Figura activa 4.5 Representaciones vectoriales y componentes de (a) la velocidad y (b) la posición de una partícula que se mueve con aceleración constante $\mathbf{a}$.

En el vínculo **Active Figures** *en* **http://www.pse6.com**, *el lector puede investigar el efecto de diferentes posiciones y velocidades iniciales sobre la posición y velocidad finales (para aceleración constante).*

Materiał chroniony prawem autorskim

figura 4.5b vemos que $\mathbf{r}_f$ generalmente no está a lo largo de $\mathbf{v}_i$ o $\mathbf{a}$. Finalmente, nótese que $\mathbf{v}_f$ y $\mathbf{r}_f$ generalmente no están en la misma dirección.

Debido a que las ecuaciones 4.8 y 4.9 son expresiones vectoriales, podemos escribirlas en forma de componentes:

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t \quad \begin{cases} v_{xf} = v_{xi} + a_x t \\ v_{yf} = v_{yi} + a_y t \end{cases} \tag{4.8a}$$

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \quad \begin{cases} x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y_f = y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases} \tag{4.9a}$$

Estos componentes se muestran en la figura 4.5. La forma de componentes de las ecuaciones para $\mathbf{v}_f$ y $\mathbf{r}_f$ nos muestra que el movimiento bidimensional a aceleración constante es equivalente a dos movimientos *independientes*, uno en la dirección x y uno en la dirección y, con aceleraciones constantes a_x y a_y.

Ejemplo 4.1 Movimiento en un plano

Una partícula inicia desde el origen en $t = 0$ con una velocidad inicial que tiene un componente x de 20 m/s y un componente y de -15 m/s. La partícula se mueve en el plano xy sólo con un componente x de aceleración, dado por $a_x = 4.0$ m/s^2.

(A) Determine los componentes del vector velocidad en cualquier tiempo y el vector velocidad total en cualquier tiempo.

Solución Después de leer con cuidado el problema, conceptualicemos lo que está ocurriendo a la partícula. Los componentes de la velocidad inicial nos dicen que la partícula empieza por moverse hacia la derecha y hacia abajo. El componente x de velocidad empieza en 20 m/s y aumenta en 4.0 m/s cada segundo. El componente y de la velocidad nunca cambia de su valor inicial de -15 m/s. En la figura 4.6 trazamos un diagrama aproximado de movimiento. Como la partícula está acelerando en la dirección $+x$, su componente de velocidad en esta dirección aumentará, de modo que la trayectoria se va a curvar como se muestra en el diagrama. Nótese que la separación entre imágenes sucesivas aumenta conforme transcurre el tiempo, debido a que la velocidad está aumentando. La colocación de los vectores de aceleración y velocidad de la figura 4.6 nos ayudan a conceptualizar más la situación.

Como la aceleración es constante, *clasificamos* este problema como uno en el que interviene una partícula que se mueve en dos dimensiones con aceleración constante. Para *analizar* este problema, usamos las ecuaciones desarrolladas en esta sección. Para empezar el análisis matemático, hacemos $v_{xi} = 20$ m/s, $v_{yi} = -15$ m/s, $a_x = 4.0$ m/s^2, y $a_y = 0$.

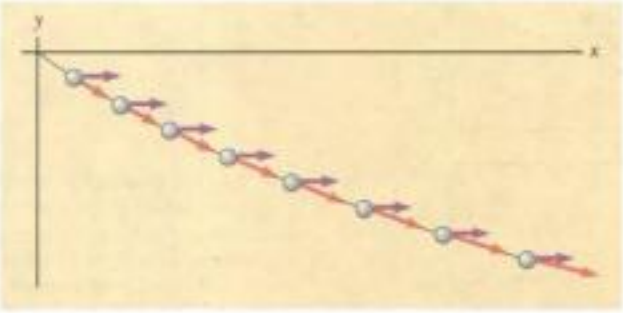


Figura 4.6 (Ejemplo 4.1) Diagrama de movimiento para la partícula.

Las ecuaciones 4.8a dan

$$(1) \qquad v_{xf} = v_{xi} + a_x t = (20 + 4.0t) \text{ m/s}$$

$$(2) \qquad v_{yf} = v_{yi} + a_y t = -15 \text{ m/s} + 0 = -15 \text{ m/s}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{v}_f = v_{xi}\hat{\mathbf{i}} + v_{yi}\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{[(20 + 4.0t)\hat{i} - 15\hat{j}]\ m/s}$$

Podríamos obtener también este resultado con el uso de la ecuación 4.8 directamente, si observamos que $\mathbf{a} = 4.0\hat{\mathbf{i}}$ m/s^2 y $\mathbf{v}_i = [20\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}}]$ m/s. Para *finalizar* esta parte, nótese que el componente x de velocidad aumenta con el tiempo mientras que el componente y permanece constante; esto es consistente con lo que pronosticamos.

(B) Calcule la velocidad y rapidez de la partícula en $t = 5.0$ s.

Solución Con $t = 5.0$ s, el resultado de la parte (A) da

$$\mathbf{v}_f = [(20 + 4.0(5.0))\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}}] \text{ m/s} = \mathbf{(40\hat{i} - 15\hat{j})\ m/s}$$

Este resultado nos dice que en $t = 5.0$ s, $v_{xf} = 40$ m/s y $v_{yf} = -15$ m/s. Al conocer estos dos componentes para este movimiento bidimensional, podemos hallar la dirección y la magnitud del vector velocidad. Para determinar el ángulo θ que $\mathbf{v}$ forma con el eje x en $t = 5.0$ s, usamos el hecho de que $\tan\theta = v_{yf}/v_{xf}$:

$$(3) \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{yf}}{v_{xf}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-15 \text{ m/s}}{40 \text{ m/s}}\right) = \mathbf{-21°}$$

donde el signo negativo indica un ángulo de 21° abajo del eje x positivo. La rapidez es la magnitud de $\mathbf{v}_f$:

$$v_f = |\mathbf{v}_f| = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(40)^2 + (-15)^2} \text{ m/s} = \mathbf{43\ m/s}$$

Para *finalizar* esta parte, observamos que si calculamos v_i a partir de los componentes x e y de $\mathbf{v}_i$, encontramos que $v_f > v_i$. ¿Es esto consistente con nuestra predicción?

Materiał chroniony prawem autorskim

(C) Determine las coordenadas x e y de la partícula en cualquier tiempo t y el vector de posición en este tiempo.

Solución Como $x_i = y_i = 0$ en $t = 0$, la ecuación 4.9a da

$$x_f = v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = \quad (20t + 2.0t^2)\ \mathrm{m}$$

$$y_f = v_{yi}t = \quad (-15t)\ \mathrm{m}$$

Por lo tanto, el vector de posición en cualquier tiempo t es

$$(4) \qquad \mathbf{r}_f = x_f\hat{\mathbf{i}} + y_f\hat{\mathbf{j}} = \quad [(20t + 2.0t^2)\hat{\mathbf{i}} - 15t\hat{\mathbf{j}}]\ \mathrm{m}$$

En forma alternativa, podríamos obtener $\mathbf{r}_f$ al aplicar la ecuación 4.9 directamente, con $\mathbf{v}_i = (20\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}})$ m/s y $\mathbf{a} = 4.0\hat{\mathbf{i}}$ m/s^2. ¡Inténtelo!) Entonces, por ejemplo, en $t = 5.0$ s, $x = 150$ m, $y = -75$ m, y $\mathbf{r}_f = (150\hat{\mathbf{i}} - 75\hat{\mathbf{j}})$ m. La magnitud del desplazamiento de la partícula desde el origen en $t = 5.0$ s es la magnitud de $\mathbf{r}_f$ en este tiempo:

$$r_f = |\mathbf{r}_f| = \sqrt{(150)^2 + (-75)^2}\,\mathrm{m} = 170\,\mathrm{m}$$

Nótese que ésta *no es* la distancia que la partícula recorre en este tiempo. ¿Puede usted determinar esta distancia a partir de los datos disponibles?

Para *finalizar* este problema, consideremos un caso límite para valores muy grandes de t en la siguiente sección de **¿Qué pasaría si?**

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si esperamos largo tiempo y luego observamos el movimiento de la partícula? ¿Cómo podríamos describir el movimiento de la partícula para valores grandes del tiempo?

Respuesta Al observar la figura 4.6, vemos la trayectoria de la partícula que se curva hacia el eje x. No hay razón para suponer que esta tendencia cambiará, de modo que esto sugiere que la trayectoria se hará cada vez más paralela al eje x cuando transcurra el tiempo. Matemáticamente, consideremos las ecuaciones (1) y (2). Éstas muestran que el componente y de la velocidad permanece constante, mientras que el componente x crece linealmente con t. Por lo tanto, cuando t es muy grande, el componente x de la velocidad será mucho mayor que el componente y, lo cual sugiere que el vector velocidad se hace cada vez más paralelo al eje x.

La ecuación (3) da el ángulo que el vector velocidad forma con el eje x. Nótese que $\theta \to 0$ cuando el denominador (v_{xf}) se hace mucho mayor que el numerador (v_{yf}).

A pesar del hecho que el vector velocidad se hace cada vez más paralelo al eje x, la partícula no se aproxima al valor límite de y. La ecuación (4) muestra que x_f y y_f continúan creciendo con el tiempo, aun cuando x_f crece con mucha mayor rapidez.

4.3 Movimiento de proyectiles

Suposiciones del movimiento de proyectiles

Quienquiera que haya observado una pelota de béisbol en movimiento, ha observado el movimiento de proyectiles. La pelota se mueve en una trayectoria curva, y su movimiento es fácil de analizar si hacemos dos suposiciones: (1) la aceleración en caída libre $\mathbf{g}$ es constante en todo el intervalo de movimiento y está dirigida hacia abajo,[1] y (2) el efecto de la resistencia del aire es despreciable.[2] Con estas suposiciones, encontramos que la trayectoria de un proyectil, que llamamos su *trayectoria*, es *siempre* una parábola. **Usamos estas suposiciones en todo este capítulo.**

Para demostrar que la trayectoria de un proyectil es una parábola, escojamos nuestro marco de referencia en forma tal que la dirección y sea vertical y positiva hacia arriba. Como la resistencia del aire se desprecia, sabemos que $a_y = -g$ (como en caída libre en una dimensión) y que $a_x = 0$. Además, supongamos que en $t = 0$, el proyectil sale del origen ($x_i = y_i = 0$) con velocidad v_i, como se ve en la figura 4.7. El vector $\mathbf{v}_i$ forma un ángulo θ_i con la horizontal. De las definiciones de las funciones coseno y seno tenemos

$$\cos\theta_i = v_{xi}/v_i \qquad \operatorname{sen}\theta_i = v_{yi}/v_i$$

Por lo tanto, los componentes iniciales x e y de velocidad son

$$v_{xi} = v_i\cos\theta_i \qquad v_{yi} = v_i\operatorname{sen}\theta_i \tag{4.10}$$

Al sustituir el componente x en la ecuación 4.9a, con $x_i = 0$ y $a_x = 0$, encontramos que

$$x_f = v_{xi}t = (v_i\cos\theta_i)t \tag{4.11}$$

[1] Esta suposición es razonable mientras el intervalo de movimiento sea pequeño en comparación con el radio de la Tierra (6.4×10^6 m). En efecto, esta suposición es equivalente a suponer que la Tierra es plana sobre el intervalo de movimiento considerado.

[2] Esta suposición generalmente *no se justifica*, en especial a altas velocidades. Además, cualquier giro impartido a un proyectil, como el aplicado cuando el *pitcher* de un partido de béisbol lanza una curva, puede dar lugar a algunos efectos muy interesantes relacionados con fuerzas aerodinámicas, que se estudiarán en el capítulo 14.

Materiał chroniony prawem autorskim

En el vínculo **Active Figures** *en* **http://www.pse6.com**, *el estudiante puede cambiar el ángulo de lanzamiento y la velocidad inicial. También puede observar los componentes cambiantes de velocidad a lo largo de la trayectoria del proyectil.*

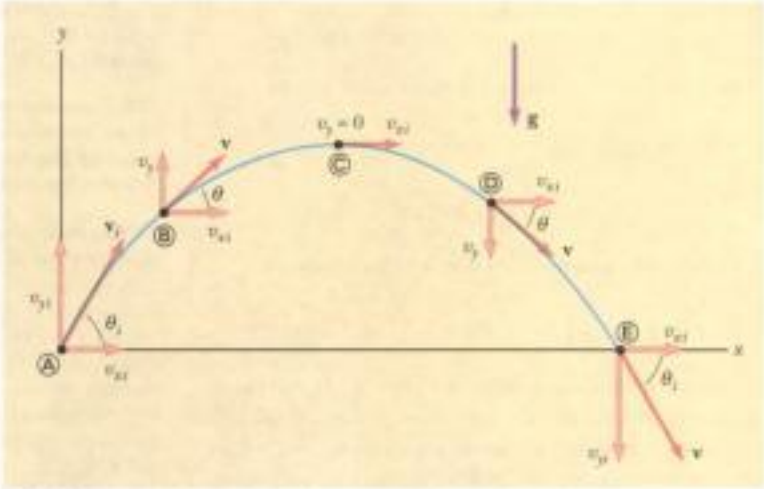


Figura activa 4.7 Trayectoria parabólica de un proyectil que sale del origen con velocidad $\mathbf{v}_i$. El vector velocidad $\mathbf{v}$ cambia con el tiempo en magnitud y dirección. Este cambio es el resultado de la aceleración en la dirección y negativa. El componente x de velocidad permanece constante en el tiempo porque no hay aceleración a lo largo de la dirección horizontal. El componente y de velocidad es cero en el punto mas alto de la trayectoria.

¡ADVERTENCIA!

4.2 Aceleración en el punto más alto

Como vimos en la Advertencia 2.8, muchas personas dicen que la aceleración de un proyectil en el punto más alto de su trayectoria es cero. Este error surge de la confusión entre velocidad vertical cero y aceleración cero. Si el proyectil fuera a experimentar aceleración cero en el punto más alto, entonces su velocidad en ese punto no cambiaría; el proyectil se movería horizontalmente a rapidez constante de ahí en adelante. Esto no ocurre, porque la aceleración NO ES cero en ninguna parte a lo largo de la trayectoria.

Repitiendo con el componente y y usando $y_i = 0$ y $a_y = -g$, obtenemos

$$y_f = v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = (v_i \operatorname{sen} \theta_i)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{4.12}$$

A continuación, de la ecuación 4.11 encontramos $t = x_f/(v_i \cos \theta_i)$ y sustituimos esta expresión por t en la ecuación 4.12; esto da

$$y = (\tan \theta_i)x - \left(\frac{g}{2v_i^2 \cos^2 \theta_i}\right)x^2$$

Esta ecuación es válida para ángulos de lanzamiento en el intervalo de $0 < \theta_i < \pi/2$. Hemos omitido los subíndices de x e y porque la ecuación es válida para cualquier punto (x,y) a lo largo de la trayectoria del proyectil. La ecuación es de la forma $y = ax - bx^2$, que es la ecuación de una parábola que pasa por el origen. Entonces, hemos demostrado que la trayectoria de un proyectil es una parábola. Nótese que la trayectoria se satisface completamente si se conocen la velocidad inicial v_i y el ángulo de lanzamiento θ_i.

La expresión vectorial para el vector de posición del proyectil como función del tiempo sigue directamente de la ecuación 4.9, con $\mathbf{a} = \mathbf{g}$:

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2$$

Esta expresión se traza en la figura 4.8, para un proyectil lanzado desde el origen, de modo que $\mathbf{r}_i = 0$.

Se puede considerar que la posición final de una partícula es la superposición de la posición inicial $\mathbf{r}_i$, el termino $\mathbf{v}_i t$, que es el desplazamiento si no hubiera aceleración presente, y el término $\frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$ que aparece de la aceleración debida a la gravedad. En otras palabras, si no hubiera aceleración gravitacional, la partícula continuaría su movimiento a lo largo de una recta en la dirección de $\mathbf{v}_i$. Por lo tanto, la distancia vertical $\frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$ en la que "cae" la partícula de la trayectoria recta es la misma distancia que un objeto en caída libre caería durante el mismo intervalo de tiempo.

En la sección 4.2 dijimos que un movimiento bidimensional con aceleración constante se puede analizar como la combinación de dos movimientos independientes en las direcciones x e y, con aceleraciones a_x y a_y. El movimiento de proyectiles es un caso especial de movimiento bidimensional con aceleración constante y se puede manejar en esta forma, con cero aceleración en la dirección x y $a_y = -g$ en la dirección y. En consecuencia, **cuando se analice el movimiento de proyectiles, considérelo como la superposición de dos movimientos: (1) movimiento a velocidad constante en la dirección horizontal** y **(2) mo-**

The Telegraph Colour Library/Getty Images

Un soldador corta agujeros en una pesada viga metálica de construcción con un soplete. Las chispas generadas en el proceso siguen trayectorias parabólicas.

Materiał chroniony prawem autorskim

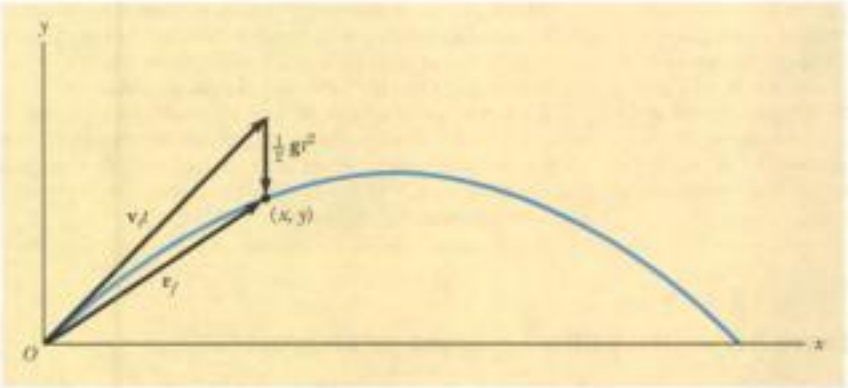


Figura 4.8 Vector de posición $\mathbf{r}_f$ de un proyectil lanzado desde el origen, cuya velocidad en el origen es $\mathbf{v}_i$. El vector $\mathbf{v}_i t$ sería el desplazamiento del proyectil en ausencia de gravedad, y el vector $\frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$ es su desplazamiento vertical debido a su aceleración gravitacional hacia abajo.

vimiento en caída libre en la dirección vertical. Los componentes horizontal y vertical del movimiento de un proyectil son completamente independientes entre sí y pueden manejarse por separado, con el tiempo t como la variable común para ambos componentes.

Pregunta rápida 4.3 Supongamos que el estudiante está corriendo a velocidad constante y desea lanzar una pelota de modo que pueda atraparla cuando baje. ¿En qué dirección debe lanzar la pelota respecto a sí mismo? (a) en línea recta hacia arriba (b) a un ángulo respecto al suelo que dependa de su rapidez de carrera (c) en dirección hacia delante.

Pregunta rápida 4.4 Debido a que un proyectil lanzado hacia arriba se mueve en su trayectoria parabólica (como en la figura 4.8), ¿en qué punto a lo largo de su trayectoria son perpendiculares entre sí los vectores de velocidad y aceleración para el proyectil? (a) en ninguna parte (b) en el punto más alto (c) en el punto de lanzamiento.

Pregunta rápida 4.5 Como el proyectil de la Pregunta rápida 4.4 se mueve a lo largo de su trayectoria, ¿en qué punto son paralelos entre sí los vectores de velocidad y aceleración para el proyectil? (a) en ninguna parte (b) en el punto más alto (c) en el punto de lanzamiento.

Ejemplo 4.2 Aproximación al movimiento de proyectiles

Una pelota es lanzada en forma tal que sus componentes iniciales vertical y horizontal de velocidad son 40 m/s y 20 m/s, respectivamente. Estime el tiempo total de vuelo y la distancia que la pelota está desde su punto de partida cuando cae al suelo.

Solución Un diagrama de movimiento como el de la figura 4.9 ayuda a *conceptualizar* el problema. La frase "Una pelota es lanzada" no permite *clasificar* esto como un problema de movimiento de proyectiles, que *analizamos* al continuar el estudio de la figura 4.9. Los vectores de aceleración son todos iguales, apuntando hacia abajo con una magnitud de casi 10 m/s^2. Los vectores de velocidad cambian dirección. Sus componentes horizontales son todos iguales: 20 m/s.

Recuerde que los dos componentes de velocidad son independientes entre sí. Al considerar el movimiento vertical prime-

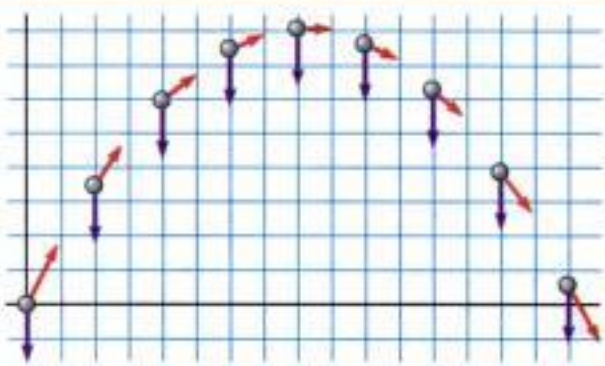


Figura 4.9 (Ejemplo 4.2) Diagrama de movimiento para un proyectil.

Materiał chroniony prawem autorskim

ro, podemos determinar cuánto tiempo permanece la pelota en el aire. Debido a que el movimiento vertical es en caída libre, los componentes verticales de los vectores de velocidad cambian, segundo a segundo, de 40 m/s a casi 30, 20 y 10 m/s en la dirección hacia arriba, y luego a 0 m/s. Subsecuentemente, su velocidad se hace 10, 20, 30 y 40 m/s en la dirección hacia abajo. En esta forma, la pelota tarda unos 4 s en subir y otros 4 s en bajar, para un tiempo total de vuelo de aproximadamente 8 s.

Ahora cambiamos nuestro análisis al movimiento horizontal. Como el componente horizontal de velocidad es 20 m/s, y como la pelota se desplaza a esta velocidad durante 8 s, termina a aproximadamente 160 m de su punto de partida.

Éste es el primer ejemplo que hemos trabajado para movimiento de proyectiles. En subsiguientes problemas de movimiento de proyectiles, recuerde la importancia de separar los dos componentes, y de hacer aproximaciones para obtener resultados aproximados esperados.

Alcance horizontal y altura máxima de un proyectil

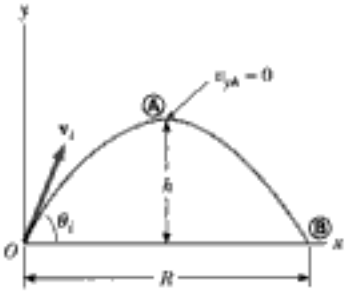


Figura 4.10 Proyectil lanzado desde el origen en $t_i = 0$ con una velocidad inicial $\mathbf{v}_i$. La altura máxima del proyectil es h, y el alcance horizontal es R. En Ⓐ, el punto más alto de la trayectoria, la partícula tiene coordenadas $(R/2, h)$.

Supongamos que un proyectil es lanzado desde el origen en $t_i = 0$ con un componente positivo v_{yi}, como se ve en la figura 4.10. Dos puntos son especialmente interesantes para análisis: el punto más alto Ⓐ, que tiene coordenadas cartesianas $(R/2, h)$, y el punto Ⓑ, que tiene coordenadas $(R, 0)$. La distancia R se denomina *alcance horizontal* del proyectil, y la distancia h es la *altura máxima*. Busquemos h y R en términos de v_i, θ_i y g.

Podemos determinar h al observar que en el punto más alto, $v_{yA} = 0$. Por lo tanto, podemos usar la ecuación 4.8a para determinar el tiempo t_A en el que el proyectil llega al punto más alto:

$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t$$

$$0 = v_i \operatorname{sen} \theta_i - g t_A$$

$$t_A = \frac{v_i \operatorname{sen} \theta_i}{g}$$

Al sustituir esta expresión por t_A en la parte y de la ecuación 4.9a y sustituir $y = y_A$ en h, obtenemos una expresión para h en términos de la magnitud y dirección del vector de velocidad inicial:

$$h = (v_i \operatorname{sen} \theta_i)\frac{v_i \operatorname{sen} \theta_i}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_i \operatorname{sen} \theta_i}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{v_i^2 \operatorname{sen}^2 \theta_i}{2g} \tag{4.13}$$

El alcance R es la posición horizontal del proyectil en un tiempo que es el doble del tiempo en el que llega a su punto más alto, esto es, el tiempo $t_B = 2t_A$. Si se usa la parte x de la ecuación 4.9a, se observa que $v_{xi} = v_{xB} = v_i \cos \theta$ y si se hace $x_B = R$ en $t = 2t_A$, encontramos que

$$R = v_{xi} t_B = (v_i \cos \theta_i) 2t_A$$

$$= (v_i \cos \theta_i)\frac{2v_i \operatorname{sen} \theta_i}{g} = \frac{2v_i^2 \operatorname{sen} \theta_i \cos \theta_i}{g}$$

Con el uso de la identidad $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos\theta$ (vea el apéndice B.4), escribimos R en la forma más compacta

$$R = \frac{v_i^2 \operatorname{sen} 2\theta_i}{g} \tag{4.14}$$

El valor máximo de R desde la ecuación 4.14 es $R_{máx} = v_i^2/g$. Este resultado se sigue del hecho que el valor máximo de $\operatorname{sen} 2\theta_i$ es 1, que se presenta cuando $2\theta_i = 90°$. Por lo tanto, R es un máximo cuando $\theta_i = 45°$.

La figura 4.11 ilustra varias trayectorias para un proyectil que tiene una rapidez inicial dada, pero es lanzado a ángulos diferentes. Como se puede ver, el alcance es máximo para $\theta_i = 45°$. Además, para cualquier θ_i que no sea 45°, se puede alcanzar un punto que tiene coordenadas cartesianas $(R, 0)$ usando uno o dos valores complementarios de θ_i, por ejemplo 75° y 15°. Desde luego que la altura máxima y el tiempo de vuelo para uno de estos valores de θ_i son diferentes a la altura máxima y tiempo de vuelo para el valor complementario.

¡ADVERTENCIA!

4.3 Ecuaciones de altura y alcance

La ecuación 4.14 es útil para calcular R sólo en una trayectoria simétrica, como se muestra en la figura 4.10. Si la trayectoria no es simétrica, *no use esta ecuación*. Las expresiones generales dadas por las ecuaciones 4.8 y 4.9 son los resultados *más importantes*, ya que proporcionan los componentes de posición y velocidad de *cualquier* partícula que se mueve en dos dimensiones en *cualquier* tiempo t.

Materiał chroniony prawem autorskim

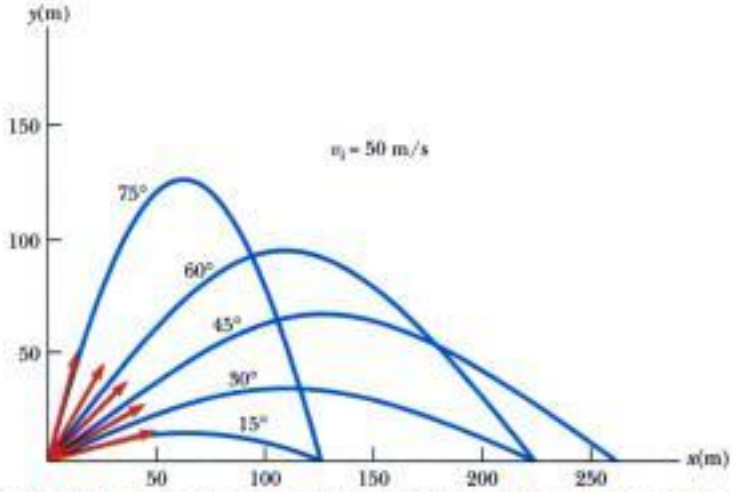


Figura activa 4.11 Proyectil lanzado desde el origen con una rapidez inicial de 50 m/s a varios ángulos de proyección. Nótese que valores complementarios de θ_i resultan en el mismo valor de R (alcance del proyectil).

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, el estudiante puede hacer variar el ángulo de proyección para observar el efecto sobre la trayectoria y medir el tiempo de vuelo.

Pregunta rápida 4.6 Clasifique los ángulos de lanzamiento para las cinco trayectorias de la figura 4.11 con respecto al tiempo de vuelo, desde el tiempo más corto de vuelo al más largo.

SUGERENCIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Movimiento de proyectiles

Sugerimos que el estudiante use el siguiente método para resolver problemas de movimiento de proyectiles:

- Seleccione un sistema de coordenadas y separe el vector de velocidad inicial en sus componentes x e y.
- Siga las técnicas para resolver problemas de velocidad constante, para analizar el movimiento horizontal. Siga las técnicas para resolver problemas de aceleración constante, para analizar el movimiento vertical. Los movimientos x e y comparten el mismo tiempo t.

Ejemplo 4.3 Salto de longitud

Un atleta de salto de longitud (figura 4.12) despega del suelo a un ángulo de 20.0° sobre la horizontal y a una velocidad de 11.0 m/s.

(A) ¿Qué distancia salta en la dirección horizontal? (Suponga que su movimiento es equivalente al de una partícula).

Solución *Conceptualicemos* el movimiento del atleta de salto de longitud como uno equivalente al de un simple proyectil como es una pelota en el ejemplo 4.2, y *clasificamos* este problema como un problema de movimiento de proyectiles. Debido a que se dan la rapidez inicial y el ángulo de lanzamiento, y como la altura final es la misma que la altura inicial, clasificamos además este problema como uno que satisface las condiciones para las cuales se pueden usar las ecuaciones 4.13 y 4.14. Ésta es la forma más directa de *analizar* este problema, aunque los métodos generales que hemos estado describiendo siempre darán la respuesta correcta. Tomaremos el método general y usaremos componentes. La figura 4.10 es una representación gráfica del vuelo del atleta. Como antes, establecemos nuestro origen de coordenadas en el punto de despegue y marcamos el punto más alto como Ⓐ y el punto de aterrizaje como Ⓑ. El movimiento horizontal está descrito por la ecuación 4.11:

$$x_f = x_B = (v_i \cos \theta_i) t_B = (11.0 \text{ m/s})(\cos 20.0°) t_B$$

El valor de x_B se puede hallar si se conoce el tiempo de aterrizaje t_B. Podemos hallar t_B si recordamos que $a_y = -g$ y si usamos la parte y de la ecuación 4.8a. También observamos que, en la parte más alta del salto, el componente vertical de velocidad v_{yA} es cero:

$$v_{yf} = v_{yA} = v_i \text{ sen } \theta_i - gt_A$$
$$0 = (11.0 \text{ m/s}) \text{ sen } 20.0° - (9.80 \text{ m/s}^2) t_A$$
$$t_A = 0.384 \text{ s}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Figura 4.12 (Ejemplo 4.3) Mike Powell, actual poseedor del récord mundial de salto de longitud de 8.95 m.

Éste es el tiempo en el que el atleta de salto de longitud está en la *máxima altura* del salto. Debido a la simetría del movimiento vertical, transcurren otros 0.384 s antes que el saltador regrese a tierra. Por lo tanto, el tiempo en que el atleta aterriza es $t_B = 2t_A = 0.768$ s. Si sustituimos este valor en la expresión anterior para x_f tendremos

$$x_f = x_B = (11.0 \text{ m/s})(\cos 20.0°)(0.768 \text{ s}) = \mathbf{7.94 \text{ m}}$$

Ésta es una distancia razonable para un atleta de clase mundial.

(B) ¿Cuál es la máxima altura alcanzada?

Solución Encontramos la máxima altura alcanzada, con la ecuación 4.12:

$$y_{máx} = y_A = (v_i \text{ sen } \theta_i)t_A - \tfrac{1}{2}gt_A^2$$
$$= (11.0 \text{ m/s})(\text{sen } 20.0°)(0.384 \text{ s})$$
$$-\tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(0.384 \text{ s})^2 = \mathbf{0.722 \text{ m}}$$

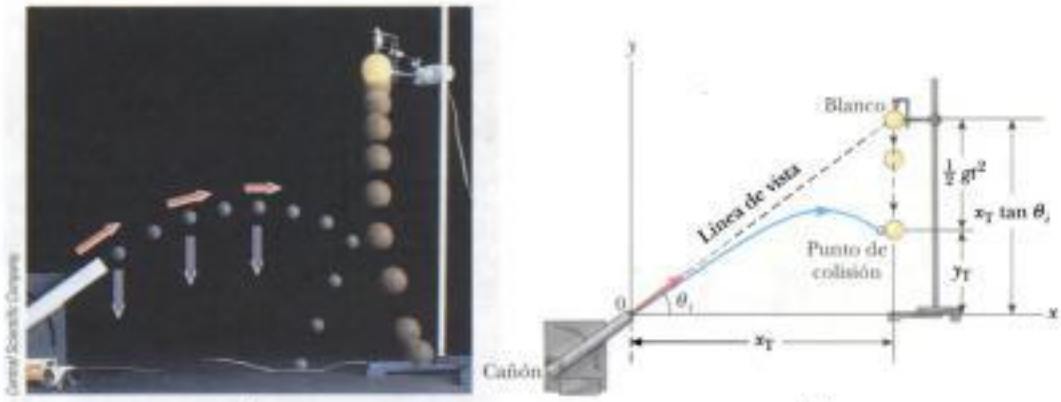
Para *finalizar* este problema, encontramos las respuestas a las partes (A) y (B) con las ecuaciones 4.13 y 4.14. Los resultados deben concordar. Tratar al atleta de salto de longitud como una partícula es una simplificación, pero los valores obtenidos son consistentes con la experiencia en deportes. Aprendemos que es posible modelar el complicado sistema de este atleta como si fuera una partícula y obtener resultados que son razonables.

Ejemplo 4.4 Donde pone el ojo pone la bala

En una demostración muy popular en un aula, se dispara un proyectil a un blanco T en forma tal que el proyectil sale del cañón al mismo tiempo que el blanco se deja caer desde el reposo, como se muestra en la figura 4.13. Demuestre que si el cañón está inicialmente apuntado al blanco estacionario, el proyectil da en el blanco.

Solución *Conceptualizamos* el problema al estudiar la figura 4.13. Nótese que el problema no busca números. El resultado esperado debe comprender un argumento algebraico. Como ambos objetos están sujetos sólo a la gravedad, *clasificamos* este problema como uno en el que intervienen dos objetos en caída libre, uno de los cuales se mueve en una dimensión y otro en dos. Ahora *analicemos* el problema. Resulta una colisión bajo las condiciones expresadas si observamos que, tan pronto como se sueltan, el proyectil y el blanco experimentan la misma aceleración, $a_y = -g$. La figura 4.13b muestra que la coordenada y inicial del blanco es $x_T \tan \theta_i$ y que cae a una posición $\frac{1}{2}gt^2$ abajo de esta coordenada en el tiempo t. Por lo tanto, la coordenada y del blanco en cualquier momento después de soltarlo es

$$y_T = x_T \tan \theta_i - \tfrac{1}{2}gt^2$$



(a) (b)

Figura 4.13 (Ejemplo 4.4) (a) Fotografía multiflash de una demostración de proyectil-blanco. Si el cañón está apuntado directamente al blanco y es disparado en el mismo instante en que el blanco empieza a caer, el proyectil dará en el blanco. Nótese que la velocidad del proyectil (flechas rojas) cambia en dirección y magnitud, en tanto que su aceleración hacia abajo (flechas violeta) permanece constante. (b) Diagrama esquemático de la demostración de proyectil-blanco. El proyectil y el blanco han caído la misma distancia vertical en el tiempo t, porque ambos experimentan la misma aceleración $a_y = -g$.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ahora, si usamos la ecuación 4.9a para escribir una expresión para la coordenada y del proyectil en cualquier momento, obtenemos

$$y_P = x_P \tan \theta_i - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Así, al comparar las dos ecuaciones previas, vemos que cuando las coordenadas y del proyectil y el blanco son las mismas, sus coordenadas x son las mismas y resulta la colisión. Esto es, cuando $y_P = y_T$, $x_P = x_T$. Se puede obtener el mismo resultado si se usan expresiones para los vectores de posición para el proyectil y el blanco.

Para *finalizar* este problema, nótese que puede resultar una colisión sólo cuando $v_i \operatorname{sen} \theta_i \geq \sqrt{gd/2}$ donde d es la elevación inicial del blanco arriba del piso. Si $v_i \operatorname{sen} \theta_i$ es menor a este valor, el proyectil dará en el piso antes de llegar al blanco.

Ejemplo 4.5 ¡Esto es un brazo de verdad!

Desde lo alto de un edificio se lanza una piedra hacia arriba y a un ángulo de 30.0° con respecto a la horizontal, con una rapidez inicial de 20.0 m/s, como se ve en la figura 4.14. Si la altura del edificio es de 45.0 m,

(A) ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en llegar al suelo?

Solución *Conceptualizamos* el problema al estudiar la figura 4.14, en la que hemos indicado los diversos parámetros. Por ahora, debe ser natural *clasificar* éste como un problema de movimiento de proyectiles.

Para *analizar* el problema, separemos una vez más el movimiento en dos componentes. Los componentes iniciales x e y de la velocidad de la piedra son

$$v_{xi} = v_i \cos \theta_i = (20.0 \text{ m/s}) \cos 30.0° = 17.3 \text{ m/s}$$

$$v_{yi} = v_i \operatorname{sen} \theta_i = (20.0 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 30.0° = 10.0 \text{ m/s}$$

Para hallar t, podemos usar $y_f = y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_yt^2$ (ecuación 4.9a) con $y_i = 0$, $y_f = -45.0$ m, $a_y = -g$, y $v_{yi} = 10.0$ m/s (hay un signo negativo en el valor numérico de y_f porque hemos escogido lo alto del edificio como el origen):

$$-45.0 \text{ m} = (10.0 \text{ m/s})t - \tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$

Al despejar t de la ecuación cuadrática tendremos, para la raíz positiva, $t =$ **4.22 s.** Para *finalizar* esta parte, piense: ¿La raíz negativa tiene algún significado físico?

(B) ¿Cuál es la velocidad de la piedra inmediatamente antes que toque el suelo?

Solución Podemos usar la ecuación 4.8a, $v_{yf} = v_{yi} + a_yt$, con $t = 4.22$ s para obtener el componente y de la velocidad inmediatamente antes que la piedra toque el suelo:

$$v_{yf} = 10.0 \text{ m/s} - (9.80 \text{ m/s}^2)(4.22 \text{ s}) = -31.4 \text{ m/s}$$

Como $v_{xf} = v_{xi} = 17.3$ m/s, la rapidez requerida es

$$v_f = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(17.3)^2 + (-31.4)^2} \text{ m/s} = \mathbf{35.9 \text{ m/s}}$$

Para *finalizar* esta parte, ¿es razonable que el componente y de la velocidad final sea negativo? ¿es razonable que la rapidez final sea mayor que la rapidez inicial de 20.0 m/s?

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si el viento horizontal está soplando en la misma dirección cuando la pelota es lanzada y hace que ésta tenga un componente horizontal de aceleración $a_x = 0.500$ m/s²? ¿Qué parte de este ejemplo, (A) o (B), tendrá una respuesta diferente?

Respuesta Recuerde que el movimiento en las direcciones x e y son independientes. Por lo tanto, el viento horizontal no puede afectar el movimiento vertical. El movimiento vertical determina el tiempo del proyectil en el aire, de modo que la respuesta a (A) no cambia. El viento causará que el componente horizontal de velocidad aumente con el tiempo, de modo que la rapidez final cambiará en la parte (B).

Podemos hallar el nuevo componente horizontal de velocidad final con la ecuación 4.8a:

$$v_{xf} = v_{xi} + a_xt = 17.3 \text{ m/s} + (0.500 \text{ m/s}^2)(4.22 \text{ s})$$
$$= 19.4 \text{ m/s}$$

y la nueva rapidez final:

$$v_f = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(19.4)^2 + (-31.4)^2} \text{ m/s} = 36.9 \text{ m/s}$$

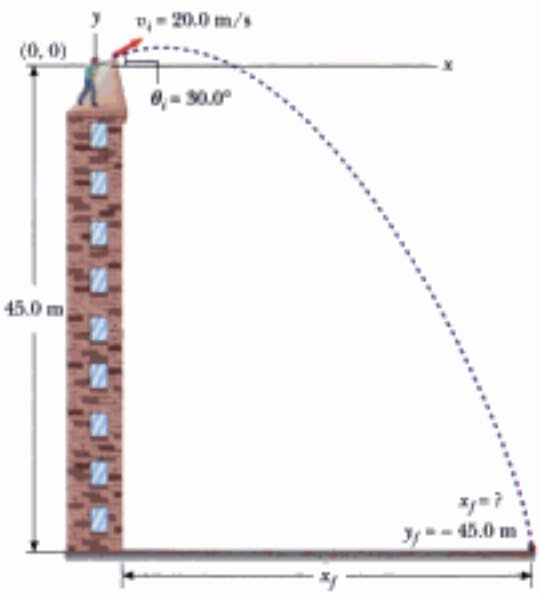


Figura 4.14 (Ejemplo 4.5) Una piedra es lanzada desde lo alto de un edificio.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 4.6 Los exploradores extraviados

Un avión deja caer un paquete de provisiones a un grupo de exploradores, como se ve en la figura 4.15. Si el avión vuela horizontalmente a 40.0 m/s y está 100 m sobre el nivel del suelo, ¿dónde cae el paquete en relación al punto en el que es soltado?

Solución *Conceptualizamos* lo que está pasando con la ayuda de la figura 4.15. El avión vuela horizontalmente cuando deja caer el paquete; como éste está en caída libre en la dirección horizontal, *clasificamos* éste como un problema de movimiento. Para *analizar* el problema escogemos el sistema de coordenadas que se ve en la figura 4.15, en el que el origen está en el punto en que el avión suelta el paquete. Considere primero su movimiento horizontal. La única ecuación de la que disponemos para hallar la posición a lo largo de la dirección horizontal es $x_f = x_i + v_{xi}t$ (ecuación 4.9a). El componente x inicial de la velocidad del paquete es el mismo que el del avión cuando suelta el paquete: 40.0 m/s. Entonces, tenemos

$$x_f = (40.0 \text{ m/s})t$$

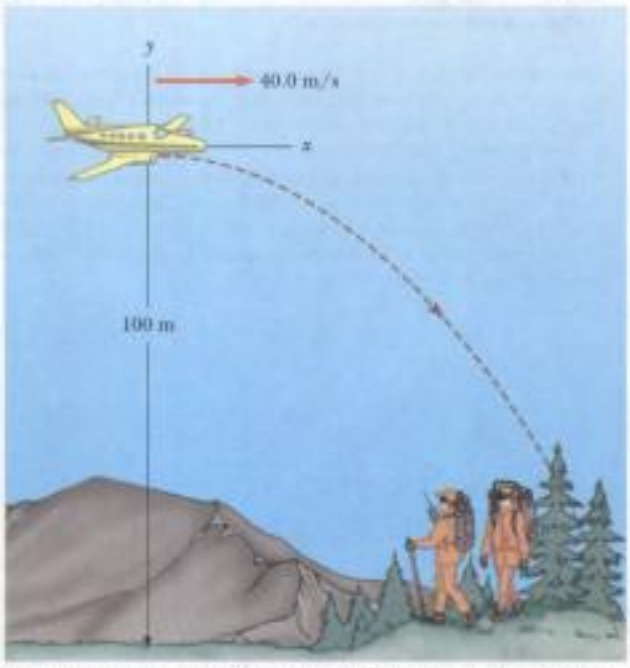


Figura 4.15 (Ejemplo 4.6) Un paquete de provisiones soltado desde un avión a un grupo de exploradores.

Si conocemos t, el tiempo en el que el paquete llega al suelo, entonces podemos determinar x_f, la distancia que el paquete recorre en la dirección horizontal. Para hallar t, usamos las ecuaciones que describen el movimiento vertical del paquete. Sabemos que, en el instante en que el paquete toca el suelo, su coordenada y es $y_f = -100$ m. También sabemos que el componente vertical inicial de la velocidad del paquete es v_{yi} es cero porque en el momento de soltarlo, el paquete tiene sólo un componente horizontal de velocidad.

De la ecuación 4.9a, tenemos

$$y_f = -\tfrac{1}{2}gt^2$$
$$-100 \text{ m} = -\tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$
$$t = 4.52 \text{ s}$$

La sustitución de este valor por el tiempo en la ecuación para la coordenada x da

$$x_f = (40.0 \text{ m/s})(4.52 \text{ s}) = \mathbf{181 \text{ m}}$$

El paquete toca tierra a 181 m a la derecha del punto en que fue soltado. Para *finalizar* este problema, sabemos que un objeto que se deja caer desde un avión en movimiento no cae en línea recta hacia abajo. Toca tierra en un punto diferente del que está justo bajo del avión cuando es soltado. Ésta fue una importante consideración para bombas en caída libre como las usadas en la segunda guerra mundial.

Ejemplo 4.7 Final del salto en esquí

Un esquiador sale de la pista de esquiar moviéndose en dirección horizontal con una velocidad de 25.0 m/s, como se ve en la figura 4.16. La pendiente de aterrizaje que está abajo de él desciende con una inclinación de 35.0°. ¿Dónde aterriza en la pendiente?

Solución Podemos *conceptualizar* este problema con base en observaciones de competencias de esquí de juegos olímpicos de invierno. Observamos que el esquiador está en el aire durante quizá 4 s y recorre una distancia de unos 100 m horizontalmente. Deberíamos esperar que el valor de d, la distancia recorrida a lo largo de la pendiente, sea del mismo orden de magnitud. *Clasificamos* el problema como el de una partícula en movimiento de proyectiles.

Para *analizar* el problema, es conveniente seleccionar el inicio del salto como el origen. Como $v_{xi} = 25.0$ m/s y $v_{yi} = 0$, las formas componentes x e y de la ecuación 4.9a son

$$(1) \qquad x_f = v_{xi}t = (25.0 \text{ m/s})t$$

$$(2) \qquad y_f = v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_yt^2 = -\tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$

Del triángulo rectángulo de la figura 4.16, podemos ver que las coordenadas x e y del saltador en el punto de aterrizaje son $x_f = d\cos 35.0°$ y $y_f = -d \operatorname{sen} 35.0°$. Al sustituir estas relaciones en (1) y (2), obtenemos

$$(3) \qquad d\cos 35.0° = (25.0 \text{ m/s})t$$

$$(4) \qquad -d \operatorname{sen} 35.0° = -\tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$

Al despejar t de (3) y sustituir el resultado en (4), encontramos que $d = 109$ m. Por lo tanto, las coordenadas x e y del punto en el que el esquiador aterriza son

$$x_f = d\cos 35.0° = (109 \text{ m})\cos 35.0° = \mathbf{89.3 \text{ m}}$$

$$y_f = -d \operatorname{sen} 35.0° = -(109 \text{ m})\operatorname{sen} 35.0° = \mathbf{-62.5 \text{ m}}$$

Para *finalizar* el problema, comparemos estos resultados con nuestras expectativas. Esperamos que la distancia horizontal sea del orden de 100 m, y nuestro resultado de 89.3 m es cierta-

Materiał chroniony prawem autorskim

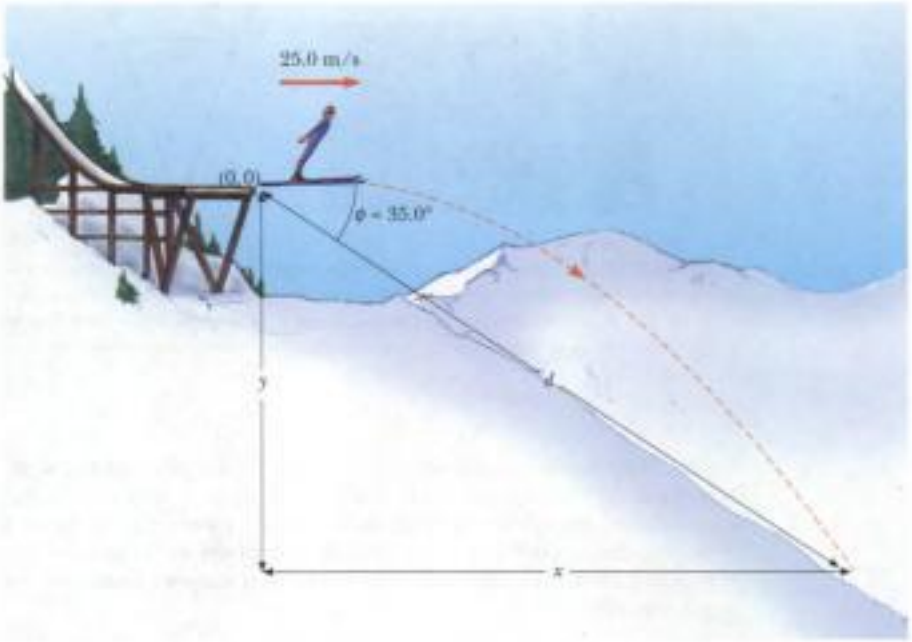


Figura 4.16 (Ejemplo 4.7) Un saltador de esquí sale de la rampa moviéndose en una dirección horizontal.

mente de este orden de magnitud. Podría ser útil calcular el intervalo de tiempo que el saltador está en el aire y compararlo con nuestro estimado de unos 4 s.

¿Qué pasaría si? Suponga que todo en este ejemplo es igual excepto que el salto en esquí es curvado, de modo que el saltador es proyectado hacia arriba a un ángulo desde el extremo de la pista. ¿Es esto un mejor diseño en términos de maximizar la longitud del salto?

Respuesta Si la velocidad inicial tiene un componente hacia arriba, el esquiador estará más tiempo en el aire y, por lo tanto, debe recorrer mayor distancia. Sin embargo, inclinar el vector de velocidad inicial reducirá el componente horizontal de la velocidad inicial. Por lo tanto, doblar hacia arriba el extremo de la pista de esquiar a un ángulo *grande* puede en realidad *reducir* la distancia. Considere el caso extremo. El esquiador es proyectado a 90° respecto a la horizontal, y simplemente sube y regresa al extremo de la pista de esquiar. Este argumento sugiere que debe haber un ángulo óptimo entre 0 y 90° que represente un equilibrio entre hacer más largo el tiempo de vuelo y más pequeño el componente horizontal de velocidad.

Podemos hallar matemáticamente este ángulo óptimo. Modificamos las ecuaciones de la (1) a la (4) en la forma siguiente, suponiendo que el esquiador es proyectado a un ángulo θ con respecto a la horizontal:

$$(1) \text{ y } (3) \quad \rightarrow \quad x_f = (v_i \cos\theta)t = d\cos\phi$$

$$(2) \text{ y } (4) \quad \rightarrow \quad y_f = (v_i \operatorname{sen}\theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = -d \operatorname{sen}\phi$$

Si eliminamos el tiempo t entre estas ecuaciones y luego usamos derivación para maximizar d en términos de θ, llegamos (después de varios pasos, vea el problema 72) a la siguiente ecuación para el ángulo θ que da el máximo valor de d:

$$\theta = 45° - \frac{\phi}{2}$$

Para el ángulo de la pendiente de la figura 4.16, $\phi = 35.0$; esta ecuación resulta en un ángulo óptimo de lanzamiento de $\theta = 27.5°$. Nótese que para un ángulo de pendiente de $\phi = 0°$, que representa un plano horizontal, esta ecuación da un ángulo óptimo de lanzamiento de $\theta = 45°$, como esperaríamos (vea la figura 4.11).

4.4 Movimiento circular uniforme

La figura 4.17a muestra un carro que se mueve en una trayectoria circular con *rapidez constante* v. Este movimiento se denomina **movimiento circular uniforme,** y se presenta en numerosas situaciones. A veces es sorprendente para estudiantes encontrar que, **aun cuando un objeto se mueve a rapidez constante en una trayectoria circular, todavía tiene aceleración.** Para ver por qué, considere la ecuación de definición para la aceleración promedio, $\bar{\mathbf{a}} = \Delta\mathbf{v}/\Delta t$ (ecuación. 4.4).

Nótese que la aceleración depende del *cambio en el vector velocidad.* Como la velocidad es una cantidad vectorial, hay dos formas en las que puede ocurrir aceleración, como dijimos en la sección 4.1: por un cambio en la *magnitud* de la velocidad y/o por un cambio en la *dirección* de la velocidad. Esta última situación ocurre para un objeto que se mueve con rapi-

¡ADVERTENCIA!

4.4 Aceleración de una partícula en movimiento circular uniforme

Recuerde que aceleración en física se define como un cambio en la *velocidad,* no un cambio en la *rapidez* (contrario a la interpretación de la vida diaria). En movimiento circular, el vector de velocidad está cambiando en dirección, de modo que hay aceleración.

Materiał chroniony prawem autorskim

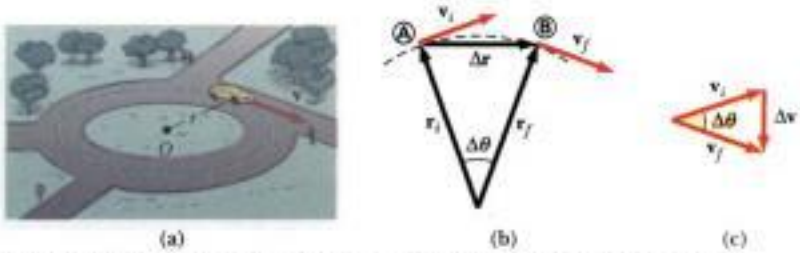


Figura 4.17 (a) Un auto que se mueve a lo largo de una trayectoria circular con rapidez constante experimenta un movimiento circular uniforme. (b) Cuando una partícula se mueve de Ⓐ a Ⓑ, su vector velocidad cambia de $\mathbf{v}_i$ a $\mathbf{v}_f$ (c) Construcción para determinar la dirección del cambio en velocidad $\Delta\mathbf{v}$, que es hacia el centro del círculo para $\Delta\mathbf{r}$ pequeño.

dez constante en una trayectoria circular. El vector velocidad es siempre tangente a la trayectoria del objeto y perpendicular al radio de la trayectoria circular. A continuación demostramos que el vector aceleración en el movimiento circular uniforme es siempre perpendicular a la trayectoria y siempre apunta hacia el centro del círculo. Una aceleración de esta naturaleza se denomina **aceleración centrípeta** (*centrípeta* significa que *busca el centro*), y su magnitud es

Aceleración centrípeta

$$a_c = \frac{v^2}{r} \tag{4.15}$$

donde r es el radio del círculo. El subíndice del símbolo de aceleración nos recuerda que la aceleración es centrípeta.

Primero observamos que la aceleración debe ser perpendicular a la trayectoria seguida por el objeto, que vamos a modelar como una partícula. Si esto no fuera cierto, habría un componente de aceleración paralelo a la trayectoria y, por lo tanto, paralelo al vector velocidad. Este componente de aceleración llevaría a un cambio en la rapidez de la partícula a lo largo de la trayectoria. Pero esto es inconsistente con nuestro plan de la situación: la partícula se mueve con rapidez constante a lo largo de la trayectoria. Por lo tanto, para un movimiento circular *uniforme*, el vector aceleración sólo puede tener un componente perpendicular a la trayectoria, que es hacia el centro del círculo.

Para obtener la ecuación 4.15, considere el diagrama de los vectores de posición y velocidad de la figura 4.17b. Además, la figura muestra el vector que representa el cambio en posición $\Delta\mathbf{r}$. La partícula sigue una trayectoria circular, parte de la cual se muestra por la curva punteada. La partícula está en Ⓐ en el tiempo t_i, y su velocidad en ese tiempo es $\mathbf{v}_i$; está en Ⓑ en algún tiempo posterior t_f, y su velocidad en ese tiempo es $\mathbf{v}_f$. Supongamos también que $\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{v}_f$ difieren sólo en dirección; sus magnitudes son las mismas (esto es, $v_i = v_f = v$, porque es movimiento circular *uniforme*). Para calcular la aceleración de la partícula, comencemos con la ecuación de definición para aceleración promedio (ecuación 4.4):

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

En la figura 4.17c, los vectores velocidad de la figura 4.17b se han dibujado de nuevo cola a cola. El vector $\Delta\mathbf{v}$ conecta las puntas de los vectores, que representan la adición vectorial $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \Delta\mathbf{v}$. En las figuras 4.17b y 4.17c, podemos identificar triángulos que nos ayudan a analizar el movimiento. El ángulo $\Delta\theta$ entre los dos vectores de posición de la figura 4.17b es el mismo que el ángulo entre los vectores de velocidad de la figura 4.17c, porque el vector de velocidad $\mathbf{v}$ es siempre perpendicular al vector de posición $\mathbf{r}$. Entonces, los dos triángulos son *semejantes*. (Dos triángulos son semejantes si el ángulo entre cualesquier dos lados es igual para ambos triángulos y si la relación de las longitudes de estos lados es la misma.) Esto hace posible que escribamos una relación entre las longitudes de los lados para los dos triángulos:

$$\frac{|\Delta\mathbf{v}|}{v} = \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{r}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

donde $v = v_i = v_f$ y $r = r_i = r_f$. De esta ecuación se puede despejar $|\Delta\mathbf{v}|$ y la expresión así obtenida se puede sustituir en $\bar{\mathbf{a}} = \Delta\mathbf{v}/\Delta t$ para dar la magnitud de la aceleración promedio sobre el intervalo de tiempo para que la partícula se mueva de Ⓐ a Ⓑ.

$$|\bar{\mathbf{a}}| = \frac{|\Delta\mathbf{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t}$$

Ahora imaginemos que los puntos Ⓐ y Ⓑ de la figura 4.17b se acercan mucho uno al otro. A medida que Ⓐ y Ⓑ se aproximan entre sí, Δt se aproxima a cero, y la razón $|\Delta\mathbf{r}|/\Delta t$ se aproxima a la rapidez v. Además, la aceleración promedio se convierte en la aceleración instantánea en el punto Ⓐ. Por lo tanto, en el límite $\Delta t \to 0$, la magnitud de la aceleración es

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Entonces, en el movimiento circular uniforme, la aceleración está dirigida hacia el centro del círculo y tiene magnitud v^2/r.

En numerosas situaciones es conveniente describir el movimiento de una partícula que se mueve con rapidez constante en un círculo de radio r en términos del **periodo** T, que se define como el tiempo necesario para una revolución completa. En el intervalo de tiempo T la partícula se mueve una distancia de $2\pi r$, que es igual a la circunferencia de la trayectoria circular de la partícula. Por lo tanto, como su rapidez es igual a la circunferencia de la trayectoria circular dividida entre el periodo, o $v = 2\pi r/T$, se deduce que

$$T \equiv \frac{2\pi r}{v} \tag{4.16}$$

Periodo del movimiento circular

¡ADVERTENCIA!

4.5 La aceleración centrípeta no es constante

Obtuvimos la magnitud del vector de aceleración centrípeta y encontramos que es constante para el movimiento circular uniforme. Pero *el vector de aceleración centrípeta no es constante.* Siempre apunta hacia el centro del círculo, pero continuamente cambia de dirección a medida que el objeto se mueve alrededor de la trayectoria circular.

Pregunta rápida 4.7 De los enunciados siguientes, ¿cuál describe correctamente el vector de aceleración centrípeta para una partícula que se mueve en una trayectoria circular? (a) constante y siempre perpendicular al vector velocidad para la partícula (b) constante y siempre paralelo al vector velocidad para la partícula (c) de magnitud constante y siempre perpendicular al vector velocidad para la partícula (d) de magnitud constante y siempre paralelo al vector velocidad para la partícula.

Pregunta rápida 4.8 Una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio r con rapidez v. Entonces aumenta su rapidez a $2v$ mientras se desplaza a lo largo de la misma trayectoria circular. La aceleración centrípeta de la partícula ha cambiado en un factor de (a) 0.25 (b) 0.5 (c) 2 (d) 4 (e) imposible determinar.

Ejemplo 4.8 La aceleración centrípeta de la Tierra

¿Cuál es la aceleración centrípeta de la Tierra cuando se mueve en su órbita alrededor del Sol?

Solución *Conceptualicemos* este problema al producir nuestra conocida imagen mental de la Tierra en una órbita circular alrededor del Sol. Vamos a simplificar el problema al modelar la Tierra como una partícula y aproximar la órbita de la Tierra como circular (en realidad es ligeramente elíptica). Esto nos permite *clasificar* este problema como el de una partícula en movimiento circular uniforme. Cuando comenzamos a *analizar* este problema, nos damos cuenta que no conocemos la rapidez orbital de la Tierra en la ecuación 4.15, pero, con ayuda de la ecuación 4.16 podemos rehacer la ecuación 4.15 en términos del periodo de la órbita terrestre, que sabemos es de un año:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$= \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11}\ \text{m})}{(1\ \text{año})^2}\left(\frac{1\ \text{año}}{3.156 \times 10^7\ \text{s}}\right)^2$$

$$= \mathbf{5.93 \times 10^{-3}\ m/s^2}$$

Para *finalizar* este problema, nótese que esta aceleración es mucho más pequeña que la aceleración en caída libre sobre la superficie terrestre. Una cosa importante que aprendemos aquí es la técnica de sustituir la rapidez v en términos del periodo T del movimiento.

Materiał chroniony prawem autorskim

4.5 Aceleración tangencial y radial

Consideremos el movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva suave, donde la velocidad cambia en dirección y en magnitud, como se describe en la figura 4.18. En esta situación, el vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria pero el vector aceleración **a** está a cierto ángulo respecto a la trayectoria. En cada uno de los tres puntos Ⓐ, Ⓑ, y Ⓒ de la figura 4.18, trazamos círculos de líneas interrumpidas que representan una porción de la trayectoria real en cada punto. El radio de los círculos es igual al radio de curvatura de la trayectoria en cada punto.

Cuando la partícula se mueve a lo largo de la trayectoria curva de la figura 4.18, la dirección del vector de aceleración total **a** cambia de un punto a otro. Este vector se puede descomponer en dos componentes, con base en un origen en el centro del círculo de línea punteada: un componente radial a_r a lo largo del radio del círculo modelo, y un componente tangencial a_t perpendicular a este radio. El vector de aceleración *total* **a** se puede escribir como el vector adición de los vectores componentes:

Aceleración total

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t \tag{4.17}$$

El componente de aceleración tangencial produce el cambio en la rapidez de la partícula. Este componente es paralelo a la velocidad instantánea, y está dado por

Aceleración tangencial

$$a_t = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} \tag{4.18}$$

El componente de aceleración radial surge del cambio en dirección del vector velocidad y está dado por

Aceleración radial

$$a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r} \tag{4.19}$$

donde r es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto en cuestión. Reconocemos el componente radial de la aceleración como la aceleración centrípeta discutida en la sección 4.4. El signo negativo indica que la dirección de la aceleración centrípeta es hacia el centro del círculo que representa el radio de curvatura, que es opuesta a la dirección del vector unitario radial $\hat{\mathbf{r}}$, que siempre apunta alejándose del centro del círculo.

Como $\mathbf{a}_r$ y $\mathbf{a}_t$ son vectores componentes perpendiculares de **a**, se deduce que la magnitud de **a** es $a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$. A una rapidez dada, a_r es grande cuando el radio de curvatura es pequeño (como en los puntos Ⓐ y Ⓑ de la figura 4.18) y pequeña cuando r es grande (como en el punto Ⓒ). La dirección de $\mathbf{a}_t$ es o bien en la misma dirección de **v** (si v es creciente) u opuesta a **v** (si v es decreciente).

En el movimiento circular uniforme, donde v es constante, $a_t = 0$ y la aceleración es siempre completamente radial, como describimos en la sección 4.4. En otras palabras, el movimiento circular uniforme es un caso especial de movimiento a lo largo de una trayectoria general curva. Además, si la dirección de **v** no cambia, entonces no hay aceleración radial y el movimiento es unidimensional (en este caso, $a_r = 0$, pero a_t puede no ser cero).

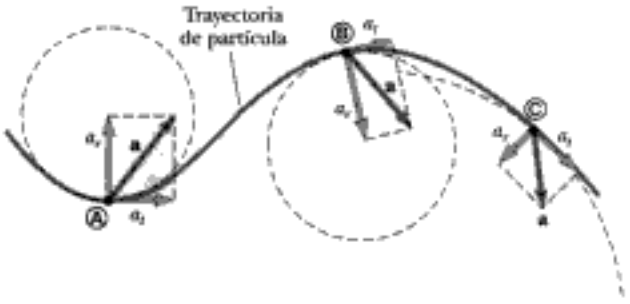


Figura 4.18 Movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva arbitraria que se encuentra en el plano xy. Si el vector velocidad **v** (siempre tangente a la trayectoria) cambia en dirección y magnitud, los componentes de la aceleración **a** son un componente tangencial a_t y un componente radial a_r.

Materiał chroniony prawem autorskim

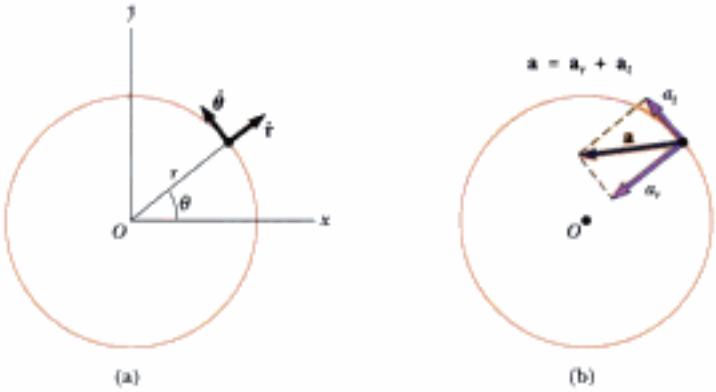


Figura 4.19 (a) Descripciones de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. (b) La aceleración total **a** de una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria curva (que en cualquier instante es parte de un círculo de radio r) es la adición de vectores componentes radial y tangencial. El vector componente radial está dirigido hacia el centro de curvatura. Si el componente tangencial de aceleración se hace cero, la partícula sigue un movimiento circular uniforme.

Es conveniente escribir la aceleración de una partícula que se mueve en una trayectoria circular en términos de vectores unitarios. Hacemos esto al definir los vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ que se muestran en la figura 4.19a, donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario que se encuentra a lo largo del radio vector y dirigido radialmente hacia fuera desde el centro del círculo y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es un vector unitario tangente al círculo. La dirección de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ está en la dirección de θ creciente, donde θ se mide en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj desde el eje x positivo. Nótese que $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ "se mueven junto con la partícula" y por lo tanto varían en el tiempo. Con el uso de esta notación, podemos expresar la aceleración total como

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}} \tag{4.20}$$

Estos vectores se describen en la figura 4.19b.

Pregunta rápida 4.9 Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria y su rapidez aumenta con el tiempo. ¿En cuál de los siguientes casos son paralelos sus vectores de aceleración y velocidad? (a) la trayectoria es circular (b) la trayectoria es recta (c) la trayectoria es una parábola (d) nunca.

Pregunta rápida 4.10 Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria y su rapidez aumenta con el tiempo. ¿En cuál de los siguientes casos son perpendiculares sus vectores de aceleración y velocidad en cualquier parte a lo largo de la trayectoria? (a) la trayectoria es circular (b) la trayectoria es recta (c) la trayectoria es una parábola (d) nunca.

Ejemplo 4.9 Sobre la cuesta

Un auto tiene una aceleración constante de 0.300 m/s² paralela a camino. El auto pasa sobre una cuesta del camino tal que la parte más alta de la cuesta tiene la forma de un círculo de 500 m de radio. En el momento en que el auto está en la parte más alta de la cuesta, su vector de velocidad es horizontal y tiene una magnitud de 6.00 m/s. ¿Cuál es la dirección del vector aceleración total para el auto en este instante?

Solución *Conceptualicemos* la situación con el uso de la figura 4.20a. Debido a que el auto se mueve a lo largo de una trayectoria curva, podemos *clasificar* éste como un problema que comprende una partícula que experimenta aceleraciones tangencial y radial. Ahora reconocemos que éste es un problema relativamente sencillo de sustitución. La aceleración radial está dada por la ecuación 4.19. Con $v = 6.00$ m/s y $r = 500$ m, encontramos que

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\frac{(6.00\ \text{m/s})^2}{500\ \text{m}} = -0.0720\ \text{m/s}^2$$

El vector de aceleración radial está dirigido en línea recta hacia abajo, mientras que el vector de aceleración tangencial tiene

Materiał chroniony prawem autorskim

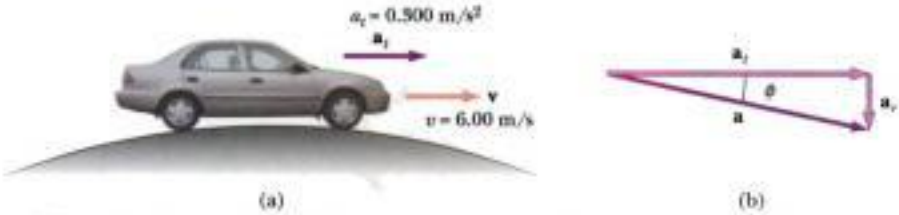


Figura 4.20 (Ejemplo 4.9) (a) Un auto pasa sobre una cuesta que tiene forma de círculo. (b) El vector de aceleración total **a** es la adición de los vectores de aceleraciones tangencial y radial $\mathbf{a}_t$ y $\mathbf{a}_r$.

magnitud de 0.300 m/s² y es horizontal. Como $\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$, la magnitud de **a** es

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(-0.0720)^2 + (0.300)^2}\ \text{m/s}^2$$

$$= \mathbf{0.309\ m/s^2}$$

Si ϕ es el ángulo entre **a** y la horizontal, entonces

$$\phi = \tan^{-1}\frac{a_r}{a_t} = \tan^{-1}\left(\frac{-0.0720\ \text{m/s}^2}{0.300\ \text{m/s}^2}\right) = \mathbf{-13.5°}$$

Este ángulo se mide hacia abajo desde la horizontal. (Vea la figura 4.20b.)

4.6 Velocidad y aceleración relativas

En esta sección describimos la forma en que las percepciones de diferentes observadores en distintos marcos de referencia están relacionadas entre sí. Encontramos que observadores en diferentes marcos de referencia pueden medir distintas posiciones, velocidades y aceleraciones para una partícula dada. Esto es, dos observadores que se mueven en relación uno con otro generalmente no concuerdan en el resultado de una medición.

Como ejemplo, considere dos observadoras que ven a un hombre que camina en una banda transportadora en un aeropuerto, como en la figura 4.21. La mujer que está de pie también en la banda verá que el hombre se mueve a una rapidez normal de caminar. La mujer que observa desde un piso estacionario verá que el hombre se mueve con más rapidez, porque la rapidez de la banda se combina con la del caminar del hombre. Ambas observadoras ven al mismo hombre y llegan a diferentes valores para la rapidez de éste. Ambas tienen razón; la diferencia en sus mediciones se debe a la velocidad relativa de sus marcos de referencia.

Suponga que una persona que pasea en una patineta (observador A) lanza una pelota en forma tal que ésta aparece, en el marco de referencia de la persona, que se mueve pri-

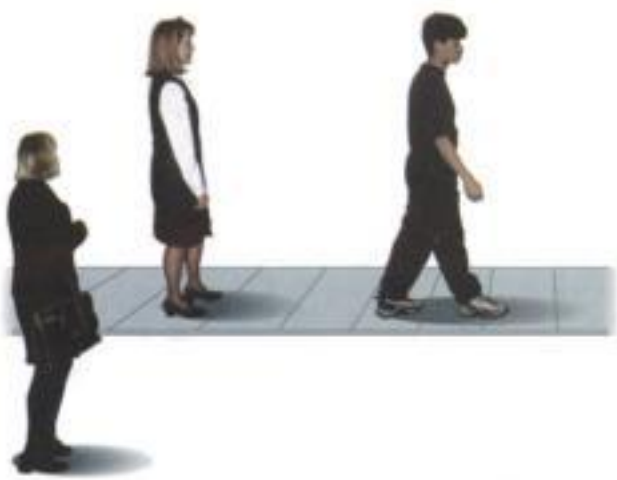


Figura 4.21 Dos observadoras miden la rapidez de un hombre que camina en una banda transportadora. La mujer que está de pie sobre la banda ve al hombre moverse con menor rapidez que la mujer que observa desde el piso estacionario.

Materiał chroniony prawem autorskim

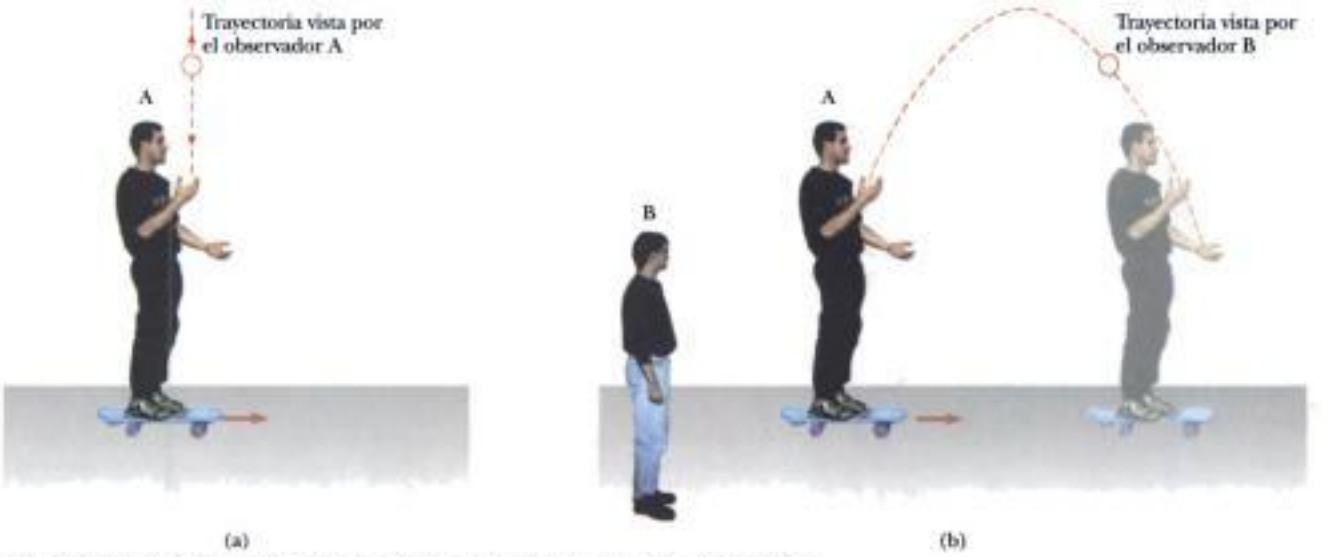


Figura 4.22 (a) El observador A sobre una patineta en movimiento lanza una pelota hacia arriba y la ve subir y bajar en una trayectoria recta. (b) El observador B estacionario ve una trayectoria parabólica para la misma pelota.

mero en línea recta hacia arriba y luego en línea recta hacia abajo a lo largo de la misma línea vertical, como se muestra en la figura 4.22a. Un observador situado en B en el suelo ve la trayectoria de la pelota como una parábola, como se ilustra en la figura 4.22b. Respecto al observador B, la pelota tiene un componente vertical de velocidad (que resulta de la velocidad inicial hacia arriba y la aceleración hacia abajo debida a la gravedad) y un componente horizontal.

Otro ejemplo de este concepto es la noción de un paquete que se deja caer desde un avión que vuela con velocidad constante, situación que estudiamos en el ejemplo 4.6. Un observador en el avión ve el movimiento del paquete como una línea recta hacia abajo, hacia el suelo, pero el explorador extraviado en tierra ve la trayectoria del paquete como una parábola. Una vez que el paquete se deja caer, y el avión continúa desplazándose en dirección horizontal con la misma velocidad, el paquete llega al suelo directamente abajo del avión (si suponemos que se desprecia la resistencia del aire).

En una situación más general, considere una partícula situada en el punto Ⓐ de la figura 4.23. Imagine que el movimiento de esta partícula está siendo descrito por dos observadores, uno en el marco de referencia S, fijo con respecto a la superficie terrestre, y el otro en el marco de referencia S', que se mueve a la derecha con respecto a S (y por lo tanto con respecto a la Tierra) con una velocidad constante $\mathbf{v}_0$. (Respecto a un observador en S', S se mueve a la izquierda con una velocidad $-\mathbf{v}_0$.) En donde un observador está de pie en un marco de referencia es irrelevante en este análisis, pero para fines de este estudio pongamos un observador en su respectivo origen.

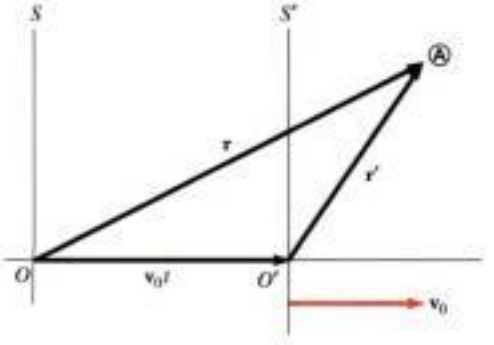


Figura 4.23 Una partícula situada en Ⓐ es descrita por dos observadores, uno en el marco de referencia fijo S, y el otro en el marco S', que se mueve a la derecha con velocidad constante $\mathbf{v}_0$. El vector $\mathbf{r}$ es el vector de posición de la partícula con respecto a S, y $\mathbf{r}'$ es su vector de posición con respecto a S'.

Materiał chroniony prawem autorskim

Definimos el tiempo $t = 0$ como el instante en el que los orígenes de los dos marcos de referencia coinciden en el espacio. Así, en el tiempo t, los orígenes de los marcos de referencia estarán separados una distancia $\mathbf{v}_0 t$. Marcamos la posición de la partícula con respecto al marco S con el vector de posición $\mathbf{r}$ y la relativa al marco S' con el vector de posición $\mathbf{r}'$, ambos en el tiempo t. Los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ están relacionados entre sí por medio de la expresión $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_0 t$, o sea

Transformación de coordenadas Galileanas

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t \tag{4.21}$$

Si derivamos la ecuación 4.21 con respecto al tiempo y observamos que $\mathbf{v}_0$ es constante, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}_0$$

Transformación de velocidad Galileana

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \tag{4.22}$$

donde $\mathbf{v}'$ es la velocidad de la partícula observada en el marco S' y $\mathbf{v}$ es su velocidad observada en el marco S. Las ecuaciones 4.21 y 4.22 se conocen como **ecuaciones de transformación Galileanos,** que relacionan la posición y velocidad de una partícula según se midan por observadores en movimiento relativo.

Aun cuando observadores en dos marcos miden velocidades diferentes para la partícula, miden la *misma aceleración* cuando $\mathbf{v}_0$ es constante. Podemos verificar esto al tomar la derivada respecto al tiempo en la ecuación 4.22:

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}$$

Debido a que $\mathbf{v}_0$ es constante, $d\mathbf{v}_0/dt = 0$. Por lo tanto, concluimos que $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$ porque $\mathbf{a}' = d\mathbf{v}'/dt$ y $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$. Esto es, **la aceleración de la partícula medida por un observador en un marco de referencia es la misma que la medida por otro observador que se mueve con velocidad constante con respecto al primer marco.**

Pregunta rápida 4.11 Una pasajera, observadora A, en un auto que corre a una velocidad horizontal constante de magnitud 60 mi/h, sirve una taza de café para el cansado conductor. El observador B está de pie al lado del camino y observa por la ventana del auto el proceso de servir el café, cuando el auto pasa. ¿Qué observador(es) ve una trayectoria parabólica para el café cuando se mueve en el aire? (a) A (b) B (c) A y B (d) ni A ni B.

Ejemplo 4.10 Un bote que cruza un río

Un bote que se dirige al norte cruza un ancho río con una rapidez de 10.0 km/h con respecto al agua. El agua del río tiene una rapidez uniforme de 5.00 km/h en dirección al este con respecto a la Tierra. Determine la velocidad del bote con respecto a un observador de pie en cualquiera de las márgenes.

Solución Para *conceptualizar* este problema, imagine cruzar un río mientras la corriente lo empuja a lo largo del río. No podrá avanzar directamente a cruzar el río, pero terminará aguas abajo como lo sugiere la figura 4.24. Debido a las velocidades separadas del bote y del agua, podemos *clasificar* éste como un problema en el que intervienen velocidades relativas. Vamos a *analizar* este problema con las técnicas descritas en esta sección. Conocemos v_{br}, la velocidad del *bote* con respecto al *río*, y v_{rE}, la velocidad del *bote* con respecto a la *Tierra*. La relación entre estas tres cantidades es

$$\mathbf{v}_{bE} = \mathbf{v}_{br} + \mathbf{v}_{rE}$$

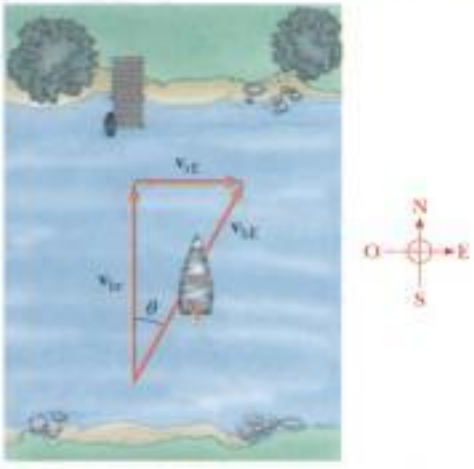


Figura 4.24 (Ejemplo 4.10) Un bote apunta directamente al otro lado del río y termina aguas abajo.

Materiał chroniony prawem autorskim

Los términos de la ecuación deben ser manipulados como cantidades vectoriales; los vectores se ilustran en la figura 4.24. La cantidad $\mathbf{v}_{br}$ es en dirección al norte, $\mathbf{v}_{rE}$ es en dirección al este, y el vector adición de las dos, $\mathbf{v}_{bE}$, está a un ángulo θ, como se define en la figura 4.24. Entonces, podemos hallar la rapidez v_{bE} del bote con respecto a la Tierra si usamos el teorema de Pitágoras:

$$v_{bE} = \sqrt{v_{br}^2 + v_{rE}^2} = \sqrt{(10.0)^2 + (5.00)^2}\ \text{km/h}$$
$$= \mathbf{11.2\ km/h}$$

La dirección de $\mathbf{v}_{bE}$ es

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{rE}}{v_{br}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{10.0}\right) = \mathbf{26.6°}$$

El bote se está moviendo a una rapidez de 11.2 km/h en la dirección 26.6° al este del norte con respecto a la Tierra. Para *finalizar* el problema, observamos que la rapidez de 11.2 km/h es mayor que la rapidez del bote de 10.0 km/h. La velocidad de la corriente se suma a la del navegante para darle una rapidez mayor. Nótese, en la figura 4.24, que su velocidad resultante está a un ángulo con respecto a la dirección recta al otro lado del río, de modo que terminará aguas abajo, como pronosticado.

Ejemplo 4.11 ¿Qué rumbo debemos tomar?

Si el bote del ejemplo precedente navega con la misma rapidez de 10.0 km/h con respecto al río, y ha de seguir rumbo al norte, como se ve en la figura 4.25, ¿cuál debe ser su rumbo?

Solución Este ejemplo es una extensión del anterior, de modo que ya hemos *conceptualizado* y *clasificado* el problema. El *análisis* ahora comprende el nuevo triángulo que se ilustra en la figura 4.25. Al igual que en el ejemplo anterior, conocemos $\mathbf{v}_{rE}$ y la magnitud del vector v_{br}, y deseamos que $\mathbf{v}_{bE}$ esté dirigido a través del río. Nótese la diferencia entre el triángulo de la figura 4.24 y el de la figura 4.25 —la hipotenusa de la figura 4.25 ya no es $\mathbf{v}_{bE}$. Por lo tanto, cuando usamos el teorema de Pitágoras para hallar $\mathbf{v}_{bE}$ en esta situación, obtenemos

$$v_{bE} = \sqrt{v_{br}^2 - v_{rE}^2} = \sqrt{(10.0)^2 - (5.00)^2}\ \text{km/h} = 8.66\ \text{km/h}$$

Ahora que conocemos la magnitud de $\mathbf{v}_{bE}$, podemos hallar la dirección en la que el bote se dirige:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{rE}}{v_{bE}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{8.66}\right) = \mathbf{30.0°}$$

Para *finalizar* este problema, sabemos que el bote debe dirigirse aguas arriba para desplazarse directamente al norte a través del del río. Para la situación dada, el bote debe seguir un curso de 30.0° al oeste del norte.

¿Qué pasaría si? Imagine que los dos botes de los ejemplos 4.10 y 4.11 compiten para cruzar el río. ¿Cuál bote llega primero a la margen opuesta?

Respuesta En el ejemplo 4.10, la velocidad de 10 km/h está apuntada directamente a la margen opuesta del río. En el ejemplo 4.11, la velocidad que está dirigida al otro lado del río tiene una magnitud de sólo 8.66 km/h. Por lo tanto, el bote del ejemplo 4.10 tiene un componente de velocidad más grande directamente al otro lado del río y llegará primero.

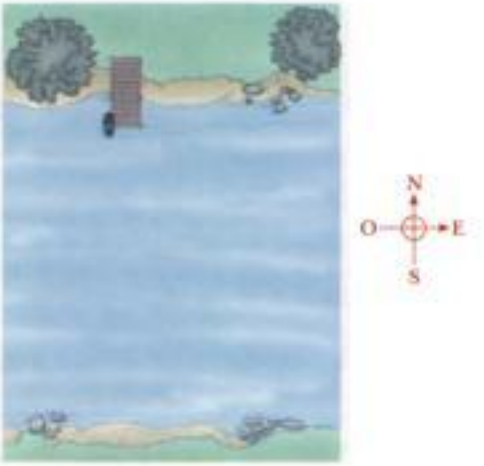


Figura 4.25 (Ejemplo 4.11) Para ir directamente al otro lado del río, el bote debe navegar aguas arriba.

RESUMEN

Si una partícula se mueve con aceleración $\mathbf{a}$ *constante* y tiene velocidad $\mathbf{v}_i$ y posición $\mathbf{r}_i$ en $t = 0$, sus vectores de velocidad y posición en algún tiempo posterior t son

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t \tag{4.8}$$

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \tag{4.9}$$

Para movimiento en dos dimensiones en el plano xy bajo aceleración constante, cada una de estas dos expresiones vectoriales es equivalente a dos expresiones de componentes, una para el movimiento en la dirección x y una para el movimiento en la dirección y.

El **movimiento de proyectiles** es un tipo de movimiento bidimensional bajo aceleración constante, donde $a_x = 0$ y $a_y = -g$. Es útil considerar el movimiento de proyectiles como la superposición de dos movimientos: (1) movimiento a velocidad constante en la

Materiał chroniony prawem autorskim

dirección x y (2) movimiento en caída libre en la dirección vertical sujeta a aceleración constante hacia abajo de magnitud $g = 9.80\ \text{m/s}^2$.

Una partícula que se mueve en un círculo de radio r con rapidez constante v está en **movimiento circular uniforme.** Experimenta una aceleración radial $\mathbf{a}_r$ porque la dirección de $\mathbf{v}$ cambia en el tiempo. La magnitud de $\mathbf{a}_r$ es la **aceleración centrípeta** a_c:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \tag{4.19}$$

y su dirección es siempre hacia el centro del círculo.

Si una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria curva en forma tal que la magnitud y dirección de $\mathbf{v}$ cambian en el tiempo, entonces la partícula tiene un vector de aceleración que puede ser descrito por dos vectores componentes: (1) un vector componente radial $\mathbf{a}_r$ que produce el cambio en dirección de $\mathbf{v}$ y (2) un vector componente tangencial $\mathbf{a}_t$ que produce el cambio en magnitud de $\mathbf{v}$. La magnitud de $\mathbf{a}_r$ es v^2/r, y la magnitud de $\mathbf{a}_t$ es $d|\mathbf{v}|/dt$.

La velocidad $\mathbf{v}$ de una partícula medida en un marco de referencia fijo S se puede relacionar a la velocidad $\mathbf{v}'$ de la misma partícula medida en un marco de referencia móvil S' por

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \tag{4.22}$$

donde $\mathbf{v}_0$ es la velocidad de S' con respecto a S.

PREGUNTAS

1. ¿Puede un objeto acelerar si su rapidez es constante? ¿Puede un objeto acelerar si su velocidad es constante?
2. Si el lector conoce los vectores de posición de una partícula en dos puntos a lo largo de su trayectoria, y también conoce el tiempo que le tomó moverse de un punto a otro, ¿puede determinar la velocidad instantánea de la partícula? ¿y su velocidad promedio? Explique.
3. Construya diagramas de movimiento que muestren la velocidad y aceleración de un proyectil en varios puntos a lo largo de su trayectoria si (a) el proyectil es lanzado horizontalmente y (b) el proyectil es lanzado a un ángulo θ con respecto a la horizontal.
4. Una pelota de béisbol es lanzada con una velocidad inicial de $(10\hat{\mathbf{i}} + 15\hat{\mathbf{j}})$ m/s. Cuando llega a la parte más alta de su trayectoria, ¿cuáles son (a) su velocidad y (b) su aceleración? Desprecie el efecto de la resistencia del aire.
5. Una pelota de béisbol es lanzada en forma tal que se conocen sus componentes iniciales x e y de velocidad. Desprecie la resistencia del aire y describa cómo calcularía usted, en el instante en que la pelota llega a la parte más alta de su trayectoria, (a) su posición, (b) su velocidad, y (c) su aceleración. ¿Cómo cambiarían estos resultados si se tomara en cuenta la resistencia del aire?
6. Una nave espacial vuela en el espacio a velocidad constante. De pronto una fuga de gas en el costado de la nave le da una aceleración constante en una dirección perpendicular a la velocidad inicial. La orientación de la nave no cambia, de modo que la aceleración permanece perpendicular a la dirección original de la velocidad. ¿Cuál es la forma de la trayectoria seguida por la nave en esta situación?
7. Una pelota es lanzada horizontalmente desde lo alto de un edificio. Un segundo después, otra pelota es proyectada horizontalmente desde el mismo punto con la misma velocidad. ¿En qué punto del movimiento estarán más cerca las pelotas una de otra? ¿La primera pelota siempre se moverá más rápido que la segunda? ¿Cuál será el intervalo de tiempo cuando las pelotas regresen al suelo? ¿Puede cambiar la proyección horizontal de velocidad de la segunda pelota, para que las pelotas lleguen a tierra al mismo tiempo?
8. Una piedra se deja caer en el mismo instante que una pelota, a la misma elevación inicial, se lanza horizontalmente. ¿Cuál tendrá la mayor velocidad cuando llegue al nivel del suelo?
9. Determine cuál de los siguientes objetos en movimiento obedece las ecuaciones de movimiento de proyectiles creadas en este capítulo. (a) Una pelota se lanza en una dirección arbitraria. (b) Un avión a reacción cruza el cielo con sus motores empujando el avión hacia delante. (c) Un cohete despega de su plataforma de lanzamiento. (d) Un cohete se mueve en el cielo después que sus motores se han apagado. (e) Una piedra se lanza bajo el agua.
10. ¿Cómo se puede lanzar un proyectil para que tenga rapidez cero en la parte más alta de su trayectoria? ¿Para que tenga rapidez diferente de cero en la parte superior de su trayectoria?
11. Dos proyectiles son lanzados con la misma magnitud de velocidad inicial, uno a un ángulo θ con respecto al nivel del suelo y el otro a un ángulo de $90 - \theta$. Ambos proyectiles llegarán al suelo a la misma distancia desde el punto de lanzamiento. Ambos proyectiles, ¿estarán en el aire durante el mismo tiempo?
12. Un proyectil es lanzado a cierto ángulo con respecto a la horizontal, con una rapidez inicial v_0, si la resistencia del aire es despreciable. ¿Es el proyectil un cuerpo en caída libre? ¿Cuál es su aceleración en la dirección vertical? ¿Cuál es su aceleración en la dirección horizontal?
13. Exprese cuál de las siguientes cantidades, si las hay, permanece constante cuando un proyectil se desplaza por su trayectoria parabólica: (a) rapidez, (b) aceleración, (c) componente horizontal de velocidad, (d) componente vertical de velocidad.
14. Un proyectil es disparado a un ángulo de 30° de la horizontal con una rapidez inicial. ¿Disparar el proyectil a qué otro ángulo

Materiał chroniony prawem autorskim

resulta en el mismo alcance horizontal si la rapidez inicial es la misma en ambos casos? Desprecie la resistencia del aire.

15. El alcance máximo de un proyectil se presenta cuando es lanzado a un ángulo de 45.0° con la horizontal, si se desprecia la resistencia del aire. Si no se desprecia, ¿será el ángulo óptimo mayor o menor a 45.0°? Explique.

16. Un proyectil es lanzado en la Tierra a una velocidad inicial. Otro proyectil es lanzado en la Luna con la misma velocidad inicial. Si se desprecia la resistencia del aire, ¿cuál proyectil tiene el mayor alcance? ¿Cuál llega a la mayor altitud? (Nótese que la aceleración en caída libre en la Luna es alrededor de 1.6 m/s^2.)

17. Una moneda en una mesa recibe una velocidad horizontal tal que acaba por salir del extremo de la mesa y llegar al suelo. En el instante en que la moneda sale del extremo de la mesa, una pelota se suelta desde la misma altura y cae al piso. Explique por qué los dos objetos llegan simultáneamente al suelo, aun cuando la moneda tiene una velocidad inicial.

18. Explique si las siguientes partículas tienen o no tienen aceleración: (a) una partícula se mueve en línea recta con rapidez constante y (b) una partícula se mueve alrededor de una curva con rapidez constante.

19. Corrija el siguiente enunciado: "El auto de carreras toma la vuelta a una velocidad constante de 90 millas por hora".

20. En el extremo de un arco de péndulo, su velocidad es cero. ¿Su aceleración también es cero en ese punto?

21. Un objeto se mueve en una trayectoria circular con rapidez constante v. (a) ¿Es constante la velocidad del objeto? (b) ¿Es constante su aceleración? Explique.

22. Describa la forma en que un conductor dirige un auto que corre a una rapidez constante para que (a) la aceleración sea cero o (b) la magnitud de la aceleración permanezca constante.

23. Una patinadora está ejecutando una figura de ocho, formada por dos trayectorias circulares tangentes e iguales. En el primer círculo ella aumenta su rapidez uniformemente, y durante el segundo círculo se mueve con una rapidez constante. Trace un diagrama de movimiento que muestre sus vectores de velocidad y aceleración en varios puntos a lo largo de la trayectoria del movimiento.

24. Con base en su observación y experiencia, trace un diagrama de movimiento que muestre los vectores de posición, velocidad y aceleración para un péndulo que oscila en un arco que lo lleva de una posición inicial de 45° a la derecha de la línea central vertical a una posición final 45° a la izquierda de la línea vertical central. El arco es un cuadrante de círculo, y el lector debe usar el centro del círculo como el origen para los vectores de posición.

25. ¿Cuál es la diferencia fundamental entre los vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$?

26. Un marinero deja caer una llave desde lo alto del mástil de un bote de velas cuando éste se mueve rápida y uniformemente en línea recta. ¿Dónde golpeará la llave en cubierta? (Galileo planteó esta pregunta).

27. Una pelota es lanzada al aire, hacia arriba, por un pasajero que va a bordo de un tren que se mueve a velocidad constante. (a) Describa la trayectoria de la pelota según la vea el pasajero. Describa la trayectoria según la vea un observador de pie junto a las vías fuera del tren. (b) ¿Cómo cambiarían estas observaciones si el tren fuera acelerando a lo largo de la vía?

28. Un pasajero a bordo de un tren que se mueve con velocidad constante deja caer una cuchara. ¿Cuál es la aceleración de la cuchara con respecto a (a) el tren y (b) la Tierra?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, difícil = solución guiada con sugerencias disponibles en http://www.pse6.com

= use computadora para resolver el problema = problemas numéricos y simbólicos por pares

Sección 4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración

1. Un automovilista se dirige al sur a 20.0 m/s durante 3.00 minutos, luego gira al oeste a 25.0 m/s por 2.00 minutos, y finalmente viaja al noroeste a 30.0 m/s durante 1.00 minuto. Para este viaje de 6.00 minutos, encuentre (a) el desplazamiento vectorial total, (b) la rapidez promedio, y (c) la velocidad promedio. El eje positivo de las x apunta al este.

2. Una pelota de golf es golpeada en la "tee" en el borde de un acantilado. Sus coordenadas x e y como funciones del tiempo están dadas por las siguientes expresiones:

$$x = (18.0\ \text{m/s})t$$

$$\text{y} \qquad y = (4.00\ \text{m/s})t - (4.90\ \text{m/s}^2)t^2$$

(a) Escriba una expresión vectorial para hallar la posición de la pelota como función del tiempo, usando los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$. Con el uso de derivadas, obtenga expresiones para (b) el vector velocidad $\mathbf{v}$ como función del tiempo y (c) el vector aceleración $\mathbf{a}$ como función del tiempo. A continuación use notación de vectores unitarios para escribir expresiones para (d) la posición, (e) la velocidad, 7 (f) la aceleración de la pelota de golf, todo en t = 3.00 s.

3. Cuando el Sol está directamente en lo alto, un halcón vuela en picada hacia tierra con una velocidad constante de 5.00 m/s a 60.0°, por debajo de la horizontal. Calcule la rapidez de su sombra al nivel del suelo.

4. Las coordenadas de un objeto que se mueve en el plano xy varían con el tiempo según las ecuaciones $x = -(5.00\ \text{m})\ \text{sen}(\omega t)$ y $y = (4.00\ \text{m}) - (5.00\ \text{m})\cos(\omega t)$, donde ω es una constante y t está en segundos. (a) Determine los componentes de velocidad y componentes de aceleración en $t = 0$. (b) Escriba expresiones para el vector de posición, el vector de velocidad, y el vector de aceleración en cualquier tiempo $t > 0$. (c) Describa la trayectoria del objeto en una gráfica xy.

Materiał chroniony prawem autorskim

Sección 4.2 Movimiento bidimensional con aceleración constante

5. En $t = 0$, una partícula que se mueve en el plano xy con aceleración constante tiene una velocidad de $\mathbf{v}_i = (3.00\hat{\mathbf{i}} - 2.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s y está en el origen. En $t = 3.00$ s, la velocidad de la partícula es $\mathbf{v} = (9.00\hat{\mathbf{i}} + 7.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s. Encuentre (a) la aceleración de la partícula y (b) sus coordenadas en cualquier tiempo t.

6. El vector de posición de una partícula varía en el tiempo de acuerdo con la expresión $\mathbf{r} = (3.00\hat{\mathbf{i}} - 6.00t^2\hat{\mathbf{j}})$ m. (a) Encuentre expresiones para la velocidad y aceleración como funciones del tiempo. (b) Determine la posición y velocidad de la partícula en $t = 1.00$ s.

7. Un pez que nada en un plano horizontal tiene velocidad $\mathbf{v}_i = (4.00\hat{\mathbf{i}} + 1.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s en un punto en el océano donde la posición relativa a cierta piedra es $\mathbf{r}_i = (10.0\hat{\mathbf{i}} - 4.00\hat{\mathbf{j}})$ m. Después que el pez nada con aceleración constante durante 20.0 s, su velocidad es $\mathbf{v} = (20.0\hat{\mathbf{i}} - 5.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s (a) ¿Cuáles son los componentes de la aceleración? (b) ¿Cuál es la dirección de la aceleración con respecto al vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$? (c) Si el pez mantiene su aceleración constante, ¿dónde está en $t = 25.0$ s, y en qué dirección se está moviendo?

8. Una partícula que está situada inicialmente en el origen, tiene una aceleración de $\mathbf{a} = 3.00\hat{\mathbf{j}}$ m/s^2 y una velocidad inicial de $\mathbf{v}_i = 500\hat{\mathbf{i}}$ m/s. Encuentre (a) el vector de posición y velocidad en cualquier tiempo t y (b) las coordenadas y rapidez de la partícula en $t = 2.00$ s.

9. No es posible ver objetos muy pequeños, por ejemplo virus, con el uso de un microscopio de luz ordinario. Un microscopio electrónico puede ver tales objetos con el uso de un haz electrónico en lugar de un haz luminoso. La microscopía de electrones ha resultado ser de valor incalculable para investigaciones de virus, membranas celulares y estructuras subcelulares, superficies bacteriales, receptores visuales, cloroplastos y las propiedades contráctiles de músculos. Las "lentes" de un microscopio electrónico consisten en campos eléctricos y magnéticos que controlan el haz de electrones. Como ejemplo de la manipulación de un haz de electrones, considere un electrón que se desplaza alejándose del origen a lo largo del eje x en el plano xy con velocidad inicial $\mathbf{v}_i = v_i\hat{\mathbf{i}}$. Cuando pasa por la región $x = 0$ a $x = d$, el electrón experimenta una aceleración $\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}$, donde a_x y a_y son constantes. Para el caso $v_i = 1.80 \times 10^7$ m/s, $a_x = 8.00 \times 10^{14}$ m/s^2 and $a_y = 1.60 \times 10^{15}$ m/s^2, determine en $x = d = 0.0100$ m (a) la posición del electrón, (b) la velocidad del electrón, (c) la rapidez del electrón, y (d) la dirección de desplazamiento del electrón (es decir, el ángulo entre su velocidad y el eje x).

Sección 4.3 Movimiento de proyectiles

Nota: Ignore la resistencia del aire en todos los problemas y tome $g = 9.80$ m/s^2 en la superficie de la Tierra.

10. Para desencadenar una avalancha en las faldas de una montaña, se dispara un obús de artillería con una velocidad inicial de 300 m/s a 55.0° sobre la horizontal. El obús explota en el costado de la montaña 42.0 s después de ser disparado. ¿Cuáles son las coordenadas x e y del obús donde explota, con respecto a su punto de disparo?

11. En un bar local, un cliente desliza un tarro vacío de cerveza por la barra para que se lo vuelvan a llenar. El cantinero está momentáneamente distraído y no ve el tarro, que sale despedido de la barra y cae al suelo a 1.40 m de la base de la barra. Si la altura de ésta es 0.860 m, (a) ¿con qué velocidad salió el tarro de la barra, y (b) ¿cuál era la dirección de la velocidad del tarro justo antes de tocar el piso?

12. En un bar local, un cliente desliza un tarro vacío de cerveza por la barra para que se lo vuelvan a llenar. El cantinero está momentáneamente distraído y no ve el tarro, que sale despedido de la barra y cae al suelo a una distancia d de la base de la barra. La altura de la barra es h. (a) ¿con qué velocidad salió el tarro de la barra, y (b) ¿cuál era la dirección de la velocidad del tarro justo antes de tocar el piso?

13. Una estrategia en una guerra con bolas de nieve es lanzar una bola de nieve a un ángulo alto sobre el nivel del suelo. Mientras un oponente está observando la primera, una segunda bola de nieve es lanzada a un ángulo bajo y sincronizada para llegar antes o al mismo tiempo que la primera. Suponga que ambas bolas de nieve son lanzadas con una rapidez de 25.0 m/s. La primera es lanzada a un ángulo de 70.0° con respecto a la horizontal. (a) ¿A qué ángulo debe ser lanzada la segunda bola de nieve para que llegue al mismo punto que la primera? (b) ¿Cuántos segundos después debe ser lanzada la segunda bola de nieve para que llegue al mismo tiempo que la primera?

14. Una astronauta en un extraño planeta encuentra que ella puede saltar una distancia horizontal máxima de 15.0 m si su rapidez inicial es 3.00 m/s. ¿Cuál es la aceleración en caída libre en el planeta?

15. Un proyectil es disparado en forma tal que su alcance horizontal es igual a tres veces su altura máxima. ¿Cuál es el ángulo de proyección?

16. Una piedra es lanzada hacia arriba desde el nivel del suelo en forma tal que la altura máxima de su vuelo es igual a su alcance horizontal d. (a) ¿A qué ángulo θ es lanzada la piedra? (b) **¿Qué pasaría si?** Su respuesta a la parte (a) ¿sería diferente en un planeta diferente? (c) ¿Cuál es el alcance $d_{máx}$ que la piedra puede alcanzar si es lanzada a la misma rapidez pero a un ángulo óptimo para alcance máximo?

17. Una pelota es lanzada desde la ventana de un piso alto de un edificio. La pelota es lanzada a una velocidad inicial de 8.00 m/s a un ángulo de 20.0° por debajo de la horizontal. Llega al suelo 3.00 s después. (a) ¿A qué distancia horizontal desde la base del edificio está el punto en el que la pelota llega al suelo? (b) Encuentre la altura desde la cual fue lanzada la pelota. (c) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar a un punto a 10.0 m abajo del nivel del lanzamiento?

18. Un pez arquero pequeño (20 a 25 cm de largo) vive en aguas salobres del sudeste de Asia, desde la India hasta las Filipinas. Este pez de nombre tan bien dado capsura su presa al lanzar un chorro de gotas de agua a un insecto, ya sea que éste se encuentre en reposo o en pleno vuelo. El insecto cae al agua y el pez se lo traga. El pez arquero tiene alta precisión a distancias de 1.2 a 1.5 m, y a veces da en el blanco a distancias de hasta 3.5 m. Una pequeña hendidura del paladar de su boca, junto con una lengua enrollada, forma un tubo que hace posible que el pez imparta alta velocidad al agua en su boca cuando de pronto cierra sus agallas. Suponga que el pez lanza agua a un blanco situado a 2.00 m de distancia, a un ángulo de 30.0° sobre la horizontal. ¿Con qué ve-

Materiał chroniony prawem autorskim

locidad debe ser lanzado el chorro de gotas si éstas no deben bajar más de 3.00 cm verticalmente en su trayectoria al blanco?

19. Un pateador de campo debe patear un balón desde un punto a 36.0 m (unas 40 yardas) de las diagonales, y la mitad del público espera que el balón pase sobre el travesaño, que mide 3.05 m de alto. Cuando es pateado, el balón sale del suelo con una rapidez de 20.0 m/s a un ángulo de 53.0° con respecto a la horizontal. (a) ¿Cuál es la altura con la que el rebasa o no rebasa el travesaño? (b) ¿El balón se aproxima al travesaño mientras está subiendo o bajando?

20. Un bombero, situado a una distancia d de un edificio en llamas, dirige un chorro de agua desde una manguera contra incendios a un ángulo θ_i sobre la horizontal como en la figura P4.20. Si la rapidez inicial del chorro es v_i, ¿a qué altura h llega el agua al edificio?

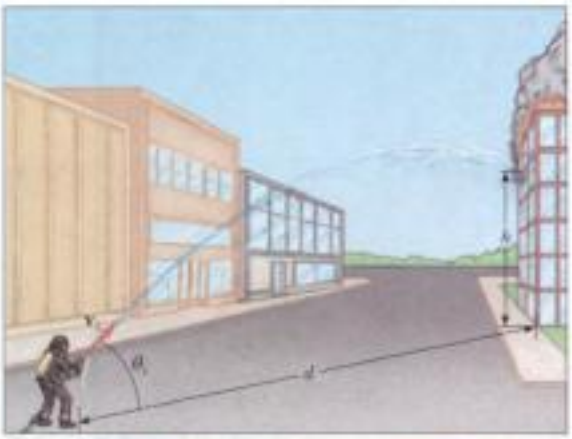


Figura P4.20

21. Un campo de juegos está en el techo plano de una escuela, 6.00 m arriba del nivel de la calle. La pared vertical del edificio mide 7.00 m de alto, para formar una barandilla de un metro de alto alrededor del campo. Una pelota ha caído a la calle, y un transeúnte la devuelve lanzándola a un ángulo de 53.0° sobre la horizontal en un punto a 24.0 metros de la base de la pared del edificio. La pelota tarda 2.20 s en llegar a un punto verticalmente arriba de la pared. (a) Encuentre la rapidez con la que fue lanzada la pelota. (b) Encuentre la distancia vertical con la que la pelota rebasa la pared. (c) Encuentre la distancia desde la pared al punto del techo donde cae la pelota.

22. Un bombardero de picada tiene una velocidad de 280 m/s a un ángulo θ abajo de la horizontal. Cuando la altitud de la nave es 2.15 km, suelta una bomba que subsecuentemente hace blanco en tierra. La magnitud del desplazamiento desde el punto en que se soltó la bomba hasta el blanco es 3.25 km. Hállese el ángulo θ.

23. Un jugador de fútbol patea una piedra horizontalmente desde un acantilado de 40.0 m de alto hacia una piscina. Si el jugador escucha el sonido de la piedra que cae en el agua 3.00 s después, ¿cuál fue la rapidez inicial dada a la piedra? Suponga que la rapidez del sonido en el aire es 343 m/s.

24. Un jugador estrella de baloncesto cubre 2.80 m horizontalmente en un salto para encestar el balón (figura P4.24). Su movimiento en el espacio se puede modelar precisamente como el de una partícula en su *centro de masa*, que definiremos en el capítulo 9. Su centro de masa está a una elevación 1.02 m cuando salta del piso. Llega a una altura máxima de 1.85 sobre el piso, y está a una elevación 0.900 m cuando toca el piso de nuevo. Determine (a) su tiempo de vuelo (su "tiempo en el aire"), (b) sus componentes

Figura P4.24

Materiał chroniony prawem autorskim

horizontal y (c) vertical de la velocidad en el instante en que se levanta del suelo, y (d) su ángulo de despegue. (e) Por comparación, determine el "tiempo en el aire" de un ciervo cola blanca que hace un salto con elevaciones de centro de masa de $y_i = 1.20$ m, $y_{máx} = 2.50$ m, $y_f = 0.700$ m.

25. Un arquero dispara una flecha con una velocidad de 45.0 m/s a un ángulo de 50.0° con la horizontal. Un asistente, que está de pie al nivel del suelo a 150 m de distancia desde el punto de lanzamiento, lanza una manzana directamente hacia arriba con la mínima rapidez necesaria para encontrar la trayectoria de la flecha. (a) ¿Cuál es la rapidez inicial de la manzana? (b) ¿En que tiempo después de lanzar la flecha debe ser lanzada la manzana para que la flecha haga blanco en la manzana?

26. Un cohete de fuegos artificiales hace explosión a una altura h, que es la máxima de su trayectoria vertical. En todas direcciones despide fragmentos encendidos, pero todos a la misma rapidez v. Algunos perdigones de metal solidificado caen al suelo sin resistencia del aire. Encuentre el ángulo mínimo que la velocidad final de un fragmento de impacto hace con la horizontal.

Sección 4.4 Movimiento circular uniforme

Nota: Los problemas 8, 10, 12 y 16 del capítulo 6 también se pueden asignar con esta sección.

27. El atleta que se muestra en la figura 4.27 hace girar un disco de 1.00 kg a lo largo de una trayectoria circular de radio 1.06 m. La máxima rapidez del disco es 20.0 m/s. Determine la magnitud de la máxima aceleración radial del disco.

Sam Sargent/Colision International

Figura P4.27

28. De la información de las guardas de este libro, calcule la aceleración radial de un punto sobre la superficie de la Tierra al ecuador, debida a la rotación de la Tierra alrededor de su eje.

29. Un llanta de 0.500 m de radio rota a una razón constante de 200 rev/min. Encuentre la rapidez y la aceleración de una pequeña piedra alojada en el dibujo de la llanta (en su borde exterior).

30. Cuando sus cohetes impulsores se separan, los astronautas del transbordador espacial por lo general detectan aceleraciones hasta de 3g, donde $g = 9.80$ m/s^2. En su adiestramiento, los astronautas viajan en un aparato donde experimentan una aceleración como la centrípeta. Específicamente, el astronauta es sujetado con gran fuerza al extremo de un brazo mecánico que luego gira a rapidez constante en un círculo horizontal. Determina la rapidez de rotación, en revoluciones por segundo, necesario para dar a un astronauta una aceleración centrípeta de 3.00g cuando se encuentra en movimiento circular con radio de 9.45 m.

31. El joven David, que venció a Goliat, experimentó con hondas antes de atajar al gigante. Él encontró que podría hacer girar una honda de 0.600 m de longitud a razón de 8.00 rev/s. Si aumentaba la longitud a 0.900 m, podía hacer girar la honda sólo 6.00 veces por segundo. (a) ¿Cuál rapidez de rotación da la máxima rapidez a la piedra que está en el extremo de la honda? (b) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de la piedra a 8.00 rev/s? (c) ¿Cuál es la aceleración centrípeta a 6.00 rev/s?

32. El astronauta que gira en órbita alrededor de la Tierra en la figura P4.32 está preparándose para acoplamiento con un satélite Westar VI. El satélite está en órbita circular a 600 km sobre la superficie de la Tierra, donde la aceleración en caída libre es 8.21 m/s^2. Tome el radio de la Tierra como 6 400 km. Determine la rapidez del satélite y el intervalo de tiempo necesario para completar una órbita alrededor de la Tierra.

Cortesía de la NASA

Figura P4.32

Sección 4.5 Aceleración tangencial y radial

33. Un tren reduce su velocidad cuando transita por una vuelta cerrada horizontal, bajando de 90.0 km/h a 50.0 km/h en los 15.0 s que necesita para circular por la vuelta. El radio de la curva es de 150 m. Calcule la aceleración en el momento en que el tren llega a 50.0 km/h. Suponga que continúa reduciendo su velocidad en este tiempo al mismo ritmo.

34. Un automóvil cuya rapidez está aumentando a razón de 0.600 m/s^2 viaja a lo largo de un camino circular de 20.0 m de radio. Cuando la rapidez instantánea del automóvil es 4.00 m/s, encuentre (a) el componente de aceleración tangencial, (b) el componente de aceleración centrípeta, (c) la magnitud y dirección de la aceleración total.

Materiał chroniony prawem autorskim

35. La figura P4.35 representa la aceleración total de una partícula que se mueve en el sentido de giro de las manecillas de un reloj, en un círculo de radio 2.50 m en un cierto instante. En este instante, encuentre (a) la aceleración radial, (b) la rapidez de la partícula, y (c) su aceleración tangencial.

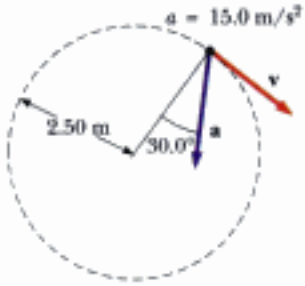


Figura P4.35

36. Una pelota oscila en un círculo vertical al final de una cuerda de 1.50 m de largo. Cuando la pelota está a 36.9° más allá del punto más bajo en su ascenso, su aceleración total es $(-22.5\hat{\mathbf{i}} + 20.2\hat{\mathbf{j}})$ m/s². En ese instante, (a) trace un diagrama vectorial que muestra los componentes de su aceleración, (b) determine la magnitud de su aceleración radial, y (c) determine la rapidez y velocidad de la pelota.

37. Un auto de carreras arranca desde el reposo en una pista circular. El auto aumenta su rapidez a un ritmo constante a_t cuando pasa una vez alrededor de la pista. Encuentre el ángulo que hace la aceleración total del auto, con el radio que conecta el centro de la pista y el auto, en el momento en que el auto completa el círculo.

Sección 4.6 Velocidad y aceleración relativas

38. Heather en su Corvette acelera a razón de $(3.00\hat{\mathbf{i}} - 2.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s², mientras que Jill en su Jaguar acelera a $(1.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s². Ambas arrancan desde el reposo en el origen de un sistema de coordenadas *xy*. Después de 5.00 s, (a) ¿cuál es la rapidez de Heather con respecto a Jill, (b) a qué distancia se encuentran entre sí, y (c) cuál es la aceleración de Heather con respecto a Jill?

39. Un auto viaja rumbo al este con una rapidez de 50.0 km/h. La lluvia cae con una rapidez constante verticalmente con respecto a la Tierra. Los rastros de la lluvia en las ventanillas laterales del auto forman un ángulo de 60.0° con la vertical. Encuentre la velocidad de la lluvia con respecto a (a) el auto y (b) la Tierra.

40. ¿Cuánto tarda un automóvil, que viaja en el carril izquierdo a 60.0 km/h, para pasar al lado de un auto que corre en la misma dirección en el carril derecho a 40.0 km/h, si los parachoques delanteros de los autos están inicialmente 100 m de separados?

41. Un río tiene una rapidez uniforme de 0.500 m/s. Un estudiante nada corriente arriba una distancia de 1.00 km y nada de regreso al punto de partida. Si el estudiante puede nadar a una rapidez de 1.20 m/s en aguas en calma, ¿cuánto tarda el viaje? Compare esto con el tiempo que el viaje tomaría si el agua estuviera en calma.

42. El piloto de un avión observa que la brújula indica rumbo al oeste. La rapidez del avión respecto al aire es 150 km/h. Si hay un viento de 30.0 km/h hacia el norte, encuentre la velocidad del avión con respecto al suelo.

43. Dos nadadores, Alan y Beti, arrancan juntos en el mismo punto en la margen de un arroyo ancho cuyas aguas circulan con una rapidez *v*. Alan nada aguas abajo una distancia *L* y luego aguas arriba la misma distancia. Beti nada de modo que su movimiento con respecto a la Tierra es perpendicular a las márgenes del arroyo. Ella nada la distancia *L* y luego regresa la misma distancia, de modo que ambos nadadores regresan al punto de partida. ¿Cuál nadador regresa primero? (*Nota:* Primero adivine la respuesta.)

44. Un perno cae del techo raso de un coche de tren que está acelerando al norte a razón de 2.50 m/s². ¿Cuál es la aceleración del perno con respecto a (a) el coche de tren? (b) ¿la Tierra?

45. Un estudiante de Ciencias viaja en un carro plataforma de un tren que corre a lo largo de una vía recta horizontal a una rapidez constante de 10.0 m/s. El estudiante lanza una pelota al aire a lo largo de la trayectoria que él juzga hace un ángulo inicial de 60.0° con la horizontal y que está alineada con la vía. La maestra del estudiante, que está de pie en un punto cercano en tierra, observa que la pelota sube verticalmente. ¿a qué altura ve ella que sube la pelota?

46. Un buque patrulla de guardacostas detecta una nave no identificada a una distancia de 20.0 km en la dirección 15.0° al este del norte. La nave está desplazándose a 26.0 km/h en un curso a 40.0° al este del norte. El guardacostas desea enviar un bote rápido para interceptar la nave e investigarla. Si el bote rápido navega a 50.0 km/h, ¿en qué dirección debe dirigirse? Exprese la dirección como una brújula con respecto al rumbo norte.

Problemas adicionales

47. *El "Cometa Vomit."* En adiestramiento de astronautas en gravedad cero y pruebas de equipo, la NASA hace volar un avión KC135A a lo largo de una trayectoria parabólica. Como se ve en la figura P4.47, la nave sube de 24 000 pies a 31 000 pies, donde entra a la parábola de cero *g* con una velocidad de 143 m/s a 45.0° y la nariz hacia abajo. Durante esta parte del vuelo, la nave y objetos que están dentro de su fuselaje acojinado caen en caída libre: se han convertido en balísticos. La nave entonces sale de la picada con una aceleración hacia arriba de 0.800*g* y se mueve en un círculo vertical con radio de 4.13 km. (Durante esta parte del vuelo, los ocupantes del avión perciben una aceleración de 1.8*g*.). ¿Cuáles son (a) la rapidez y (b) la altitud del avión en la parte superior de la maniobra? (c) ¿Cuál es el tiempo transcurrido en gravedad cero? (d) ¿Cuál es la rapidez del avión en la parte inferior de la trayectoria de vuelo?

Materiał chroniony prawem autorskim

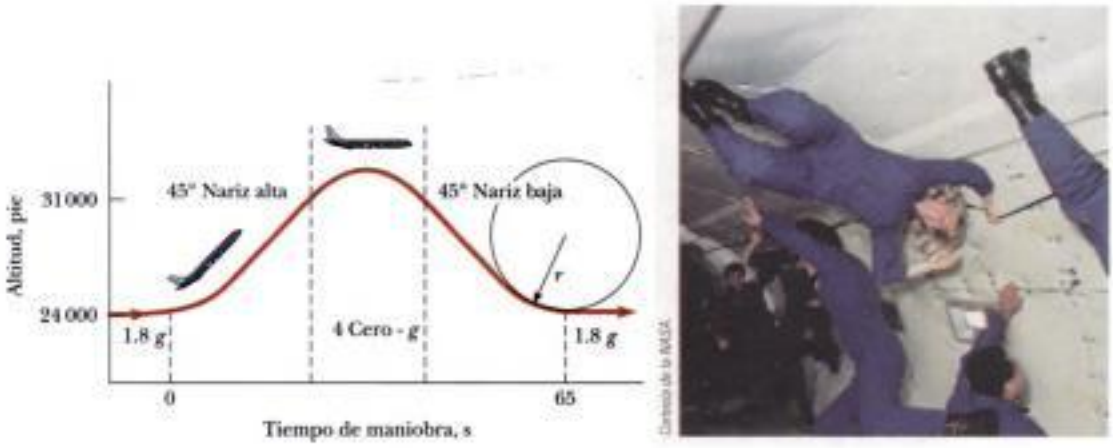


Figura P4.47

48. Cuando salpica un metal fundido, una pequeña gota sale despedida al este con velocidad inicial v_i a un ángulo θ_i sobre la horizontal, y otra gotita al oeste con la misma rapidez al mismo ángulo arriba de la horizontal, como en la figura P4.48. En términos de v_i y θ_i, encuentre la distancia entre ellas como función del tiempo.

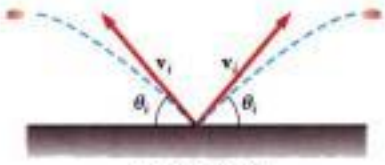


Figura P4.48

49. Una pelota sujeta al extremo de una cuerda se hace girar alrededor de un círculo horizontal de radio 0.300 m. El plano del círculo está 1.20 m sobre el suelo. La cuerda se revienta y la pelota cae al suelo 2.00 m (horizontalmente) alejándose del punto del suelo que está directamente bajo la ubicación de la pelota cuando la cuerda se revienta. Encuentre la aceleración radial de la pelota durante su movimiento circular.

50. Un proyectil es disparado hacia arriba de una pendiente (ángulo ϕ) con una rapidez inicial v_i a un ángulo θ_i con respecto a la horizontal ($\theta_i > \phi$), como se ve en la figura P4.50. (a) Demuestre que el proyectil recorre una distancia d arriba de la pendiente, donde

$$d = \frac{2v_i^2 \cos\theta_i \operatorname{sen}(\theta_i - \phi)}{g\cos^2\phi}$$

(b) ¿Para qué valor de θ_i es d un máximo, y cuál es ese valor?

Figura P4.50

51. Barry Bonds conecta un cuadrangular de modo que la pelota apenas rebasa la fila superior de las tribunas, de 21.0 m de altura, situada a 130 m de la placa del *home*. La pelota es golpeada a un ángulo de 35.0° con la horizontal, y la resistencia del aire es despreciable. Encuentre (a) la rapidez inicial de la pelota, (b) el tiempo en el que la pelota llega a los asientos baratos, y (c) los componentes de velocidad y la rapidez de la pelota cuando pasa sobre la fila superior. Suponga que la pelota es golpeada a una altura de 1.00 m sobre el suelo.

52. Un astronauta en la superficie de la Luna dispara un cañón para lanzar un paquete experimental, que sale del cañón moviéndose horizontalmente. (a) ¿Cuál debe ser la rapidez del paquete en la boca del cañón para que viaje completamente alrededor de la Luna y regrese a su ubicación original? (b) ¿Cuánto tiempo tarda este viaje alrededor de la Luna? Suponga que la aceleración en caída libre en la Luna es un sexto de la de la Tierra.

53. Un péndulo con una cuerda de longitud $r = 1.00$ m oscila en un plano vertical (figura P4.53). Cuando el péndulo está en las dos posiciones horizontales $\theta = 90.0°$ y $\theta = 270°$, su rapidez es 5.00 m/s. (a) Encuentre la magnitud de la aceleración radial y acele-

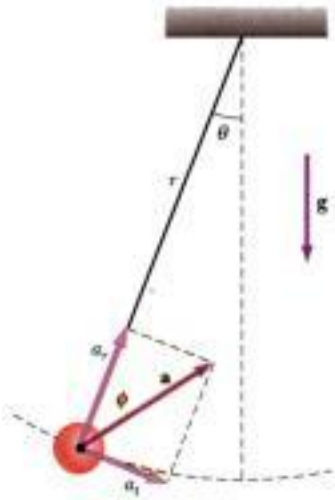


Figura P4.53

Materiał chroniony prawem autorskim

ración tangencial para estas posiciones. (b) Trace un diagrama vectorial para determinar la dirección de la aceleración total para estas dos posiciones. (c) Calcule la magnitud y dirección de la aceleración total.

54. Un jugador de baloncesto que mide 2.00 m de estatura está de pie sobre el piso, a 10.0 m de la canasta, como se ve en la figura P4.54. Si lanza el balón a un ángulo de 40.0° con la horizontal, ¿a qué rapidez inicial debe lanzarlo para que pase por el arillo sin tocar el tablero? La altura de la canasta es 3.05 m.

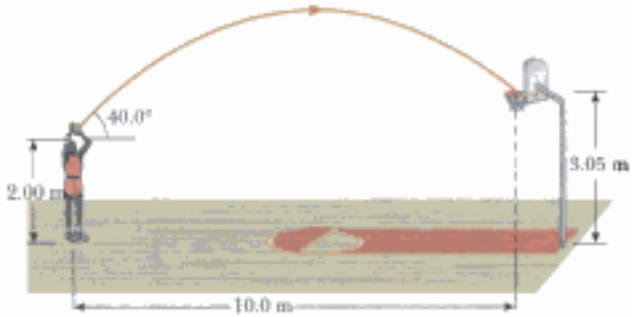


Figura P4.54

55. Cuando los jugadores de béisbol lanzan la pelota desde la parte más lejana al bateador, por lo general la tiran para que bote una vez antes de llegar al diamante, con la idea de que la pelota llega más pronto en esa forma. Suponga que el ángulo al cual una pelota que rebota sale del terreno es el mismo que el ángulo al cual el jardinero la lanzó, como en la figura P4.55, pero que la rapidez de la pelota después del rebote es la mitad de la que era antes del rebote. (a) Si se supone que la pelota siempre es lanzada con la misma rapidez inicial, ¿a qué ángulo θ debe lanzar el jardinero la pelota para que recorra la misma distancia D con un rebote (trayectoria azul) que cuando lanza la pelota hacia arriba a 45.0° sin rebotar (trayectoria verde)? (b) Determina la razón entre los tiempos para los tiros de un rebote y sin rebote.

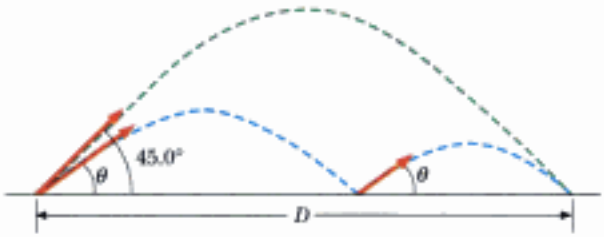


Figura P4.55

56. Un muchacho puede lanzar una pelota a una distancia horizontal máxima R sobre un campo plano. ¿A qué distancia puede lanzar la misma pelota verticalmente hacia arriba? Suponga que sus músculos dan a la pelota la misma rapidez en cada caso.

57. Una piedra sujeta al extremo de una honda se hace girar en un círculo vertical de 1.20 m de radio a una rapidez constante v_0 = 1.50 m/s como en la figura P4.57. El centro de la cuerda está a 1.50 m sobre el suelo. ¿Cuál es el alcance de la piedra si se suelta cuando la cuerda está inclinada a 30.0° con la horizontal (a) en Ⓐ? (b) ¿en Ⓑ? ¿Cuál es la aceleración de la piedra (c) justo antes de ser soltada en Ⓐ? (d) ¿justo después de ser soltada en Ⓐ?

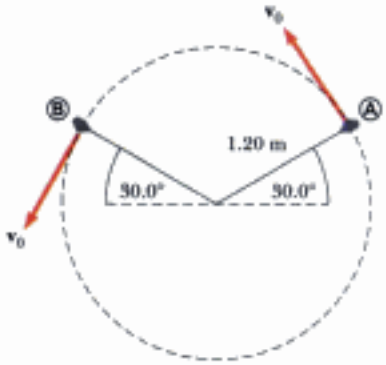


Figura P4.57

58. Un mariscal de campo lanza un balón directamente hacia un receptor con una rapidez inicial de 20.0 m/s, a un ángulo de 30.0° sobre la horizontal. En ese instante, el receptor está a 20.0 m del Mariscal de Campo. ¿En qué dirección y con qué rapidez constante debe correr el receptor para atrapar el balón al nivel al cual fue lanzado?

59. Su padrino es copiloto de un bombardero, que vuela horizontalmente sobre un terreno plano, con una rapidez de 275 m/s con respecto al suelo, a una altitud de 3 000 m. (a) El bombardero (tripulante) suelta una bomba. ¿Qué distancia recorrerá ésta horizontalmente cuando es soltada y su impacto en el suelo? Desprecie los efectos de la resistencia del aire. (b) Disparos de gente en tierra de pronto incapacitan al tripulante bombardero antes que pueda decir "¡suelten bombas!". En consecuencia, el piloto mantiene el rumbo, altitud y rapidez originales del avión en medio de una tormenta de metralla. ¿Dónde estará el avión cuando la bomba llegue al suelo? (c) El avión tiene una mira telescópica de bombas ajustada para que la bomba llegue al blanco vista en la mira en el momento de soltarla. ¿A qué ángulo de la vertical estaba ajustada la mira de la bomba?

60. Un rifle de alto poder dispara una bala con una velocidad en la boca del cañón de 1.00 km/s. El rifle está apuntado horizontalmente a un blanco reglamentario, que es un conjunto de anillos concéntricos, situado a 200 m de distancia. (a) ¿A qué distancia abajo del eje del cañón del rifle da la bala en el blanco? El rifle está equipado con una mira telescópica. Se "apunta" al ajustar el eje del telescopio de modo que apunte precisamente en el lugar donde la bala da en el blanco a 200 m. (b) Encuentre el ángulo entre el eje del telescopio y el eje del cañón del rifle. Cuando dispara a un blanco a una distancia que no sea de 200 m, el tirador usa la mira telescópica, poniendo su retícula en "mira alta" o "mira baja" para compensar el alcance diferente. ¿Debe apuntar alto o bajo, y aproximadamente a qué distancia del blanco reglamentario, cuando el blanco está a una distancia de (c) 50.0 m, (d) 150 m, o (e) 250 m? *Nota:* La trayectoria de la bala es en todas partes casi horizontal que es una buena aproximación para modelar la bala cuando se dispara horizontalmente en cada caso. **¿Qué pasaría si** el blanco está cuesta arriba o cuesta abajo? (f) Suponga que el blanco está a 200 m de distancia, pero la línea de visión al blanco está arriba de la horizontal en 30°. ¿Debe el tirador apuntar alto, bajo o exacto? (g) Suponga que el blanco está cuesta abajo en 30°. ¿Debe el tirador apuntar alto, bajo o exacto? Explique sus respuestas.

Materiał chroniony prawem autorskim

61. Un halcón vuela horizontalmente a 10.0 m/s en línea recta, 200 m arriba del suelo. Un ratón que lo ha estado llevando se libera de sus garras. El halcón continúa en su trayectoria a la misma rapidez durante 2.00 segundos antes de tratar de recuperar su presa. Para lograr la recuperación, hace una picada en línea recta a rapidez constante y recaptura al ratón 3.00 m sobre el suelo. (a) Suponiendo que no hay resistencia del aire, encuentre la rapidez de picada del halcón. (b) ¿Qué ángulo hizo el halcón con la horizontal durante su descenso? (c) ¿Durante cuánto tiempo "disfrutó" el ratón de la caída libre?

62. Una persona de pie en lo alto de una roca semiesférica de radio R, patea una pelota (inicialmente en reposo en lo alto de la roca) para darle velocidad horizontal $\mathbf{v}_i$, como se ve en la figura P4.62. (a) ¿Cuál debe ser su rapidez inicial mínima si la pelota nunca debe tocar la roca después de ser pateada? (b) Con esta rapidez inicial, ¿a qué distancia de la base de la roca llega la pelota al suelo?

Figura P4.62

63. Un auto está estacionado en una pendiente inclinada que mira hacia el océano, donde la pendiente forma un ángulo de 37.0° abajo de la horizontal. El negligente conductor deja el auto en neutral y los frenos de estacionamiento están defectuosos. Arrancando desde el reposo en $t = 0$, el auto rueda por la pendiente con una aceleración constante de 4.00 m/s², recorriendo 50.0 m hasta el borde de un acantilado vertical. El acantilado está a 30.0 m sobre el océano. Encuentre (a) la rapidez del auto cuando llegue al borde del acantilado y el tiempo en el que llega a ese lugar, (c) el intervalo total de tiempo que el auto está en movimiento, y (d) la posición del auto cuando cae al océano, con respecto a la base del acantilado.

64. Un camión cargado con sandías se detiene de pronto para evitar volcarse sobre el borde de un puente destruido (figura P4.64). La rápida parada hace que varias sandías salgan despedidas del camión; una de ellas rueda sobre el borde con una rapidez inicial $v_i = 10.0$ m/s en la dirección horizontal. Una sección transversal de la margen tiene la forma de la mitad inferior de una parábola con su vértice en el borde del camino, y con la ecuación $y^2 = 16x$, donde x e y se miden en metros. ¿Cuáles son las coordenadas x e y de la sandía cuando se estrella en la margen?

65. Un decidido coyote sale una vez más en persecución del escurridizo correcaminos. El coyote lleva un par de patines con ruedas de propulsión a chorro, marca Acme, que le dan una aceleración

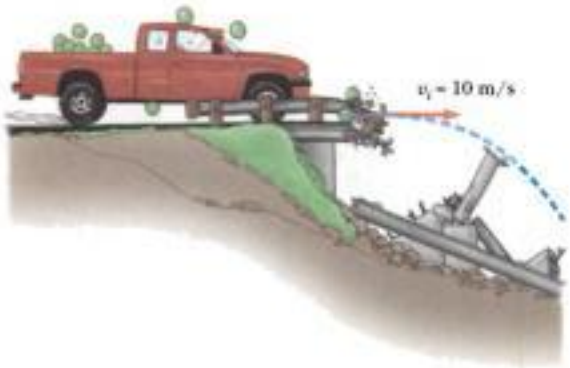


Figura P4.64

horizontal constante de 15.0 m/s² (figura P4.65). El coyote arranca desde el reposo a 70.0 m del borde de un precipicio en el instante en que el correcaminos lo pasa en dirección al precipicio. (a) Si el correcaminos se mueve con rapidez constante, determine la rapidez mínima que debe tener para llegar al precipicio antes que el coyote. En el borde del precipicio, el correcaminos escapa al dar una vuelta repentina, mientras que el coyote continúa de frente. Sus patines permanecen horizontales y continúan funcionando cuando él está en el aire, de modo que la aceleración del coyote cuando está en el aire es $(15.0\hat{\mathbf{i}} - 9.80\hat{\mathbf{j}})$ m/s². (b) Si el precipicio está a 100 m sobre el piso plano de un cañón, determine en dónde cae el coyote en el cañón. (C) Determine los componentes de la velocidad de impacto del coyote.

Figura P4.65

66. No se lastime; no golpee su mano contra nada. Con estas limitaciones, describa qué es lo que hace para dar a su mano una gran aceleración. Calcule una estimación de orden de magnitud de esta aceleración, expresando las cantidades que mide o estima y sus valores.

67. Un patinador sale de una rampa en un salto de esquí con una velocidad de 10.0 m/s, 15.0° arriba de la horizontal, como se ve en la figura P4.67. La pendiente de la rampa es de 50.0° y la resistencia del aire es insignificante. Encuentre (a) la distancia desde la rampa a donde el patinador llega al suelo y (b) los componentes de velocidad justo antes que aterrice. (¿Cómo piensa usted que los resultados podrían ser afectados si se incluyera la resistencia del aire? Observe que los saltadores se inclinan hacia delante en la forma de un ala aerodinámica, con sus manos a los costados del cuerpo para aumentar su distancia. ¿Por qué funciona esto?)

Materiał chroniony prawem autorskim

Figura P4.67

68. En un tubo de imágenes de televisión (tubo de rayos catódicos) los electrones son emitidos con velocidad $\mathbf{v}_i$ desde una fuente en el origen de coordenadas. Las velocidades iniciales de diferentes electrones forman ángulos θ diferentes con el eje x. Cuando se mueven a una distancia D a lo largo del eje x, los electrones están sometidos a un campo eléctrico constante que da a cada electrón una aceleración constante $\mathbf{a}$ en la dirección x. En $x = D$ los electrones pasan por una abertura circular, orientada perpendicular al eje x. En la abertura, la velocidad impartida a los electrones por el campo eléctrico es mucho mayor que $\mathbf{v}_i$ en magnitud. Demuestre que las velocidades de los electrones que pasan por la abertura irradian desde un cierto punto en el eje x, que no es el origen. Determine la ubicación de este punto. Este punto se llama *fuente virtual* y es importante para determinar el lugar donde el haz de electrones incide sobre la pantalla del tubo.

69. Un pescador sale corriente arriba desde las cataratas Metaline del río Pend Oreille en la región noroeste del estado de Washington. Su pequeño bote, impulsado por un motor fuera de borda, se desplaza a una rapidez constante v en aguas en calma. El agua circula a menor rapidez constante v_w. El pescador se ha desplazado corriente arriba 2.00 km cuando su hielera cae al agua por la borda. Él se da cuenta de la ausencia de la hielera sólo después que ha avanzado corriente arriba otros 15.0 minutos. En ese punto regresa y se dirige corriente abajo, avanzando todo el tiempo a la misma rapidez relativa respecto al agua. Alcanza la hielera flotante precisamente cuando está a punto de caer por las cataratas en su punto de partida. ¿Con que rapidez se mueven las aguas del río? Resuelva este problema en dos formas. (a) Primero, use la Tierra como marco de referencia. Con respecto a nuestro planeta, el bote se desplaza corriente arriba a una rapidez $v - v_w$ y corriente abajo a $v + v_w$. (b) Una segunda solución, mucho más sencilla y elegante, se obtiene con el uso del agua como marco de referencia. Este método tiene importantes aplicaciones en muchos problemas más complicados, por ejemplo calcular el movimiento de cohetes y satélites, y analizar la dispersión de partículas subatómicas desde blancos de gran tamaño.

70. El agua de un río se mueve uniformemente a una rapidez constante de 2.50 m/s entre márgenes paralelas que están a 80.0 m de distancia entre sí. Un observador ha de entregar un paquete directamente al otro lado del río, pero puede nadar a sólo 1.50 m/s. (a) Si escoge minimizar el tiempo que pasa en el agua, ¿en qué dirección debe dirigirse? (b) ¿A qué distancia aguas abajo será llevado por la corriente? (c) **¿Qué pasaría si?** Si la persona escoge minimizar la distancia que el río lo llevará aguas abajo, ¿en qué dirección debe ir? (d) ¿Qué distancia aguas abajo será llevado por la corriente del agua?

71. Un barco enemigo está en el lado este de una isla montañosa, como se ve en la figura P4.71. El barco enemigo ha maniobrado hasta quedar a no más de 2 500 m del pico de 1 800 m de altura y puede disparar proyectiles con una rapidez inicial de 250 m/s. Si la playa poniente está horizontalmente a 300 m del pico, ¿cuáles son las distancias desde la playa poniente en donde un barco puede estar seguro contra el bombardeo del barco enemigo?

72. En la sección **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 4.7, se dice que el alcance máximo de un saltador de esquí ocurre a un ángulo de lanzamiento θ dado por

$$\theta = 45° - \frac{\phi}{2}$$

donde ϕ es el ángulo que la rampa hace con la horizontal en la figura 4.16. Demuestre esta afirmación al derivar la ecuación que aparece líneas antes.

Respuestas a las *preguntas rápidas*

4.1 (b). Un objeto que se mueve con velocidad constante tiene $\Delta\mathbf{v} = 0$, de modo que, según la definición de aceleración, $\mathbf{a} = \Delta\mathbf{v}/\Delta t = 0$. La opción (a) no es correcta porque una partícula se puede mover a rapidez constante y cambiar de dirección. Esta posibilidad también hace que (c) sea opción incorrecta.

4.2 (a). Como la aceleración se presenta siempre que cambie la velocidad en cualquier forma —con un aumento o decremento en rapidez, un cambio en dirección, o ambos— los tres contro-

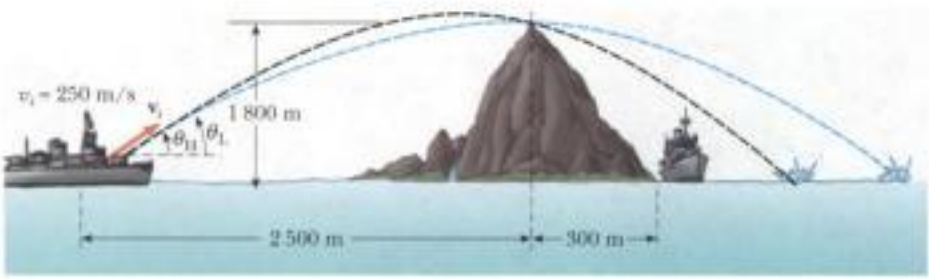


Figura P4.71

Materiał chroniony prawem autorskim

les son aceleradores. El pedal del acelerador hace que el auto acelere; el pedal de freno hace que el auto disminuya su velocidad. El volante cambia la dirección del vector velocidad.

4.3 (a). El estudiante debe simplemente lanzar la pelota en línea recta hacia arriba. Como la pelota se mueve junto con él, seguirá una trayectoria parabólica con un componente horizontal de velocidad que es el mismo que el del estudiante.

4.4 (b). En sólo un punto —el punto más alto de la trayectoria— son perpendiculares entre sí los vectores de velocidad y aceleración. El vector velocidad es horizontal en ese punto y el vector aceleración es hacia abajo.

4.5 (a). El vector aceleración está siempre dirigido hacia abajo. El vector velocidad nunca es vertical si el objeto sigue una trayectoria como la de la figura 4.8.

4.6 15°, 30°, 45°, 60°, 75°. Cuanto mayor sea la altura máxima, más tiempo tarda el proyectil en alcanzar esa altitud y luego caer desde ella. Por lo tanto, cuando aumenta el ángulo de lanzamiento, aumenta el tiempo de vuelo.

4.7 (c). No podemos escoger (a) o (b) porque el vector de aceleración no es constante (cambia continuamente de dirección). De las opciones restantes, sólo (c) da la relación perpendicular correcta entre $\mathbf{a}_c$ y $\mathbf{v}$.

4.8 (d). Como la aceleración centrípeta es proporcional al cuadrado de la rapidez, duplicar la rapidez aumenta la aceleración en un factor de 4.

4.9 (b). El vector velocidad es tangente a la trayectoria. Si el vector aceleración ha de ser paralelo al vector velocidad, también debe ser tangente a la trayectoria. Esto requiere que el vector aceleración no tenga componente perpendicular a la trayectoria. Si la trayectoria ha de cambiar de dirección, el vector aceleración tendría un componente radial, perpendicular a la trayectoria. Por lo tanto, la trayectoria debe permanecer recta.

4.10 (d). El vector velocidad es tangente a la trayectoria. Si el vector aceleración ha de ser perpendicular al vector velocidad, no debe tener componente tangente a la trayectoria. Por otra parte, si la rapidez está cambiando, *debe* haber un componente de la aceleración tangente a la trayectoria. En consecuencia, los vectores velocidad y aceleración nunca son perpendiculares a esta situación. Pueden ser perpendiculares sólo si no hay cambio en la rapidez.

4.11 (c). La pasajera A ve el café servido en una trayectoria parabólica "normal", como si estuviera de pie en el piso sirviéndolo. El observador estacionario B ve el café moviéndose en trayectoria parabólica que es extendida horizontalmente debido a la velocidad horizontal constante de 60 mi/h.

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 5

Las leyes del movimiento

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

5.1 El concepto de fuerza

5.2 Primera ley de Newton y marcos inerciales

5.3 Masa

5.4 Segunda ley de Newton

5.5 La fuerza gravitacional y peso

5.6 Tercera ley de Newton

5.7 Algunas aplicaciones de las leyes de Newton

5.8 Fuerzas de fricción

▲ *Un pequeño remolcador ejerce una fuerza sobre un barco grande, haciendo que éste se mueva. ¿Cómo puede un pequeño bote mover un objeto tan grande? (Steve Raymer/CORBIS)*

Materiał chroniony prawem autorskim

En los capítulos 2 y 4 describimos el movimiento en términos de posición, velocidad y aceleración, sin considerar qué podría causar ese movimiento. Ahora consideremos la causa, ¿qué podría hacer que un cuerpo permanezca en reposo y que otro acelere? Los dos factores principales que es necesario considerar son las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y la masa del cuerpo. Analizamos las tres leyes básicas de movimiento, que se refieren a fuerzas y masas, y fueron formuladas hace más de tres siglos por Isaac Newton. Una vez que comprendamos estas leyes, podemos contestar preguntas como "¿qué mecanismo cambia el movimiento?" y "¿por qué algunos cuerpos aceleran más que otros?"

5.1 El concepto de fuerza

Por nuestra experiencia de la vida diaria, todos tenemos una idea básica del concepto de fuerza. Cuando uno empuja un plato, ejerce una fuerza sobre él. Del mismo modo, se aplica una fuerza cuando se lanza o se patea una pelota. En estos ejemplos, la palabra *fuerza* está asociada con actividad muscular y algún cambio en la velocidad de un cuerpo, aunque las fuerzas no siempre causan movimiento. Por ejemplo, cuando una persona se sienta a leer este libro, una fuerza de gravedad actúa sobre su cuerpo, y a pesar de ello, permanece estacionario. Como segundo ejemplo, se puede empujar (en otras palabras, ejercer una fuerza) una piedra grande y no poder moverla.

¿Qué fuerza (si la hay) hace que la Luna gire en órbita alrededor de la Tierra? Newton contestó ésta y otras preguntas similares al establecer que las fuerzas son las que producen cualquier cambio en la velocidad de un cuerpo. La velocidad de la Luna no es constante porque se mueve en una órbita casi circular alrededor de la Tierra. Ahora sabemos que este cambio en velocidad es causado por la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre la Luna. Como sólo una fuerza puede causar un cambio en velocidad, podemos considerar que una fuerza es *aquello que ocasiona que un cuerpo acelere.* En este capítulo estamos interesados en la relación entre la fuerza ejercida sobre un cuerpo y la aceleración de éste.

Un cuerpo acelera debido a una fuerza externa

¿Qué ocurre cuando varias fuerzas actúan simultáneamente sobre un cuerpo? En este caso, el cuerpo acelera sólo si la fuerza neta que actúa sobre él es diferente de cero. La **fuerza neta** que actúa sobre un cuerpo se define como la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre él. (A veces, la fuerza neta se denomina *fuerza total, fuerza resultante,* o *fuerza desequilibrada.*) **Si la fuerza neta ejercida sobre un cuerpo es cero, la aceleración de éste es cero y su velocidad permanece constante.** De modo que, si la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo es cero, éste permanece en reposo o continúa su movimiento con velocidad constante. Cuando la velocidad de un cuerpo es constante (incluyendo cuando el cuerpo está en reposo), se dice que está en **equilibrio.**

Definición de equilibrio

Cuando se tira de un resorte de espiras, como en la figura 5.1a, el resorte se estira. Cuando se tira de un carro con fuerza suficiente para vencer la fricción, como en la figura 5.1b, el carro se mueve. Cuando se patea un balón de fútbol, como en la figura 5.1c, el balón se deforma y se pone en movimiento. Estas situaciones son todas ejemplos de una clase de fuerzas llamada *fuerzas de contacto.* Esto es, comprenden contacto físico entre dos cuerpos. Otros ejemplos de fuerzas de contacto son la fuerza ejercida por moléculas de gas sobre las paredes de un recipiente y la ejercida por los pies sobre el piso.

Materiał chroniony prawem autorskim

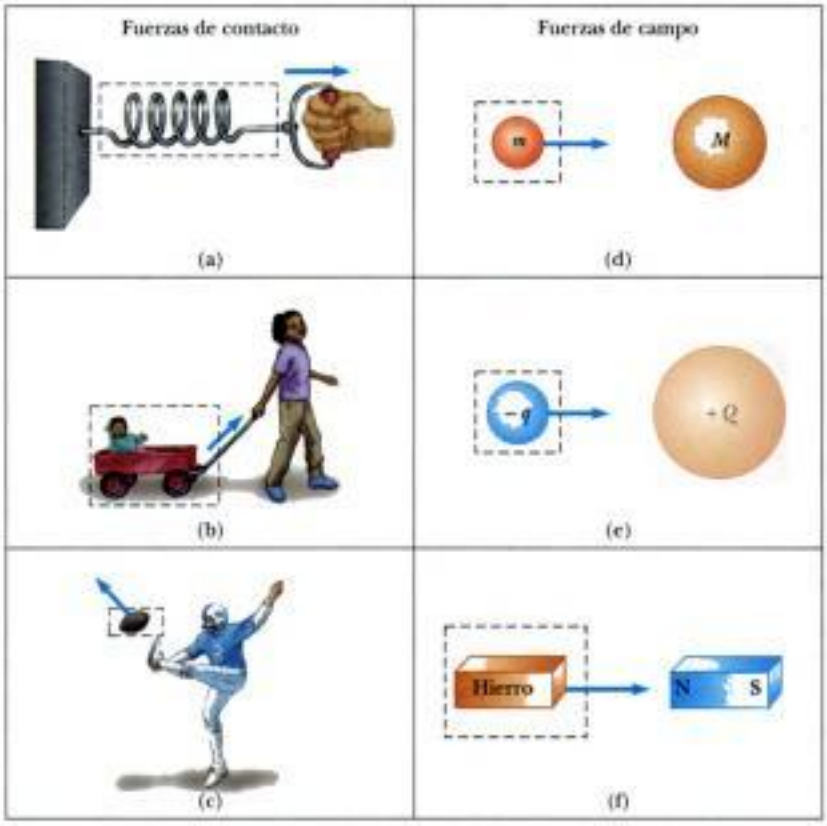


Figura 5.1 Algunos ejemplos de fuerzas aplicadas. En cada caso se ejerce una fuerza sobre el cuerpo que está dentro del cuadro de líneas punteadas. Algún agente del ambiente externo a este cuadro ejerce una fuerza sobre el cuerpo.

Otra clase de fuerzas, conocida como *fuerzas de campo*, no implican contacto físico entre dos cuerpos, sino que actúan a través del espacio vacío. La fuerza gravitacional de atracción entre dos cuerpos, ilustrada en la figura 5.1d, es un ejemplo de esta clase de fuerza. La fuerza gravitacional mantiene cuerpos unidos a la Tierra y a los planetas en órbita alrededor del Sol. Otro ejemplo común de una fuerza de campo es la fuerza eléctrica que una carga ejerce sobre otra (figura 5.1e). Estas cargas podrían ser las del electrón y protón que forman un átomo de hidrógeno. Un tercer ejemplo de una fuerza de campo es la fuerza que un imán de barra ejerce sobre una pieza de hierro (figura 5.1f).

La distinción entre fuerzas de contacto y fuerzas de campo no es tan marcada como la disertación previa haría pensar. Cuando se examinan a nivel atómico, todas las fuerzas que clasificamos como fuerzas de contacto resultan ser causadas por fuerzas eléctricas (de campo) del tipo que se ilustra en la figura 5.1e. No obstante, al crear modelos para fenómenos macroscópicos, es conveniente usar ambas clasificaciones de fuerzas. Las únicas fuerzas *fundamentales* conocidas en la naturaleza son todas fuerzas de campo: (1) *fuerzas gravitacionales* entre cuerpos, (2) *fuerzas electromagnéticas* entre cargas eléctricas, (3) *fuerzas nucleares* entre partículas subatómicas, y (4) *fuerzas débiles* que surgen en ciertos procesos de desintegración radiactiva. En física clásica, nos interesan sólo fuerzas gravitacionales y electromagnéticas.

Medición de la intensidad de una fuerza

Es conveniente usar la deformación de un resorte para medir una fuerza. Suponga que se aplica una fuerza vertical a una báscula de resorte que tiene un extremo superior fijo, como se ve en la figura 5.2a. El resorte se alarga cuando se aplica la fuerza, y una aguja en la carátula indica el valor de la fuerza aplicada. Podemos calibrar el resorte al definir una fuerza de referencia $\mathbf{F}_1$ como la fuerza que hace que la aguja indique 1.00 cm. (Como la fuerza es una cantidad vectorial, usamos el símbolo en letra negrita $\mathbf{F}$.) Si ahora aplicamos una fuerza diferente $\mathbf{F}_2$ hacia abajo, cuya magnitud sea el doble de la fuerza de referencia $\mathbf{F}_1$, como

Materiał chroniony prawem autorskim

Isaac Newton,
Físico y matemático inglés (1642-1727)

Isaac Newton fue uno de los más brillantes científicos de la historia. Antes de cumplir 30 años formuló los conceptos básicos y leyes de la mecánica, descubrió la ley de gravitación universal e inventó los métodos matemáticos del cálculo. Como consecuencia de sus teorías, Newton pudo explicar los movimientos de los planetas, el subir y bajar de las mareas, y muchas características especiales de los movimientos de la Luna y la Tierra. También interpretó numerosas observaciones fundamentales respecto a la naturaleza de la luz. Sus aportaciones a las teorías físicas dominaron el pensamiento científico durante dos siglos, y aún hoy siguen siendo importantes. *(Giraudon/Art Resource)*

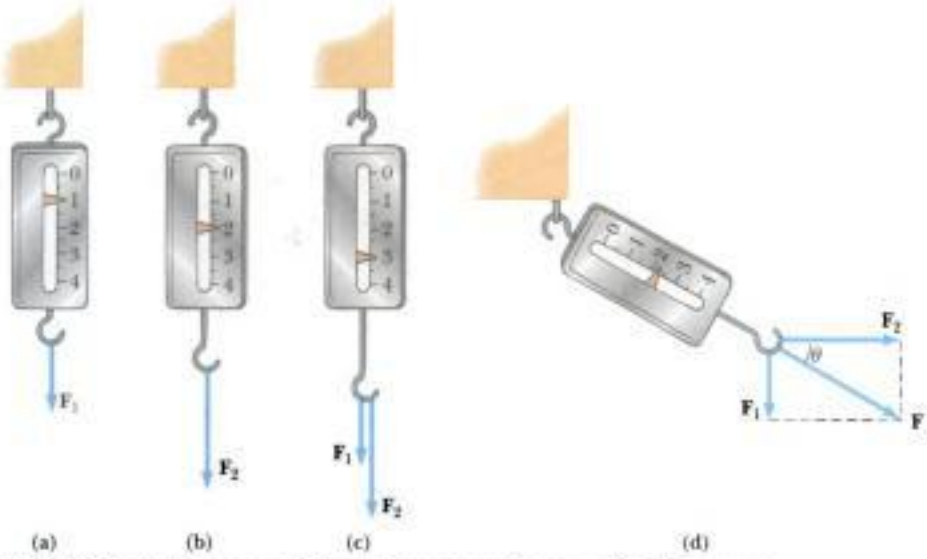


Figura 5.2 La naturaleza vectorial de una fuerza se prueba con una báscula de resorte. (a) Una fuerza $\mathbf{F}_1$ hacia abajo alarga 1.00 cm el resorte. (b) Una fuerza $\mathbf{F}_2$ hacia abajo alarga 2.00 cm el resorte. (c) Cuando $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ se aplican simultáneamente, el resorte se alarga 3.00 cm. (d) Cuando $\mathbf{F}_1$ es hacia abajo y $\mathbf{F}_2$ es horizontal, la combinación de las dos fuerzas alarga el resorte $\sqrt{(1.00\text{ cm})^2 + (2.00\text{ cm})^2} = 2.24$ cm.

se ve en la figura 5.2b, la aguja se mueve a 2.00 cm. La figura 5.2c muestra que el efecto combinado de las dos fuerzas colineales es la suma de los efectos de las fuerzas individuales.

Ahora supongamos que las dos fuerzas se aplican simultáneamente con $\mathbf{F}_1$ hacia abajo y $\mathbf{F}_2$ horizontal, como se ve en la figura 5.2d. En este caso, la aguja indica $\sqrt{5.00\text{ cm}^2} = 2.24$ cm. La fuerza individual $\mathbf{F}$ que produciría esta misma lectura es la suma de los dos vectores $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, como se describe en la figura 5.2d. Esto es, $|\mathbf{F}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 2.24$ unidades, y su dirección es $\theta = \tan^{-1}(-0.500) = -26.6°$. **Debido a que experimentalmente se ha verificado que las fuerzas se comportan como vectores, se deben usar las reglas de la adición vectorial para obtener la fuerza neta sobre un cuerpo.**

5.2 Primera ley de Newton y marcos inerciales

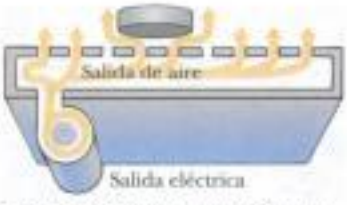


Figura 5.3 En una mesa de aire para hockey, el aire que sale por los agujeros en la superficie permite que el disco se mueva casi sin fricción. Si la mesa no está acelerando, el disco colocado sobre ella permanecerá en reposo.

Iniciamos nuestro estudio de fuerzas al imaginar algunas situaciones. Pongamos un disco sobre una mesa de hockey perfectamente nivelada y con aire (figura 5.3). Es de esperarse que el disco permanezca donde está colocado. Ahora imaginemos que la mesa de aire se coloca en un tren que se mueve con velocidad constante. Si el disco se coloca sobre la mesa, de nuevo permanece en donde está colocado. Si el tren fuera a acelerar, sin embargo, el disco empezaría a moverse a lo largo de la mesa, exactamente como unos papeles puestos sobre el tablero de un auto que caen sobre el asiento delantero cuando se pisa el acelerador.

Como vimos en la sección 4.6, un cuerpo en movimiento se puede observar desde cualquier número de marcos de referencia. La **primera ley de Newton del movimiento,** a veces llamada *ley de inercia,* define un conjunto especial de marcos de referencia llamados *marcos inerciales.* Esta ley se puede expresar como sigue:

Primera ley de Newton

Si un cuerpo no interactúa con otros cuerpos, es posible identificar un marco de referencia en el que el cuerpo tiene aceleración cero.

Materiał chroniony prawem autorskim

Este marco se llama **marco de referencia inercial.** Cuando el disco está sobre la mesa de hockey situada sobre el suelo, lo observamos desde un marco de referencia inercial, no hay interacciones horizontales del disco con ningún otro cuerpo, y observamos que tiene aceleración cero en esa dirección. Cuando estamos en un tren que se mueve a velocidad constante, también observamos el disco desde un marco de referencia inercial. **Cualquier marco de referencia que se mueva con velocidad constante con respecto a un marco inercial es en sí mismo un marco inercial.** Cuando el tren acelera, sin embargo, se observa el disco desde un **marco no inercial de referencia** porque el observador y el tren están acelerando con respecto al marco de referencia inercial de la superficie terrestre. Mientras el disco parezca estar acelerando según nuestra observación, podemos identificar un marco de referencia en el que el disco tiene aceleración cero. Por ejemplo, un observador parado fuera del tren en el suelo ve que el disco se mueve con la misma velocidad que el tren tenía antes de empezar a acelerar (porque casi no hay fricción para "amarrar" el disco y el tren). Por lo tanto, la primera ley de Newton se cumple todavía aun cuando las observaciones digan lo contrario.

Marco de referencia inercial

Un marco de referencia que se mueve con velocidad constante con respecto a estrellas distantes, es la mejor aproximación de un marco inercial, y para nuestro propósito podemos considerar nuestro planeta como que es ese marco. La Tierra no es realmente un marco inercial debido a su movimiento orbital alrededor del Sol y su movimiento rotacional alrededor de su propio eje, los cuales resultan en aceleraciones centrípetas. No obstante, estas aceleraciones son pequeñas en comparación con g y a veces pueden despreciarse. Por esta razón, suponemos que la Tierra es un marco inercial, como lo es cualquier otro marco unido a ella.

Supongamos que estamos observando un cuerpo desde un marco de referencia inercial. (Regresaremos a observaciones hechas en marcos no inerciales de referencia en la sección 6.3.) Antes de 1600, los sabios pensaban que el estado natural de la materia era el estado de reposo. Observaciones hechas mostraban que cuerpos en movimiento finalmente dejaban de moverse. Galileo fue el primero en tomar un planteamiento diferente al movimiento y el estado natural de la materia. Realizó experimentos mentales y concluyó que no es la naturaleza de un cuerpo detenerse y ponerse en movimiento: más bien, es su naturaleza *resistirse a cambios en su movimiento.* En sus palabras, "cualquier velocidad que una vez se imparta a un cuerpo en movimiento se mantendrá rígidamente mientras las causas externas de retardo se remuevan." Por ejemplo, una nave espacial que se desplace por el espacio abierto con sus motores apagados, se mantendrá en movimiento por siempre, esto es, *no* busca un "estado natural" de reposo.

¡ADVERTENCIA!

5.1 Primera ley de Newton

La primera ley de Newton *no dice* lo que ocurre para un cuerpo con *fuerza neta cero,* esto es, fuerzas múltiples que se cancelan; dice lo que ocurre *en ausencia de una fuerza.* Ésta es una sutil pero importante diferencia que nos permite definir una fuerza como aquello que produce un cambio en el movimiento. La descripción de un cuerpo bajo el efecto de fuerzas que se equilibran, se estudia en la segunda Ley de Newton.

Dada nuestra suposición de observaciones hechas desde marcos de referencia inerciales, podemos plantear un enunciado más práctico de la primera ley de Newton del movimiento:

Otro enunciado de la primera ley de Newton

> En ausencia de fuerzas externas, cuando se vea desde un marco de referencia inercial, un cuerpo en reposo permanece en reposo y un cuerpo en movimiento continúa en movimiento con una velocidad constante (esto es, con una rapidez constante en línea recta).

En términos más sencillos, podemos decir que **cuando ninguna fuerza actúa sobre un cuerpo, la aceleración del cuerpo es cero.** Si nada actúa para cambiar el movimiento del cuerpo, entonces su velocidad no cambia. De la primera ley, concluimos que cualquier *cuerpo aislado* (uno que no interactúa con su entorno) está en reposo o en movimiento con velocidad constante. La tendencia de un cuerpo para resistir cualquier intento de cambiar su velocidad se llana **inercia.**

> **Pregunta rápida 5.1** ¿Cuál de los siguientes enunciados es más correcto? (a) Es posible para un cuerpo tener movimiento en ausencia de fuerzas sobre el cuerpo. (b) Es posible tener fuerzas sobre un cuerpo en ausencia de movimiento del cuerpo. (c) Ni (a) ni (b) es correcto. (d) Tanto (a) como (b) son correctos.

Materiał chroniony prawem autorskim

5.3 Masa

Imagine jugar a atrapar ya sea un balón de baloncesto o una bola de boliche. ¿Cuál bola tiene más posibilidades de seguir moviéndose cuando tratamos de atraparla? ¿Cuál bola tiene mayor tendencia a permanecer sin movimiento cuando intenta lanzarla? La bola de boliche es más resistente a cambios en su velocidad que el balón de baloncesto; ¿cómo podemos cuantificar este concepto?

Definición de masa

Masa es una propiedad de un cuerpo que especifica cuánta resistencia presenta un cuerpo a cambios en su velocidad, y, como aprendimos en la sección 1.1, la unidad de masa del SI es el kilogramo. Cuanto mayor sea la masa de un cuerpo, menor es la aceleración del cuerpo bajo la acción de una fuerza aplicada dada.

Para describir la masa cuantitativamente, comenzamos por comparar en forma experimental las aceleraciones que una fuerza dada produce sobre diferentes cuerpos. Suponga que una fuerza que actúa sobre un cuerpo de masa m_1 produce una aceleración $\mathbf{a}_1$, y *la misma fuerza* que actúa sobre un cuerpo de masa m_2 produce la aceleración $\mathbf{a}_2$. La razón entre las dos masas se define como la razón *inversa* entre las magnitudes de las aceleraciones producidas por la fuerza:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \tag{5.1}$$

Por ejemplo, si una fuerza dada que actúa sobre un cuerpo de 3 kg produce una aceleración de 4 m/s^2, la misma fuerza aplicada a un cuerpo de 6 kg produce una aceleración de 2 m/s^2. Si un cuerpo tiene una masa conocida, la masa del otro cuerpo se puede obtener de las mediciones de aceleración.

La masa es una propiedad inherente de un cuerpo y es independiente del entorno del cuerpo y del método empleado para medirla. De igual modo, **la masa es una cantidad escalar** y por lo tanto obedece las reglas de aritmética ordinaria. Esto es, varias masas se pueden combinar en forma numérica simple. Por ejemplo, si combinamos una masa de 3 kg con una de 5 kg, la masa total es 8 kg. Podemos verificar este resultado experimentalmente al comparar las aceleraciones que una fuerza conocida da a varios cuerpos por separado con la aceleración que la misma fuerza da a los mismos cuerpos combinados como una unidad.

Masa y peso son cantidades diferentes

La masa no debe confundirse con el peso. **Masa y peso son dos cantidades diferentes.** El peso de un cuerpo es igual a la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida sobre el cuerpo y varía con su ubicación (vea la sección 5.5). Por ejemplo, una persona que pese 180 libras en la Tierra pesa sólo unas 30 libras en la Luna. Por otra parte, la masa de un cuerpo es igual en todas partes: un objeto que tenga una masa de 2 kg en la Tierra también tiene una masa de 2 kg en la Luna.

5.4 Segunda ley de Newton

La primera ley de Newton explica lo que le ocurre a un cuerpo cuando ninguna fuerza actúa sobre él; permanece en reposo o se mueve en línea recta con rapidez constante. La segunda ley de Newton responde a la pregunta de qué es lo que ocurre a un cuerpo que tiene una fuerza resultante diferente de cero actuando sobre él.

Imaginemos que el estudiante realiza un experimento donde empuja un bloque de hielo sobre una superficie horizontal sin fricción. Cuando ejerce alguna fuerza horizontal $\mathbf{F}$ sobre el bloque, éste se mueve con alguna aceleración $\mathbf{a}$. Si aplica una fuerza dos veces mayor, encuentra que la aceleración del bloque se duplica. Si aumenta la fuerza aplicada a $3\mathbf{F}$, la aceleración se triplica, y así sucesivamente. De estas observaciones concluimos que **la aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza que actúa sobre él.**

La aceleración de un cuerpo también depende de su masa, como se indica en la sección precedente. Podemos entender esto si consideramos el siguiente experimento. Si se aplica una fuerza $\mathbf{F}$ a un bloque de hielo sobre una superficie sin fricción, el bloque experimenta alguna aceleración $\mathbf{a}$. Si la masa del bloque se duplica, la misma fuerza aplicada produce una aceleración $\mathbf{a}/2$; si la masa se triplica, la misma fuerza aplicada produce una acelera-

Materiał chroniony prawem autorskim

ción **a**/3, y así sucesivamente. Según esta observación, concluimos que **la magnitud de la aceleración de un objeto es inversamente proporcional a su masa.**

Estas observaciones se resumen en la **segunda ley de Newton:**

Cuando se ve desde un marco de referencia inercial, la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él, e inversamente proporcional a su masa.

Por lo tanto, podemos relacionar masa, aceleración y fuerza por medio del siguiente enunciado matemático de la segunda ley de Newton:[1]

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{5.2}$$

Segunda ley de Newton

En los enunciados textual y matemático de la segunda ley de Newton, hemos indicado que la aceleración se debe a la *fuerza neta* $\sum \mathbf{F}$ que actúa sobre un objeto. La **fuerza neta** sobre un objeto es la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto. Al resolver un problema con el uso de la segunda ley de Newton, es imperativo determinar la fuerza neta correcta sobre un objeto. Puede haber numerosas fuerzas actuando sobre un objeto, pero sólo hay una aceleración.

Observe que la ecuación 5.2 es una expresión vectorial y por lo tanto es equivalente a tres ecuaciones de componentes:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum F_z = ma_z \tag{5.3}$$

Segunda ley de Newton: forma de componentes

Pregunta rápida 5.2 Un cuerpo no experimenta aceleración. ¿Cuál de lo siguiente *no puede* ser verdadero para el cuerpo? (a) Una sola fuerza actúa sobre el cuerpo. (b) Ninguna fuerza actúa sobre el cuerpo. (c) Actúan fuerzas sobre el cuerpo, pero se cancelan.

Pregunta rápida 5.3 Un cuerpo experimenta una fuerza neta y en respuesta exhibe aceleración. ¿Cuál de los siguientes enunciados *siempre* es verdadero? (a) El cuerpo se mueve en la dirección de la fuerza. (b) La aceleración es en la misma dirección que la velocidad. (c) La aceleración está en la misma dirección que la fuerza. (d) La velocidad del cuerpo aumenta.

Pregunta rápida 5.4 Usted empuja un objeto, inicialmente en reposo, sobre un piso sin fricción con una fuerza constante durante un intervalo de tiempo Δt, lo que resulta en una rapidez final de v para el cuerpo. Se repite el experimento, pero con una fuerza que es el doble de grande. ¿Qué intervalo de tiempo se requiere ahora para alcanzar la misma rapidez final v? (a) $4\,\Delta t$ (b) $2\,\Delta t$ (c) Δt (d) $\Delta t/2$ (e) $\Delta t/4$.

¡ADVERTENCIA!

5.2 La fuerza es la causa de cambios en movimiento

La fuerza *no causa* movimiento. Podemos tener movimiento en ausencia de fuerzas, como se describe en la primera ley de Newton. Fuerza es la causa de *cambios* en movimiento, como se mide por la aceleración.

¡ADVERTENCIA!

5.3 *m*a No es una fuerza

La ecuación 5.2 *no dice* que el producto **ma** sea una fuerza. Todas las fuerzas sobre un objeto se suman vectorialmente para generar la fuerza neta en el lado izquierdo de la ecuación. Esta fuerza neta se iguala entonces al producto de la masa del objeto y la aceleración que resulta de la fuerza neta. *No* incluya una "fuerza **ma**" en su análisis de las fuerzas sobre un objeto.

Unidad de fuerza

La unidad de fuerza del SI es el **newton,** que se define como la fuerza que, al actuar sobre un cuerpo de masa 1 kg, produce una aceleración de 1 m/s^2. De esta definición y la segunda ley de Newton, vemos que el newton se puede expresar en términos de las siguientes unidades fundamentales de masa, longitud y tiempo:

$$1\,\mathrm{N} \equiv 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2} \tag{5.4}$$

Definición del newton

[1] La ecuación 5.2 es válida sólo cuando la rapidez del cuerpo es mucho menor que la rapidez de la luz. Tratamos la situación relativista en el capítulo 17 del volumen II.

Materiał chroniony prawem autorskim

Tabla 5.1

Unidades de masa, aceleración y fuerza[a]

¿Qué pasaría si?

Materiał chroniony prawem autorskim

5.5 La fuerza gravitacional y peso

▲ ¡ADVERTENCIA!

▲ ¡ADVERTENCIA!

Pregunta rápida 5.5

Pregunta rápida 5.6

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo conceptual 5.2 ¿Cuánto pesa usted en un elevador?

Es probable que usted haya tenido la experiencia de estar de pie en un elevador que acelera hacia arriba cuando sube a un piso superior. En este caso, usted se siente más pesado. De hecho, si usted está de pie en una báscula de baño en ese momento, la báscula mide una fuerza que tiene una magnitud que es mayor que el peso de usted. Por lo tanto, tiene evidencia tangible y medida que lo lleva a pensar que es más pesado en esta situación. ¿*Es* más pesado?

Solución No, su peso no ha cambiado. Para dar la aceleración hacia arriba, el piso o la báscula deben ejercer en sus pies una fuerza hacia arriba que sea mayor en magnitud que el peso de usted. Es esta fuerza mayor que usted siente, lo que se interpreta como sentirse más pesado. La báscula indica esta fuerza hacia arriba, no el peso de usted, y por tanto su lectura aumenta.

5.6 Tercera ley de Newton

Si usted presiona con un dedo contra una esquina de este libro de texto, el libro le devuelve el empujón y le hace una pequeña huella en la piel. Si usted presiona más, el libro hace lo mismo y la huella en su piel es un poco mayor. Este sencillo experimento ilustra un principio general de importancia crítica conocido como **tercera ley de Newton:**

Tercera ley de Newton

Si dos objetos interactúan, la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ ejercida por el objeto 1 sobre el objeto 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza $\mathbf{F}_{21}$ ejercida por el objeto 2 sobre el objeto 1:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \tag{5.7}$$

Cuando sea importante designar fuerzas como interacciones entre dos objetos, usaremos esta notación de subíndices, donde $\mathbf{F}_{ab}$ significa "la fuerza ejercida *por* a *sobre* b." La tercera ley, que se ilustra en la figura 5.5a, es equivalente a expresar que **las fuerzas siempre se presentan en pares,** o que **no puede existir una fuerza aislada individual.** La fuerza que el objeto 1 ejerce sobre el objeto 2 puede llamarse *fuerza de acción* y la fuerza del objeto 2 sobre el objeto 1, *fuerza de reacción*. En realidad, cualquiera de las dos puede llamarse fuerza de acción o de reacción. **La fuerza de acción es igual en magnitud a la fuerza de reacción y opuesta en dirección. En todos los casos, las fuerzas de acción y reacción actúan sobre objetos diferentes y deben ser del mismo tipo.** Por ejemplo, la fuerza que actúa sobre un proyectil en caída libre es la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre el proyectil $\mathbf{F}_g = \mathbf{F}_{Tp}$ (E = Tierra, p = proyectil), y la magnitud de esta fuerza es mg. La reacción a esta fuerza es la fuerza gravitacional ejercida por el proyectil sobre la Tierra $\mathbf{F}_{pT} = -\mathbf{F}_{Tp}$. La fuerza de reacción $\mathbf{F}_{pT}$ debe acelerar la Tierra hacia el proyectil exactamente como la fuerza de acción $\mathbf{F}_{Tp}$ acelera el proyectil hacia la Tierra. Sin embargo, como la Tierra tiene una masa tan grande, su aceleración debida a esta fuerza de reacción es tan pequeña que es insignificante.

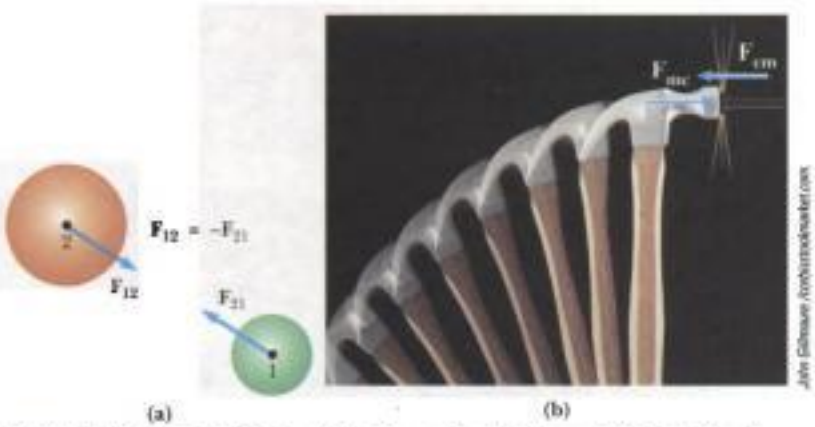


Figura 5.5 Tercera ley de Newton. (a) La fuerza $\mathbf{F}_{12}$ ejercida por el objeto 1 sobre el objeto 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza $\mathbf{F}_{21}$ ejercida por el objeto 2 sobre el objeto 1. (b) La fuerza $\mathbf{F}_{mc}$ ejercida por el martillo sobre el clavo, es igual en magnitud y opuesta a la fuerza $\mathbf{F}_{cm}$ ejercida por el clavo sobre el martillo.

Materiał chroniony prawem autorskim

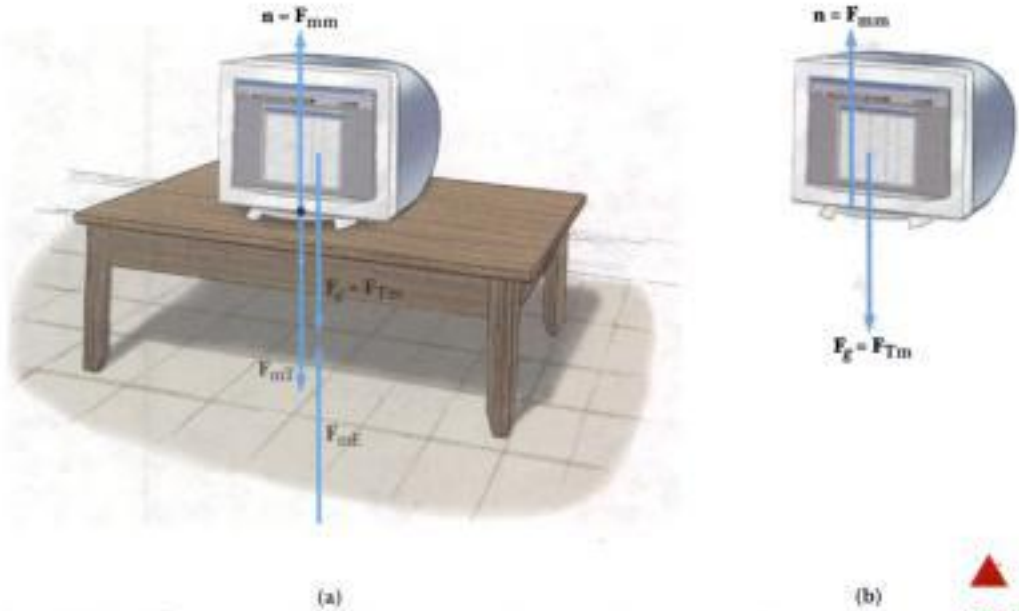


Figura 5.6 (a) Cuando un monitor de computadora está en reposo sobre una mesa, las fuerzas que actúan sobre el monitor son la fuerza normal $\mathbf{n}$ y la fuerza gravitacional $\mathbf{F}_g$. La reacción a $\mathbf{n}$ es la fuerza $\mathbf{F}_{mm}$ ejercida por el monitor sobre la mesa. La reacción a $\mathbf{F}_g$ es la fuerza $\mathbf{F}_{mT}$ ejercida por el monitor sobre la Tierra. (b) Diagrama de cuerpo libre para el monitor.

Otro ejemplo de la tercera ley de Newton se ilustra en la figura 5.5b. La fuerza $\mathbf{F}_{mc}$ ejercida por el martillo sobre el clavo (la acción) es igual en magnitud y opuesta a la fuerza $\mathbf{F}_{cm}$ ejercida por el clavo sobre el martillo (la reacción). Esta última fuerza detiene el movimiento hacia delante del martillo cuando golpea al clavo.

El estudiante experimenta la tercera ley directamente si con el puño golpea una pared o patea un balón de fútbol con el pie desnudo. Puede sentir la fuerza devuelta sobre su puño o pie. Debe ser capaz de identificar las fuerzas de acción y reacción en estos casos.

La Tierra ejerce una fuerza gravitacional $\mathbf{F}_g$ sobre cualquier objeto. Si el objeto es un monitor de computadora en reposo sobre una mesa, como en la figura 5.6a, la fuerza de reacción a $\mathbf{F}_g = \mathbf{F}_{Tm}$ es la fuerza ejercida por el monitor sobre la Tierra $\mathbf{F}_{mT} = -\mathbf{F}_{Tm}$. El monitor no acelera porque es sostenido por la mesa. La mesa ejerce sobre el monitor una fuerza hacia arriba $\mathbf{n} = \mathbf{F}_{mm}$, llamada **fuerza normal.**[4] Ésta es la fuerza que impide que el monitor caiga por la mesa; puede tener cualquier valor necesario, hasta el punto de romper la mesa. De la segunda ley de Newton, vemos que, como el monitor tiene aceleración cero, se deduce que $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{n} - m\mathbf{g} = 0$, o $n = mg$. La fuerza normal equilibra la fuerza gravitacional sobre el monitor, de modo que la fuerza neta sobre el monitor es cero. La reacción a $\mathbf{n}$ es la fuerza ejercida por el monitor hacia abajo sobre la mesa, $\mathbf{F}_{mm} = -\mathbf{F}_{mm} = -\mathbf{n}$.

Nótese que las fuerzas que actúan sobre el monitor son $\mathbf{F}_g$ y $\mathbf{n}$, como se muestra en la figura 5.6b. Las dos fuerzas de reacción $\mathbf{F}_{mT}$ y $\mathbf{F}_{mm}$ son ejercidas sobre objetos que no son el monitor. Recuerde, **las dos fuerzas en un par de acción-reacción siempre actúan sobre dos objetos diferentes.**

La figura 5.6 ilustra un paso sumamente importante al resolver problemas que comprendan fuerzas. La figura 5.6a muestra muchas de las fuerzas en la situación —las que actúan sobre el monitor, una actuando sobre la mesa, y una actuando sobre la Tierra. La figura 5.6b, en contraste, muestra sólo las fuerzas que actúan sobre *un objeto*, el monitor. Éste es un dibujo de gran importancia llamado **diagrama de cuerpo libre.** Cuando se analice un cuerpo sometido a fuerzas, estamos interesados en la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo, que modelamos como una partícula. Entonces, un diagrama de cuerpo libre nos ayuda a aislar sólo aquellas fuerzas sobre el cuerpo y eliminar las otras fuerzas de nuestro análisis. El diagrama de cuerpo libre se puede simplificar aún más al representar el cuerpo (por ejemplo el monitor) como una partícula, con sólo trazar un punto.

[4] *Normal* en este contexto significa *perpendicular*.

¡ADVERTENCIA!

5.6 *n* no siempre es igual a *mg*

En la situación que se ilustra en la figura 5.6 y en muchas otras, encontramos que $n = mg$ (la fuerza normal tiene la misma magnitud que la fuerza gravitacional). Sin embargo, esto *no es* cierto generalmente. Si un objeto está sobre un plano inclinado, si hay fuerzas aplicadas con componentes verticales, o si hay una aceleración vertical del sistema, entonces $n \neq mg$. *Siempre* aplique la segunda ley de Newton para hallar la relación entre n y mg.

Definición de fuerza normal

¡ADVERTENCIA!

5.7 Tercera ley de Newton

Éste es un concepto tan importante y a veces mal comprendido que lo repetimos aquí en una Advertencia. Las fuerzas de acción y reacción de la tercera ley de Newton actúan sobre objetos *diferentes*. Dos fuerzas que actúen sobre el mismo objeto, incluso si son iguales en magnitud y opuestas en dirección, *no pueden* ser un par de acción-reacción.

Materiał chroniony prawem autorskim

¡ADVERTENCIA!

Pregunta rápida 5.7

Pregunta rápida 5.8

Pregunta rápida 5.9

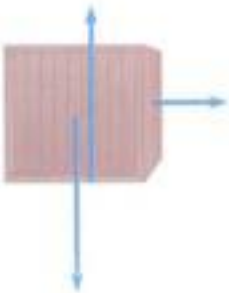
Pregunta rápida 5.10

(A)

(B)

5.7 Algunas aplicaciones de las leyes de Newton

Materiał chroniony prawem autorskim



Materiał chroniony prawem autorskim

Figura 5.9 Cuando un objeto empuja hacia abajo sobre otro objeto con una fuerza **F**, la fuerza normal **n** es mayor que la fuerza gravitacional: $n = F_g + F$.

SUGERENCIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Aplicación de las leyes de Newton

Se recomienda el siguiente procedimiento para resolver problemas donde intervengan las leyes de Newton:

- Trazar un diagrama sencillo y claro del sistema para ayudar a *conceptualizar* el problema.
- *Clasificar* el problema: Si cualquier componente de aceleración es cero, la partícula está en equilibrio en esta dirección y $\Sigma F = 0$. Si no es así, la partícula experimenta una aceleración, el problema es de no equilibrio en esta dirección, y $\Sigma F = ma$.
- *Analice* el problema y aísle el objeto cuyo movimiento se analiza. Trace un diagrama de cuerpo libre para este objeto. Para sistemas que contengan más de un objeto, trace diagramas de cuerpo libre *separados* para cada objeto. *No* incluya, en el diagrama de cuerpo libre fuerzas ejercidas por el objeto sobre su entorno.
- Establezca ejes de coordenadas convenientes para cada objeto y encuentre los componentes de las fuerzas a lo largo de estos ejes. Aplique la segunda ley de Newton, $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$, en forma de componente. Verifique sus dimensiones para asegurarse que todos los términos tengan unidades de fuerza.
- Despeje las incógnitas de las ecuaciones de componentes. Recuerde que debe tener tantas ecuaciones independientes como incógnitas tenga para obtener una solución completa.
- *Finalice* al asegurarse que los resultados son consistentes con el diagrama de cuerpo libre. También verifique las predicciones de sus soluciones para valores extremos de las variables. Al hacerlo así, el estudiante puede con frecuencia detectar errores en sus resultados.

Ejemplo 5.4 Un semáforo en reposo

Un semáforo que pesa 122 N cuelga de un cable unido a otros dos cables sujetos a un soporte, como en la figura 5.10a. Los cables superiores forman ángulos de 37.0° y 53.0° con la horizontal. Estos cables superiores no son tan fuertes como el cable vertical, y se romperán si la tensión en ellos excede de 100 N. ¿Permanecerá el semáforo colgando en esta situación, o se romperá uno de los cables?

Solución *Conceptualicemos* el problema al inspeccionar el dibujo de la figura 5.10a. Supongamos que los cables no se rompen, de modo que no hay aceleración de ningún tipo en este problema en ninguna dirección. Esto nos permite *clasificar* el problema como uno de equilibrio. Como la aceleración del sistema es cero, sabemos que la fuerza neta sobre el semáforo y la fuerza neta sobre el nudo son ambos cero. Para *analizar* el problema,

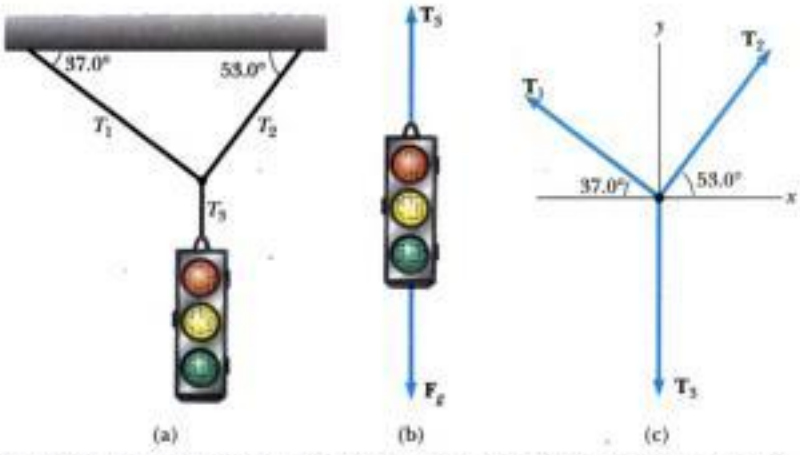


Figura 5.10 (Ejemplo 5.4) (a) Semáforo suspendido por cables. (b) Diagrama de cuerpo libre para el semáforo. (c) Diagrama de cuerpo libre para el nudo donde se unen los tres cables.

Materiał chroniony prawem autorskim

construimos dos diagramas de cuerpo libre: uno para el semáforo, mostrado en la figura 5.10b, y uno para el nudo que sostiene juntos los tres cables, como en la figura 5.10c. Este nudo es un objeto conveniente para escoger porque todas las fuerzas de interés actúan a lo largo de líneas que pasan por el nudo.

Con referencia a la figura 5.10b, aplicamos la condición de equilibrio en la dirección y, $\Sigma F_y = 0 \rightarrow T_3 - F_g = 0$. Esto lleva a $T_3 = F_g = 122$ N. Entonces, la fuerza hacia arriba $\mathbf{T}_3$ ejercida por el cable vertical sobre el semáforo equilibra la fuerza gravitacional.

A continuación, escogemos los ejes de coordenadas que se ilustran en la figura 5.10c y descomponemos las fuerzas que actúan sobre el nudo en sus componentes:

Fuerza	Componente x	Componente y
$\mathbf{T}_1$	$-T_1 \cos 37.0°$	$T_1 \operatorname{sen} 37.0°$
$\mathbf{T}_2$	$T_2 \cos 53.0°$	$T_2 \operatorname{sen} 53.0°$
$\mathbf{T}_3$	0	-122 N

Conocer que el nudo está en equilibrio ($\mathbf{a} = 0$) nos permite escribir

$$(1) \qquad \sum F_x = -T_1 \cos 37.0° + T_2 \cos 53.0° = 0$$

$$(2) \qquad \sum F_y = T_1 \operatorname{sen} 37.0° + T_2 \operatorname{sen} 53.0° + (-122 \text{ N}) = 0$$

De (1) vemos que los componentes horizontales de $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ deben ser iguales en magnitud, y de (2) vemos que la suma de los componentes verticales de $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ deben equilibrar la fuerza $\mathbf{T}_3$ hacia abajo, que es igual en magnitud al peso del semáforo. De la ecuación (1) despejamos T_2 en términos de T_1 para obtener

$$(3) \qquad T_2 = T_1\left(\frac{\cos 37.0°}{\cos 53.0°}\right) = 1.33T_1$$

Este valor de T_2 se sustituye en (2) para obtener

$$T_1 \operatorname{sen} 37.0° + (1.33T_1)(\operatorname{sen} 53.0°) - 122 \text{ N} = 0$$

$$T_1 = 73.4 \text{ N}$$

$$T_2 = 1.33T_1 = 97.4 \text{ N}$$

Estos dos valores son menores a 100 N (apenas, para T_2), de modo que los cables no se rompen. *Finalicemos* este problema al imaginar un cambio en el sistema, como en el siguiente **¿Qué pasaría si?**

¿Qué pasaría si? Suponga que los dos ángulos de la figura 5.10a son iguales. ¿Cuál sería la relación entre T_1 y T_2?

Respuesta Podemos decir, de la simetría del problema, que las dos tensiones T_1 y T_2 serían iguales entre ellas. Matemáticamente, si los ángulos iguales se llaman θ, la ecuación (3) se convierte en

$$T_2 = T_1\left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta}\right) = T_1$$

que también nos dice que las tensiones son iguales. Sin conocer el valor específico de θ, no podemos hallar los valores de T_1 y T_2. No obstante, las tensiones serán iguales entre ellas, sin importar el valor de θ.

Ejemplo conceptual 5.5 Fuerzas entre furgones en un tren

Los furgones de un tren están conectados por *acopladores*, que están bajo tensión cuando la locomotora tira del tren. Al movernos por el tren desde la locomotora hasta el último furgón, ¿la tensión en los acopladores aumenta, disminuye, o es igual cuando el tren adquiere rapidez? Cuando el maquinista aplica los frenos, los acopladores están bajo compresión. ¿Cómo varía esta fuerza de compresión desde la locomotora hasta el último furgón? (Suponga que se aplican sólo los frenos de las ruedas de la locomotora.)

Solución Cuando el tren adquiere rapidez, la tensión disminuye desde la locomotora hasta el final del tren. El acoplador entre la locomotora y el primer furgón debe aplicar suficiente fuerza para acelerar el resto de los furgones. Cuando avanzamos a lo largo del tren, cada acoplador está acelerando menos masa tras de sí. El último acoplador tiene que acelerar sólo al último furgón, y por lo tanto está bajo la tracción más pequeña.

Cuando se aplican los frenos, la fuerza disminuye otra vez del frente hacia el final del tren. El acoplador que conecta la locomotora al primer furgón debe aplicar una gran fuerza para reducir la velocidad del resto de los furgones, pero el último acoplador debe aplicar una fuerza suficientemente grande para reducir la velocidad *sólo* del último furgón.

Ejemplo 5.6 Un auto sin control

Un auto de masa m está sobre la superficie helada de un camino inclinado a un ángulo θ, como en la figura 5.11a.

(A) Encuentre la aceleración del auto, suponiendo que el camino es sin fricción.

Solución *Conceptualice* la situación utilizando la figura 5.11a. De nuestra experiencia diaria, sabemos que un auto sobre un plano inclinado helado va a acelerar hacia abajo: (Hará lo mismo que un auto cuyos frenos no funcionen.) Esto nos permite *clasificar* la situación como un problema de no equilibrio, es decir, uno en el que un objeto acelera. La figura 5.11b muestra el diagrama de cuerpo libre para el auto, que podemos usar para *analizar* el problema. Las únicas fuerzas que actúan sobre el auto son la fuerza normal $\mathbf{n}$ ejercida por el plano inclinado, que actúa perpendicular al plano, y la fuerza gravitacional $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$, que actúa verticalmente hacia abajo. Para problemas donde aparecen planos inclinados, es conveniente escoger los ejes de coordenadas con x a lo largo del plano inclinado y y perpendicular al mismo, como en la figura 5.11b. (Es posible resolver el problema con los ejes horizontal y vertical como "estándar". Como práctica, el estudiante puede intentarlo.) Entonces, sustituimos la fuerza gravitacional por un componente de magnitud $mg \operatorname{sen} \theta$ a lo largo del eje x positivo y uno de magnitud $mg \cos \theta$ a lo largo del eje y negativo.

Ahora aplicamos la segunda ley de Newton en forma de componente, observando que $a_y = 0$:

$$(1) \qquad \sum F_x = mg \operatorname{sen} \theta = ma_x$$

$$(2) \qquad \sum F_y = n - mg \cos \theta = 0$$

Materiał chroniony prawem autorskim

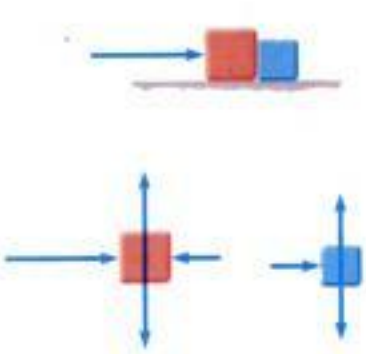
(B)

¿Qué pasaría si?

Materiał chroniony prawem autorskim

(B)

(A)



Materiał chroniony prawem autorskim

¿Qué pasaría si? **Imagine que la fuerza F en la figura 5.12 se aplica hacia la izquierda sobre el bloque derecho de masa m_2. ¿Es la magnitud de la fuerza P_{12} igual a la que era cuando la fuerza se aplicó hacia la derecha sobre m_1?**

Respuesta Con la fuerza aplicada hacia la izquierda sobre m_2, la fuerza constante debe acelerar m_1. En la situación original, la fuerza de contacto acelera m_2. Como $m_1 > m_2$, esto requiere de más fuerza, de modo que la magnitud de P_{12} es mayor que en la situación original.

Ejemplo 5.8 Pesar un pez en un elevador

Una persona pesa un pez de masa m en una báscula de resorte unida al techo de un elevador, como se ilustra en la figura 5.13. Demuestre que si el elevador acelera hacia arriba o hacia abajo, la báscula de resorte da una lectura que es diferente del peso del pez.

Solución *Conceptualice* al observar que la lectura en la báscula está relacionada con la extensión del resorte de la báscula, que está relacionada con la fuerza sobre el extremo del resorte como en la figura 5.2. Imagine que una cuerda cuelga del extremo del resorte, de modo que la magnitud de la fuerza ejercida sobre el resorte es igual a la tensión T de la cuerda. Por lo tanto, buscamos T. La fuerza **T** tira hacia abajo sobre el resorte y hacia arriba sobre el pez. En consecuencia, podemos *clasificar* este problema como uno de análisis de fuerzas y aceleración asociado con el pez por medio de la segunda ley de Newton. Para *analizar* el problema, inspeccionamos los diagramas de cuerpo libre para el pez en la figura 5.13 y observamos que las fuerzas externas que actúan sobre el pez son la fuerza gravitacional hacia abajo $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$ y la fuerza **T** ejercida por la báscula. Si el elevador está ya sea en reposo o moviéndose a velocidad constante, el pez no acelera, y por lo tanto $\Sigma F_y = T - F_g = 0$ o $T = F_g = mg$. (Recuerde que el escalar mg es el peso del pez.)

Si el elevador se mueve con una aceleración **a** respecto a un observador que se encuentra de pie fuera del elevador en un marco inercial (vea la figura 5.13), la segunda ley de Newton aplicada al pez da la fuerza neta sobre el pez:

$$(1) \qquad \sum F_y = T - mg = ma_y$$

donde hemos escogido hacia arriba como la dirección y positiva. Por lo tanto, concluimos de (1) que la lectura T de la báscula es mayor que el peso del pez si **a** es hacia arriba, de modo que a_y es positiva, y que la lectura es menor que mg si **a** es hacia abajo, de modo que a_y es negativa.

Por ejemplo, si el peso del pez es 40.0 N y **a** es hacia arriba, de modo que $a_y = +2.00\ \text{m/s}^2$, la lectura de la báscula de (1) es

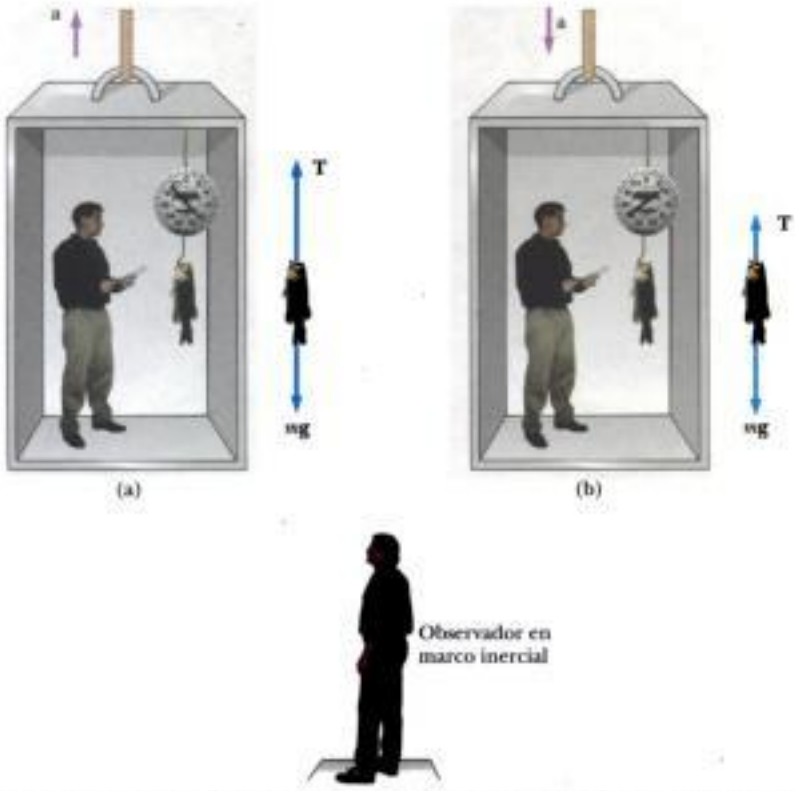


Figura 5.13 (Ejemplo 5.8) Peso aparente contra peso real. (a) Cuando el elevador acelera hacia arriba, la báscula de resorte indica un valor mayor que el peso del pez. (b) Cuando el elevador acelera hacia abajo, la báscula de resorte indica un valor menor que el peso del pez.

Materiał chroniony prawem autorskim

$$(2) \quad T = ma_y + mg = mg\left(\frac{a_y}{g} + 1\right)$$

$$= F_g\left(\frac{a_y}{g} + 1\right) = (40.0\ \text{N})\left(\frac{2.00\ \text{m/s}^2}{9.80\ \text{m/s}^2} + 1\right)$$

$$= \mathbf{48.2\ N}$$

Si **a** es hacia abajo de modo que $a_y = -2.00\ \text{m/s}^2$, entonces (2) da

$$T = F_g\left(\frac{a_y}{g} + 1\right) = (40.0\ \text{N})\left(\frac{-2.00\ \text{m/s}^2}{9.80\ \text{m/s}^2} + 1\right)$$

$$= \mathbf{31.8\ N}$$

Para *finalizar* este problema, tome este consejo: si usted compra un pez en un elevador, asegúrese que el pez sea pesado cuando el elevador esté en reposo o ¡acelere hacia abajo! Además, nótese que de la información dada aquí, no podemos determinar la dirección de movimiento del elevador.

¿Qué pasaría si? Suponga que se rompe el cable del elevador, de modo que el elevador y su contenido están en caída libre. ¿Qué le pasa a la lectura de la escala?

Respuesta Si el elevador cae libremente, su aceleración es $a_y = -g$. Vemos de (2) que la lectura T de la báscula es cero en este caso; esto es, el pez *parece* no tener peso.

Ejemplo 5.9 La máquina de Atwood

Cuando dos objetos de masa desigual cuelgan verticalmente sobre una polea sin fricción y masa insignificante, como en la figura 5.14a, el arreglo se llama *máquina de Atwood*. El aparato se usa a veces en el laboratorio para medir la aceleración en caída libre. Determine la magnitud de la aceleración de los dos objetos y la tensión en la cuerda de peso ligero.

Solución *Conceptualice* la situación ilustrada en la figura 5.14a: cuando un objeto que se mueve hacia arriba, el otro objeto se mueve hacia abajo. Como los objetos están conectados por una cuerda que no es extensible, sus aceleraciones deben ser de igual magnitud. Los objetos de la máquina de Atwood están sometidos a la fuerza gravitacional, así como a las fuerzas ejercidas por las cuerdas conectadas a ellos, es decir, podemos *clasificar* éste como un problema de segunda ley de Newton. Para *analizar* la situación, los diagramas de cuerpo libre para los dos objetos se muestran en la figura 5.14b. Dos fuerzas actúan sobre cada objeto: la fuerza hacia arriba **T** ejercida por la cuerda y la fuerza gravitacional hacia abajo. En problemas como éste, en los que la polea se modela como sin masa y sin fricción, la tensión en la cuerda en ambos lados de la polea es la misma. Si la polea tiene masa y/o está sometida a fricción, las tensiones en cualquier lado no son iguales y la situación requiere técnicas que aprenderemos en el capítulo 10.

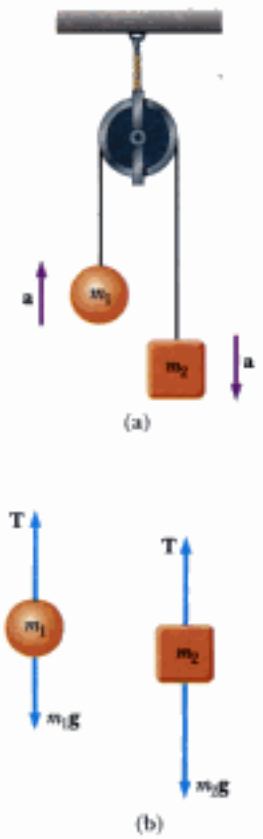


Figura 5.14 (Ejemplo 5.9). Máquina de Atwood. (a) Dos objetos ($m_2 > m_1$) conectados por una cuerda sin masa y no extensible colocada sobre una polea sin fricción. (b) Diagramas de cuerpo libre para los dos objetos.

Debemos tener sumo cuidado con signos en problemas como éste. En la figura 5.14a, nótese que si el objeto 1 acelera hacia arriba, entonces el objeto 2 acelera hacia abajo. Entonces, para consistencia con signos, si definimos la dirección hacia arriba como positiva para el objeto 1, debemos definir la dirección hacia abajo como positiva para el objeto 2. Con esta convención de signos, ambos objetos aceleran en la misma dirección, como se define por la elección de signo. Además, de acuerdo con esta convención de signos, el componente y de la fuerza neta ejercida sobre el objeto 1 es $T - m_1g$, y el componente y de la fuerza neta ejercida sobre el objeto 2 es $m_2g - T$. Nótese que hemos escogido los signos de las fuerzas para ser consistentes con las opciones de signos para arriba y abajo para cada objeto. Si suponemos que $m_2 > m_1$, entonces m_1 debe acelerar hacia arriba, mientras que m_2 debe acelerar hacia abajo.

Cuando se aplica la segunda ley de Newton al objeto 1, obtenemos

$$(1) \qquad \sum F_y = T - m_1g = m_1a_y$$

análogamente, para el objeto 2 encontramos

$$(2) \qquad \sum F_y = m_2g - T = m_2a_y$$

Cuando (2) se suma a (1), T se cancela y tenemos

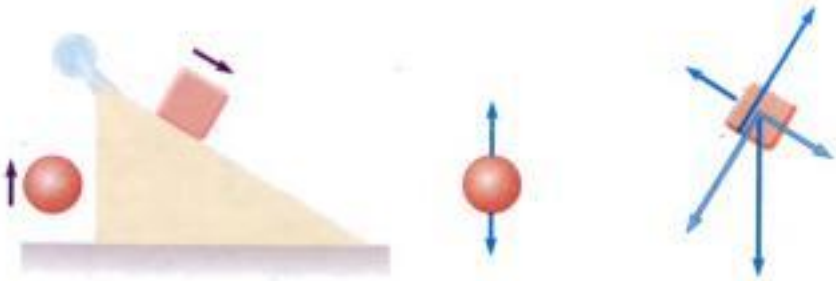
$$-m_1g + m_2g = m_1a_y + m_2a_y$$

$$(3) \qquad a_y = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)g$$

Materiał chroniony prawem autorskim

(B)

¿Qué pasaría si? (A)



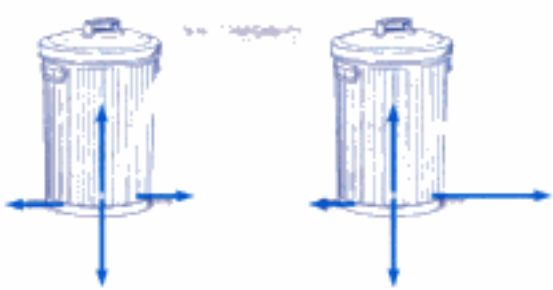
Materiał chroniony prawem autorskim

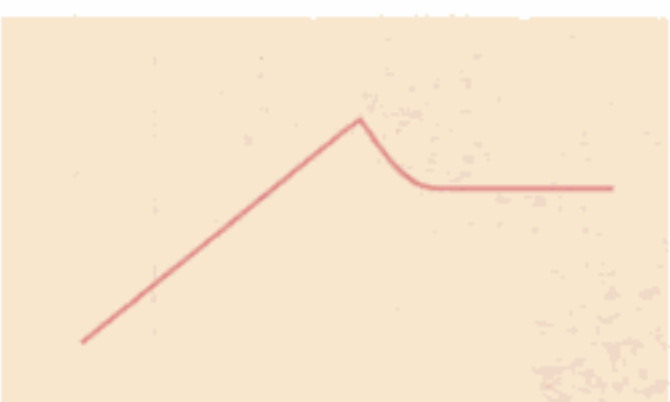
¿Qué pasaría si? (A)

(B)

5.8 Fuerzas de fricción

Fuerza de fricción estática





En el vínculo **Active Figures** *en* **http://www.pse6.com**, *usted puede variar la carga del bote de basura y practicar deslizarlo sobre superficies de rugosidad variable. Nótese el efecto sobre el movimiento del bote de basura y el correspondiente comportamiento de la gráfica en (c).*

Materiał chroniony prawem autorskim

sólo en unos pocos lugares donde los picos del material se tocan, como se ve en la vista amplificada de la superficie en la figura 5.16a.

En estos lugares, la fuerza de fricción aparece en parte porque un pico físicamente bloquea el movimiento de un pico de la superficie opuesta, y en parte por enlace químico ("soldaduras de puntos") de picos opuestos cuando entran en contacto. Si las superficies son rugosas, es probable que ocurra un rebote, lo cual complica más el análisis. Aun cuando los detalles de fricción son bastante complejos a nivel atómico, esta fuerza finalmente comprende una interacción eléctrica entre átomos o moléculas.

Si aumentamos la magnitud de **F**, como en la figura 5.16b, el bote de basura acaba por deslizarse. Cuando el bote de basura está a punto de deslizarse, f_s tiene su máximo valor $f_{s,máx}$, como se ve en la figura 5.16c. Cuando F rebasa $f_{s,máx}$, el bote de basura se mueve y acelera a la derecha. Cuando el bote de basura está en movimiento, la fuerza de fricción es menor que $f_{s,máx}$ (figura 5.16c). La fuerza de fricción para un objeto en movimiento se llama **fuerza de fricción cinética f_k**. La fuerza neta $F - f_k$ en la dirección x produce una aceleración a la derecha, de acuerdo con la segunda ley de Newton. Si $F = f_k$, la aceleración es cero, y el bote de basura se mueve a la derecha con rapidez constante. Si se remueve la fuerza aplicada, la fuerza de fricción que actúa a la izquierda dará una aceleración del bote de basura en la dirección $-x$ y finalmente lo lleva al reposo, de nuevo consistente con la segunda ley de Newton.

Fuerza de fricción cinética

Experimentalmente, encontramos que, a una buena aproximación, $f_{s,máx}$ y f_k son proporcionales a la magnitud de la fuerza normal. Las siguientes leyes empíricas de fricción resumen las observaciones experimentales:

- La magnitud de la fuerza de fricción estática entre dos superficies cualesquiera en contacto pueden tener los valores

$$f_s \leq \mu_s n \tag{5.8}$$

donde la constante adimensional μ_s se llama **coeficiente de fricción estática** y n es la magnitud de la fuerza normal ejercida por una superficie sobre otra. La igualdad de la ecuación (5.8) se cumple cuando las superficies están a punto de deslizarse, esto es, cuando $f_s = f_{s,máx} = \mu_s n$. Esta situación recibe el nombre de *movimiento inminente*. La desigualdad se cumple cuando las superficies no están a punto de deslizarse.

- La magnitud de la fuerza de fricción cinética que actúa entre dos superficies es

$$f_k = \mu_k n \tag{5.9}$$

donde μ_k es el **coeficiente de fricción cinética.** Aun cuando el coeficiente de fricción cinética puede variar con la rapidez, por lo general despreciaremos cualquiera de estas variaciones en este texto.

¡ADVERTENCIA!

5.9 El signo igual se usa en situaciones limitadas

En la ecuación 5.8, el signo igual se usa *sólo* en el caso en el que las superficies están a punto de quedar libres y empezar a deslizarse. No caiga en la trampa común de usar $f_s = \mu_s n$ en *cualquier* situación de estática.

¡ADVERTENCIA!

5.10 Ecuaciones de fricción

Las ecuaciones 5.8 y 5.9 *no son* vectoriales. Son relaciones entre las *magnitudes* de los vectores que representan las fuerzas de fricción y normales. Como las fuerzas de fricción y normales son perpendiculares entre sí, los vectores no pueden estar relacionados por una constante multiplicadora.

Tabla 5.2

Coeficientes de fricción[a]

	μ_s	μ_k
Acero sobre acero	0.74	0.57
Aluminio sobre acero	0.61	0.47
Cobre sobre acero	0.53	0.36
Caucho sobre concreto	1.0	0.8
Madera sobre madera	0.25–0.5	0.2
Vidrio sobre vidrio	0.94	0.4
Madera encerada sobre nieve húmeda	0.14	0.1
Madera encerada sobre nieve seca	—	0.04
Metal sobre metal (lubricados)	0.15	0.06
Hielo sobre hielo	0.1	0.03
Teflón sobre teflón	0.04	0.04
Uniones sinoviales en seres humanos	0.01	0.003

[a] Todos los valores son aproximados. En algunos casos, el coeficiente de fricción puede exceder de 1.0

Materiał chroniony prawem autorskim

- Los valores de μ_k y μ_s dependen de la naturaleza de las superficies, pero μ_k es generalmente menor que μ_s. Valores típicos van de unos 0.03 a 1.0. La tabla 5.2 es una lista de algunos valores reportados.
- La dirección de la fuerza de fricción sobre un objeto es paralela a la superficie con la que el objeto está en contacto y opuesta al movimiento real (fricción cinética) o el movimiento inminente (fricción estática) del objeto con respecto a la superficie.
- Los coeficientes de fricción son casi independientes del área de contacto entre las superficies. Podríamos esperar que poner un objeto sobre un costado con mayor área podría aumentar la fuerza de fricción. Si bien esto proporciona más puntos en contacto, como en la figura 5.16a, el peso del objeto se extiende sobre un área mayor, de modo que los puntos individuales no están tan estrechamente presionados. Estos efectos aproximadamente se compensan entres sí, de modo que la fuerza de fricción es independiente del área.

¡ADVERTENCIA!

5.11 La dirección de la fuerza de fricción

A veces se hace un enunciado incorrecto acerca de la fuerza de fricción entre un objeto y una superficie: "la fuerza de fricción sobre un objeto es opuesta a su movimiento o a su movimiento inminente", en lugar de la frase correcta "la fuerza de fricción sobre un objeto es opuesta a su movimiento, o movimiento inminente, *respecto a la superficie.*" Piense atentamente acerca de la pregunta rápida 5.12.

Pregunta rápida 5.11 Usted presiona, con su mano, un libro de texto de física contra una pared vertical. ¿Cuál es la dirección de la fuerza de fricción ejercida por la pared sobre el libro? (a) hacia abajo (b) hacia arriba (c) sale de la pared (d) entra en la pared.

Pregunta rápida 5.12 Una caja está localizada en el centro de un camión de plataforma. El camión acelera al este, y la caja se mueve con él, sin deslizarse en absoluto. ¿Cuál es la dirección de la fuerza de fricción ejercida por el camión sobre la caja? (a) al oeste (b) al este (c) No existe fuerza de fricción porque la caja no se desliza.

Pregunta rápida 5.13 Usted pone su libro de física sobre una tabla, levanta un extremo de la tabla de modo que el ángulo del plano aumenta. Finalmente, el libro empieza a deslizarse sobre la tabla. Si usted mantiene el ángulo de la tabla en este valor, el libro (a) se mueve con rapidez constante (b) aumenta su rapidez (c) desminuye su rapidez (d) ninguna de éstas.

Pregunta rápida 5.14 Usted está jugando con su hija en la nieve. Ella se sienta sobre un trineo y le pide que la empuje sobre un campo horizontal y plano. Usted tiene la opción de (a) empujarla desde atrás, al aplicar una fuerza hacia abajo sobre los hombros de ella a 30° abajo de la horizontal (figura 5.17a), o bien, (b) atar una cuerda al frente del trineo y tirar de éste con una fuerza a 30° arriba de la horizontal (figura 5.17b). ¿Cuál sería más fácil para usted y por qué?

(a) (b)

Figura 5.17 (Pregunta rápida 5.14) Un padre empuja a su hija sobre un trineo, ya sea (a) empujando hacia abajo sobre sus hombros, o (b) tirando de una cuerda.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo conceptual 5.11 ¿Por qué acelera el trineo?

Un caballo tira de un trineo a lo largo de un camino plano y cubierto de nieve, haciendo que el trineo acelere, como se ve en la figura 5.18a. La tercera ley de Newton dice que el trineo ejerce una fuerza de igual magnitud y dirección opuesta sobre el caballo. En vista de esto, ¿cómo puede acelerar el trineo? ¿no se cancelan las fuerzas? ¿Bajo qué condiciones se mueve el sistema (caballo más trineo) con velocidad constante?

Solución Recuerde que las fuerzas descritas en la tercera ley de Newton actúan sobre objetos *diferentes*; el caballo ejerce una fuerza sobre el trineo, y el trineo ejerce una fuerza de igual magnitud y en dirección opuesta sobre el caballo. Debido a que estamos interesados sólo en el movimiento del trineo, no consideramos las fuerzas que éste ejerce sobre el caballo. Al determinar el movimiento de un objeto, el lector debe sumar sólo las fuerzas sobre ese objeto. (Éste es el principio que hay detrás de dibujar un diagrama de cuerpo libre). Las fuerzas horizontales ejercidas sobre el trineo son la fuerza hacia delante **T** ejercida por el caballo y la fuerza hacia atrás de fricción $\mathbf{f}_{\text{trineo}}$ entre el trineo y la nieve (vea la figura 5.18b). Cuando la fuerza hacia delante sobre el trineo rebasa la fuerza hacia atrás, el trineo acelera a la derecha.

Las fuerzas horizontales ejercidas sobre el trineo son la fuerza hacia delante $\mathbf{f}_{\text{caballo}}$ ejercida por la Tierra y la fuerza de tensión hacia atrás **T** ejercida por el trineo (figura 5.18c). La resultante de estas dos fuerzas hace que el caballo acelere.

La fuerza que acelera al sistema (caballo más trineo) es la fuerza neta $\mathbf{f}_{\text{caballo}} - \mathbf{f}_{\text{trineo}}$. Cuando $\mathbf{f}_{\text{caballo}}$ se equilibra con $\mathbf{f}_{\text{trineo}}$, el sistema se mueve con velocidad constante.

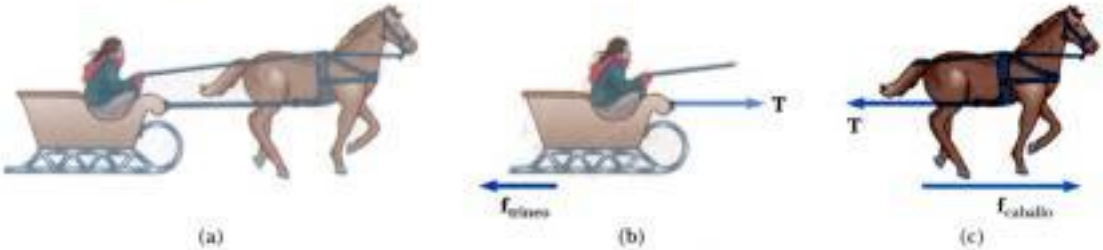


Figura 5.18 (Ejemplo conceptual 5.11)

Ejemplo 5.12 Determinación experimental de μ_s y μ_k

El siguiente es un método sencillo de medir coeficientes de fricción: Suponga que un bloque se coloca sobre una superficie rugosa inclinada con respecto a la horizontal, como se ve en la figura 5.19. El ángulo de inclinación se aumenta hasta que el bloque empieza a moverse. Demuestre que al medir el ángulo crítico θ_c para el cual apenas se presenta este deslizamiento, podemos obtener μ_s.

Solución *Si conceptualizamos* del diagrama de cuerpo libre de la figura 5.19, vemos que podemos *clasificar* éste como un problema de segunda ley de Newton. Para *analizar* el problema, nótese que las únicas fuerzas que actúan sobre el bloque son la fuerza gravitacional $m\mathbf{g}$, la fuerza normal **n**, y la fuerza de fricción estática $\mathbf{f}_s$. Estas fuerzas se equilibran cuando el bloque no se mueve. Cuando escogemos que x sea paralela al plano y que y sea perpendicular al plano, la segunda ley de Newton aplicada al bloque para esta situación equilibrada da

$$(1) \qquad \sum F_x = mg \operatorname{sen} \theta - f_s = ma_x = 0$$

$$(2) \qquad \sum F_y = n - mg \cos \theta = ma_y = 0$$

Podemos eliminar mg al sustituir $mg = n/\cos\theta$ de (2) en (1) para hallar

$$(3) \qquad f_s = mg \operatorname{sen} \theta = \left(\frac{n}{\cos \theta}\right) \operatorname{sen} \theta = n \tan \theta$$

Cuando el plano inclinado aumenta hasta que el bloque está a punto de deslizarse, la fuerza de fricción estática ha alcanzado su máximo valor $\mu_s n$. El ángulo θ en esta situación es el ángulo crítico θ_c, y (3) se convierte en

$$\mu_s n = n \tan \theta_c$$

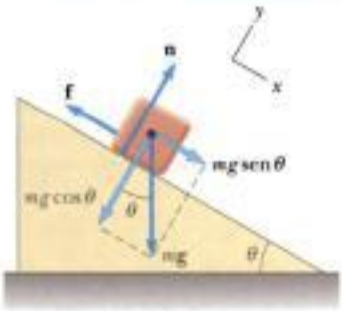


Figura 5.19 (Ejemplo 5.12) Las fuerzas externas ejercidas sobre un bloque apegado sobre un plano inclinado son la fuerza gravitacional $m\mathbf{g}$, la fuerza normal **n**, y la fuerza de fricción **f**. Por comodidad, la fuerza gravitacional se descompone en un componente a lo largo del plano $m\mathbf{g} \operatorname{sen} \theta$ y un componente perpendicular al plano $mg \cos \theta$.

$$\mu_s = \tan \theta_c$$

Por ejemplo, si el bloque apenas se desliza en $\theta_c = 20.0°$, entonces encontramos que $\mu_s = \tan 20.0° = 0.364$.

Para *finalizar* el problema, nótese que una vez que el bloque empieza a moverse en $\theta \geq \theta_c$, acelera hacia abajo del plano y la fuerza de fricción es $f_k = \mu_k n$. No obstante, si θ se reduce a un valor menor que θ_c, puede ser posible hallar un ángulo θ_c' tal que el bloque baje por el plano con una rapidez constante ($a_x = 0$). En este caso, usar (1) y (2) con f_s sustituida por f_k dará

$$\mu_k = \tan \theta_c'$$

donde $\theta_c' < \theta_c$.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 5.13 El disco de hockey deslizante

Un disco de hockey sobre un lago congelado recibe una rapidez inicial de 20.0 m/s. Si el disco siempre permanece sobre el hielo y se desliza 115 m antes de llegar al reposo, determine el coeficiente de fricción cinética entre el disco y el hielo.

Solución *Conceptualice* el problema al imaginar que el disco de la figura 5.20 se desliza a la derecha y finalmente llega al reposo. Para *clasificar* el problema, nótese que tenemos fuerzas identificadas en la figura 5.20, pero que las variables cinemáticas están en el texto del problema. Entonces, debemos combinar las técnicas del capítulo 2 con las de este capítulo. (Suponemos que la fuerza de fricción es constante, lo cual resultará en una aceleración horizontal constante). Para *analizar* la situación, nótese que las fuerzas que actúan sobre el disco después que está en movimiento se muestran en la figura 5.20. Primero, hallamos la aceleración algebraicamente en términos del coeficiente de fricción cinética, usando la segunda ley de Newton. Si conocemos la aceleración del disco y la distancia que recorre, podemos entonces usar las ecuaciones de cinemática para hallar el valor numérico del coeficiente de fricción cinética.

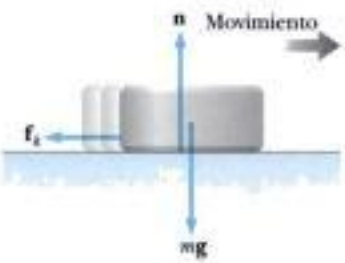


Figura 5.20 (Ejemplo 5.13) *Después* que el disco recibe una velocidad inicial a la derecha, las únicas fuerzas externas que actúan sobre él son la fuerza gravitacional $m\mathbf{g}$, la fuerza normal $\mathbf{n}$, y la fuerza de fricción cinética $\mathbf{f}_k$.

Si definimos a la derecha y hacia arriba como nuestras direcciones positivas, aplicamos la segunda ley de Newton en forma de componentes al disco y obtenemos

$$(1) \qquad \sum F_x = -f_k = ma_x$$

$$(2) \qquad \sum F_y = n - mg = 0 \qquad (a_y = 0)$$

Pero $f_k = \mu_k n$, y de (2) vemos que $n = \mu g$. Por lo tanto, (1) se convierte en

$$-\mu_k n = -\mu_k mg = ma_x$$

$$a_x = -\mu_k g$$

El signo negativo significa que la aceleración es a la izquierda en la figura 5.20; como la velocidad del disco es a la derecha, esto significa que el disco está reduciendo su velocidad. La aceleración es independiente de la masa del disco y es constante, porque suponemos que μ_k permanece constante.

Como la aceleración es constante, podemos usar la ecuación 2.13, $v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$, con $x_i = 0$ y $v_f = 0$:

$$0 = v_{xi}^2 + 2a_x x_f = v_{xi}^2 - 2\mu_k g x_f$$

$$\mu_k = \frac{v_{xi}^2}{2gx_f}$$

$$\mu_k = \frac{(20.0\ \text{m/s})^2}{2(9.80\ \text{m/s}^2)(115\ \text{m})} = \mathbf{0.117}$$

Para *finalizar* el problema, nótese que μ_k es adimensional, como debe ser, y que tiene un valor pequeño, consistente con un objeto que se deslice sobre hielo.

Ejemplo 5.14 Aceleración de dos objetos conectados cuando hay fricción presente

Un bloque de masa m_1, sobre una superficie rugosa horizontal, está conectado a una pelota de masa m_2 mediante una cuerda ligera a una polea ligera y sin fricción, como se ve en la figura 5.21a. Una fuerza de magnitud F a un ángulo θ con la horizontal se aplica al bloque, como se muestra. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es μ_k. Determine la magnitud de la aceleración de los dos objetos.

Solución *Conceptualice* el problema al imaginar lo que ocurre cuando $\mathbf{F}$ se aplica al bloque. Si se supone que $\mathbf{F}$ no es suficientemente grande para levantar el bloque, éste se deslizará a la derecha y la pelota subirá. Podemos identificar fuerzas y buscamos una aceleración, de modo que *clasificamos* éste como un problema de segunda ley de Newton, uno que incluye la fuerza de fricción. Para *analizar* el problema, comenzamos por trazar diagramas de cuerpo libre para los dos objetos, como se ve en las figuras 5.21b y 5.21c. A continuación, aplicamos la segunda ley de Newton en forma de componentes a cada uno de los objetos y usamos la ecuación 5.9, $f_k = \mu_k n$. Entonces podemos despejar la aceleración en términos de los parámetros dados.

La fuerza aplicada $\mathbf{F}$ tiene componentes x e y que son $F\cos\theta$ y $F\,\text{sen}\,\theta$, respectivamente. Al aplicar la segunda ley de Newton a ambos objetos y suponer que el movimiento del bloque es a la derecha, obtenemos

Movimiento del bloque:

$$(1) \qquad \sum F_x = F\cos\theta - f_k - T = m_1 a_x = m_1 a$$

$$(2) \qquad \sum F_y = n + F\,\text{sen}\,\theta - m_1 g = m_1 a_y = 0$$

Movimiento de la pelota

$$\sum F_x = m_2 a_x = 0$$

$$(3) \qquad \sum F_y = T - m_2 g = m_2 a_y = m_2 a$$

Como los dos objetos están conectados, podemos igualar las magnitudes del componente x de la aceleración del bloque y el componente y de la aceleración de la pelota. De la ecuación 5.9 sabemos que $f_k = \mu_k n$, y de (2) sabemos que $n = m_1 g - F\,\text{sen}\,\theta$ (en este caso n *no es* igual a $m_1 g$); por lo tanto,

$$(4) \qquad f_k = \mu_k(m_1 g - F\,\text{sen}\,\theta)$$

Esto es, la fuerza de fricción se reduce debido al componente positivo y de $\mathbf{F}$. Sustituir (4) y el valor de T de (3) en (1) da

Materiał chroniony prawem autorskim

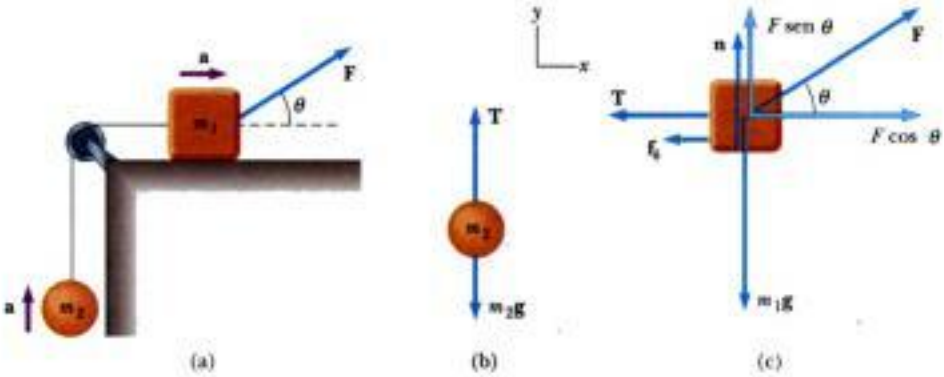


Figura 5.21 (Ejemplo 5.14) (a) La fuerza externa **F** aplicada como se muestra puede hacer que el bloque acelere a la derecha. (b) y (c) Diagramas de cuerpo libre que suponen que el bloque acelera a la derecha y la pelota acelera hacia arriba. La magnitud de la fuerza de fricción cinética en este caso está dada por $f_k = \mu_k n = \mu_k(m_1 g - F \operatorname{sen} \theta)$.

$$F \cos \theta - \mu_k(m_1 g - F \operatorname{sen} \theta) - m_2(a + g) = m_1 a$$

Al despejar a, obtenemos

$$(5) \qquad a = \frac{F(\cos \theta + \mu_k \operatorname{sen} \theta) - g(m_2 + \mu_k m_1)}{m_1 + m_2}$$

Para *finalizar* el problema, nótese que la aceleración del bloque puede ser a la derecha o a la izquierda,[5] dependiendo del signo del numerador en (5). Si el movimiento es a la izquierda, entonces debemos invertir el signo de f_k en (1) porque la fuerza de fricción cinética debe oponerse al movimiento del bloque con respecto a la superficie. En este caso, el valor de a es igual que en (5), con los dos signos más del numerador cambiados a signos menos.

Éste es el capítulo final en el que explícitamente mostraremos los pasos de la estrategia general para la solución de problemas en todos los ejemplos trabajados. Los mencionaremos de manera explícita en ejemplos ocasionales en futuros capítulos, pero el lector debe usar los pasos en la solución de *todos* los problemas.

[5] La ecuación 5 muestra que cuando $\mu_k m_1 > m_2$, hay un intervalo de valores de F para los cuales no ocurre movimiento a un ángulo θ dado.

Aplicación Sistema de antibloqueo de frenos en autos (ABS)

Si la llanta de un auto rueda y no patina en la superficie de un camino, entonces la máxima fuerza de fricción que el camino puede ejercer sobre la llanta es la fuerza de fricción estática $\mu_s n$. Uno debe usar fuerza de fricción estática en esta situación porque en el punto de contacto entre la llanta y el camino, no hay derrape de una superficie sobre la otra si la llanta no patina. No obstante, si la llanta empieza a patinar, la fuerza de fricción ejercida sobre ella se reduce a la fuerza de fricción cinética $\mu_k n$. Entonces, para maximizar la fuerza de fricción y minimizar la distancia de frenado, las ruedas deben mantener su movimiento puro de rodamiento y no patinar. Un beneficio adicional de mantener la rotación de las ruedas es que el control direccional no se pierde, como ocurre cuando patinan. Desafortunadamente, en situaciones de emergencia, por lo general los conductores presionan el pedal de freno con tanta fuerza como pueden, con lo cual "bloquean los frenos." Esto impide la rotación de las ruedas, se produce un derrape y se reduce la fuerza de fricción del valor estático al cinético. Para resolver este problema, los ingenieros de automotores han inventado sistemas de antibloqueo de frenos (ABS, por sus siglas en inglés). La finalidad del ABS es ayudar a conductores (cuya tendencia es bloquear las ruedas en una emergencia) para mantener mejor control de sus vehículos y reducir al mínimo la distancia de frenado. El sistema brevemente afloja los frenos cuando una rueda está a punto de dejar de girar, lo cual mantiene contacto de rodamiento entre la llanta y el pavimento. Cuando los frenos se sueltan momentáneamente, la distancia de frenado es mayor a lo que sería si los frenos estuvieran aplicados en forma continua. Sin embargo, mediante el uso del control computarizado, el tiempo de "no frenado" se mantiene a un mínimo y, en consecuencia, la distancia de frenado es mucho menor de la que sería si las llantas fueran a patinar.

Elaboremos un modelo del frenado de un auto al examinar datos reales. En una edición de *AutoWeek*,[6] se midió la operación de frenado de un Toyota Corolla. Estos datos corresponden a la fuerza de frenado adquirida por un conductor profesional, altamente calificado. Comenzamos por suponer aceleración constante. (¿Por qué necesitamos hacer esta suposición?) La revista indicó la rapidez inicial y distancia de frenado en unidades diferentes al SI, que mostramos en las secciones izquierda y media de la tabla 5.3. Después de convertir estos valores al SI, usamos $v_f^2 = v_i^2 + 2ax$ para determinar la aceleración a diferentes magnitudes de rapidez, mostradas en la sección derecha. Éstas no varían en mucho, por lo que nuestra suposición de aceleración constante es razonable.

Tomamos un valor promedio de aceleración de $-8.4\ \mathrm{m/s^2}$, que es aproximadamente $0.86g$. Entonces calculamos el coeficiente de fricción desde $\Sigma F = \mu_s mg = ma$, que da $\mu_s = 0.86$ pa-

[6] Revista *AutoWeek*, **48**:22-23, 1998.

Materiał chroniony prawem autorskim

Tabla 5.3

Datos para un Toyota Corolla				
Rapidez inicial		Distancia de frenado		Aceleración
(mi/h)	(m/s)	(pie)	(m)	(m/s^2)
30	13.4	34	10.4	−8.63
60	26.8	143	43.6	−8.24
80	35.8	251	76.5	−8.38

Tabla 5.4

Distancia de frenado con y sin deslizamiento		
Rapidez inicial	Distancia de frenado	
(mi/h)	Sin derrape (m)	Con derrape (m)
30	10.4	13.9
60	43.6	55.5
80	76.5	98.9

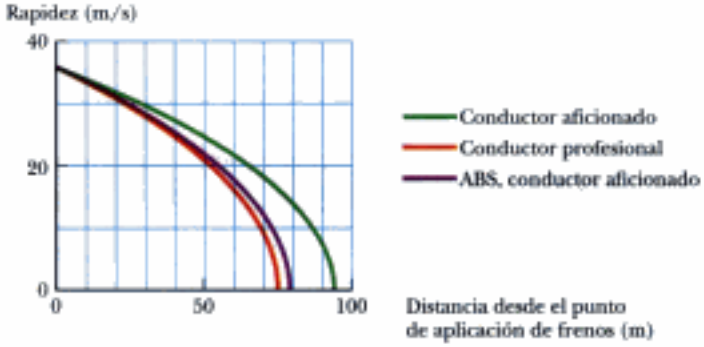


Figura 5.22 Esta gráfica de la rapidez de un vehículo contra la distancia, desde el lugar en el que se aplicaron los frenos, muestra que un sistema antibloqueo de frenos (ABS) se aproxima a la operación de un conductor profesional altamente calificado.

ra el Toyota. Esto es menor que el valor para hule sobre concreto que se da en la tabla 5.2. ¿Puede el lector dar alguna razón para esto?

Ahora estimamos la distancia de frenado del auto si las llantas estuvieran derrapando. De la tabla 5.2 vemos que la diferencia entre los coeficientes de fricción estática y cinética para hule contra concreto es alrededor de 0.2. Supongamos que nuestros coeficientes difieren en esta misma cantidad, de modo que $\mu_k \approx 0.66$. Esto nos permite estimar las distancias de frenado cuando las llantas están bloqueadas y el auto patina en el pavimento, como se ve en la tercera columna de la tabla 5.4. Los resultados ilustran la ventaja de no permitir que las ruedas patinen.

Debido a que un sistema ABS mantiene las ruedas en rotación, se mantiene el coeficiente más alto de fricción estática entre las ruedas y el pavimento. Esto se aproxima a la técnica de un conductor profesional capaz de mantener las llantas en el punto de máxima fuerza de fricción. Estimemos la operación del ABS al suponer que la magnitud de la aceleración no es tan buena como la alcanzada por el conductor profesional, sino que se reduce en 5%.

La figura 5.22 es una gráfica de la rapidez del vehículo contra distancia desde donde los frenos se aplicaron (a una rapidez inicial de 80.0 mi/h = 35.8 m/s) para los tres casos de conductor aficionado, conductor profesional, y operación estimada con ABS (conductor aficionado). Esto muestra que es necesaria una distancia de frenado marcadamente más corta sin bloquear las llantas, en comparación con el derrape. Además, se alcanza un valor satisfactorio de distancia de frenado cuando la computadora ABS mantiene la rotación de las llantas.

Materiał chroniony prawem autorskim

RESUMEN

Un **marco de referencia inercial** es aquel que podemos identificar, y en el que un objeto que no interactúa con otros objetos experimenta aceleración cero. Cualquier marco que se mueve con velocidad constante con respecto a un marco inercial también es un marco inercial. La **primera ley de Newton** expresa que es posible hallar tal marco, o bien, lo que es lo mismo, en ausencia de una fuerza externa, cuando sea visto desde un marco inercial, un objeto en reposo permanece en reposo y un objeto en movimiento uniforme en línea recta mantiene ese movimiento.

La **segunda ley de Newton** expresa que la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él, e inversamente proporcional a su masa. La fuerza neta que actúa sobre un objeto es igual al producto de su masa y su aceleración: $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Si el objeto está estacionario o se mueve con velocidad constante, entonces el objeto está en equilibrio y los vectores fuerza deben cancelarse entre sí.

La **fuerza gravitacional** ejercida sobre un objeto es igual al producto de su masa (una cantidad escalar) y la aceleración en caída libre: $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$. El **peso** de un objeto es la magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre el objeto.

La **tercera ley de Newton** indica que si dos objetos interactúan, la fuerza ejercida por el objeto 1 sobre el 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza ejercida por el objeto 2 sobre el 1. Entonces, una fuerza aislada no puede existir en la naturaleza.

La **máxima fuerza de fricción estática** $\mathbf{f}_{s,máx}$ entre un objeto y una superficie es proporcional a la fuerza normal que actúa sobre el objeto. En general, $f_s \leq \mu_s n$, donde μ_s es el **coeficiente de fricción estática** y n es la magnitud de la fuerza normal. Cuando un objeto se desliza sobre una superficie, la dirección de la **fuerza de fricción cinética** $\mathbf{f}_k$ es opuesta a la dirección de movimiento del objeto con respecto a la superficie y también es proporcional a la magnitud de la fuerza normal. La magnitud de esta fuerza está dada por $f_k = \mu_k n$, donde μ_k es el **coeficiente de fricción cinética.**

PREGUNTAS

1. Una pelota está sostenida en la mano de una persona. (a) Identifique todas las fuerzas externas que actúan sobre la pelota y la reacción de cada una. (b) Si la pelota se deja caer, ¿qué fuerza es ejercida sobre ella mientras cae? Identifique la fuerza de reacción en este caso. (Desprecie la resistencia del aire).
2. Si un auto se desplaza hacia el oeste con una rapidez constante de 20 m/s, ¿cuál es la fuerza resultante que actúa sobre él?
3. ¿Qué está mal en el enunciado "Como el auto está en reposo, no hay fuerzas que actúen sobre él"? ¿Cómo corregiría el lector esta oración?
4. En la película *It Happened One Night* [Ocurrió una noche] (Columbia Pictures, 1934), Clark Gable está de pie dentro de un autobús frente a Claudette Colbert, que está sentada. De pronto, el autobús arranca hacia delante y Clark cae en las piernas de Claudette. ¿Por qué ocurrió esto?
5. Una pasajera sentada en la parte trasera de un autobús dice que ella se lesionó cuando el conductor aplicó fuertemente los frenos, con lo que una maleta salió despedida hacia ella desde el frente del vehículo. Si usted fuera el juez en este caso, ¿qué disposición haría? ¿Por qué?
6. Una exploradora espacial se mueve en una nave lejos de cualquier planeta o estrella. Ella observa una gran roca, tomada como espécimen de un planeta extraño, que flota alrededor de la cabina de la nave. ¿Debe ella empujarla suavemente o patearla hacia la bodega de la nave? ¿Por qué?
7. Una pelota de hule se deja caer sobre el piso. ¿Qué fuerza hace que la pelota rebote?
8. Cuando un balón de fútbol está en el aire, ¿cuáles son los pares de acción-reacción cuando la pelota está siendo pateada y cuando está en vuelo?
9. El alcalde de una ciudad decide despedir algunos empleados municipales porque éstos no corrigen las flexiones obvias de los cables que sostienen a los semáforos. Si usted fuera abogado, ¿qué defensa daría en nombre de los empleados? ¿Quién piensa usted que ganará el caso en el juzgado?
10. Un levantador de pesas está de pie sobre una báscula y sobre ésta sube y baja una mancuerna. ¿Qué ocurre con la lectura de la báscula cuando esto se hace? **¿Qué pasaría si** él es tan fuerte que *lanze* la mancuerna hacia arriba? ¿Cómo varía ahora la lectura de la báscula?
11. Suponga que un camión cargado de arena acelera a lo largo de una carretera. Si la fuerza impulsora sobre el camión permanece constante, ¿qué ocurre a la aceleración del camión si su remolque tiene una fuga de arena a un ritmo constante por un agujero en su fondo?
12. Cuando un cohete es disparado desde su plataforma de lanzamiento, su rapidez y aceleración aumentan con el tiempo cuando sus motores continúan en operación. Explique por qué ocurre esto aún cuando el empuje de los motores permanezca constante.

Materiał chroniony prawem autorskim

13. ¿Qué fuerza hace que se mueva un automóvil? ¿Un avión de hélices? ¿Un bote de remos?

14. Identifique los pares de acción-reacción en las siguientes situaciones: un hombre da un paso; una bola de nieve cae sobre la espalda de una niña; un jugador de béisbol atrapa una pelota; una corriente de viento golpea una ventana.

15. En un concurso de gigantes de la Liga Nacional de Fútbol, equipos de los Rams y los 49ers compiten en un tiro de cuerda, tirando en direcciones opuestas de una gruesa cuerda. Los Rams ejercen una fuerza de 9 200 N y están ganando, haciendo que el centro de la cuerda se mueve uniformemente hacia ellos. ¿Es posible saber la tensión en la cuerda con la información dada? ¿Es mayor o menor a 9 200 N? ¿Con cuánta fuerza están tirando de la cuerda los 49ers? ¿Cambiaría su respuesta si los 49ers estuvieran ganando o si el concurso fuera parejo? El equipo más fuerte gana al ejercer una fuerza mayor ¿sobre qué? Explique sus respuestas.

16. Veinte personas participan en un concurso de tirar de una cuerda. Los dos equipos de diez personas están tan equitativamente formados que ningún equipo gana. Después del juego observan que un auto está atascado en el lodo. Atan la cuerda del concurso a una defensa del auto, y todos tiran de la cuerda. El pesado vehículo apenas avanza dos centímetros cuando la cuerda se rompe. ¿Por qué se rompió la cuerda en esta situación y no cuando las mismas veinte personas tiraron de ella en el concurso?

17. "Cuando la locomotora de la figura Q5.17 atravesó la pared de la estación de ferrocarril, la fuerza ejercida por la locomotora sobre la pared era mayor que la fuerza que la pared pudo ejercer sobre la locomotora." ¿Es verdadero este enunciado o necesita corrección? Explique su respuesta.

18. Un atleta sujeta una cuerda ligera que pasa sobre una polea de baja fricción unida al techo de un gimnasio. Un saco de arena precisamente igual en peso al atleta está unido al otro extremo de la cuerda. La arena y el atleta están inicialmente en reposo. El atleta sube por la cuerda, unas veces acelerando y otras veces reduciendo velocidad. ¿Qué le pasa al saco de arena? Explique.

19. Si las fuerzas de acción y reacción son siempre iguales en magnitud y opuestas en dirección entre ellas, entonces ¿el vector de fuerza neta sobre cualquier objeto no necesariamente suma cero? Explique su respuesta.

20. ¿Puede un objeto ejercer una fuerza sobres sí mismo? Discuta su respuesta.

21. Si usted empuja una pesada caja que está en reposo, usted debe ejercer alguna fuerza para iniciar el movimiento de la caja. Sin embargo, una vez que ésta se desliza, se puede aplicar una fuerza pequeña para mantener ese movimiento. ¿Por qué?

22. El conductor de un camión vacío que corre a gran rapidez pisa fuertemente los frenos hasta detenerse en una distancia *d*. (a) Si el camión lleva una carga del doble de su masa, ¿cuál sería la "distancia de deslizamiento" del camión? (b) Si la rapidez inicial del camión se redujera a la mitad, ¿cuál sería la distancia de deslizamiento del camión?

Roger Ressler, Mill Valley, CA, University Science Books, 1982

Figura Q5.17

23. Supongamos que el lector conduce un auto clásico. ¿Por qué debe evitar pisar fuertemente los frenos cuando desea detenerse en la distancia más corta posible? (Muchos autos tienen frenos antibloqueo que evitan este problema).

24. A un libro se le da un breve empujón para hacer que se deslice por un plano inclinado rugoso. Se detiene y se desliza de regreso al punto de partida. ¿Toma el mismo tiempo en subir que en bajar? **¿Qué pasaría si** el plano es sin fricción?

25. Una caja grande se coloca sobre la plataforma de un camión pero sin amarrarla. (a) Cuando el camión acelera hacia delante, la caja permanece en reposo relativo al camión. ¿Qué fuerza hace que la caja acelere hacia delante? (b) Si el conductor pisa fuertemente el freno, ¿qué podría ocurrir a la caja?

26. Describa unos cuantos ejemplos en los que la fuerza de fricción ejercida sobre un objeto esté en la dirección de movimiento del objeto.

Materiał chroniony prawem autorskim

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, difícil = solución guiada con sugerencias disponibles en http://www.pse6.com
= use computadora para resolver el problema = problemas numéricos y simbólicos por pares

Secciones 5.1 a la 5.6

1. Una fuerza **F** aplicada a un cuerpo de masa m_1 produce una aceleración de 3.00 m/s². La misma fuerza aplicada a un segundo cuerpo de masa m_2 produce una aceleración de 1.00 m/s². (a) ¿Cuál es el valor de la razón m_1/m_2? (b) Si m_1 y m_2 se combinan, encuentre la aceleración de ambas bajo la acción de la fuerza **F**.

2. El cañón antiaéreo de mayor calibre operado por la fuerza aérea alemana durante la Segunda Guerra Mundial fue un Flak 40 de 12.8 cm. Esta arma disparaba un obús de 25.8 kg con una rapidez de 880 m/s en la boca del cañón. ¿Qué fuerza de propulsión era necesaria para alcanzar esa rapidez dentro del cañón de 6.00 m de largo?

3. Un objeto de 3.00 kg experimenta una aceleración dada por $\mathbf{a} = (2.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s². Encuentre La fuerza resultante que actúe sobre ese objeto y la magnitud de la fuerza resultante.

4. La fuerza gravitacional sobre una pelota de béisbol es $-F_g\hat{\mathbf{j}}$. Un *pitcher* lanza la pelota con una velocidad de $v\hat{\mathbf{i}}$ al acelerarla de manera uniforme al frente, horizontalmente, durante un intervalo $\Delta t = t - 0 = t$. Si la pelota inicia desde el reposo, (a) ¿qué distancia acelera antes de ser soltada? (b) ¿Qué fuerza ejerce el *pitcher* sobre la pelota?

5. Para modelar una nave espacial, un motor cohete de juguete se sujeta firmemente a un disco grande de hule que puede deslizarse con fricción insignificante sobre una superficie horizontal, tomada como el plano *xy*. El disco de 4.00 kg tiene una velocidad de $300\hat{\mathbf{i}}$ m/s en un instante. Ocho segundos después, su velocidad es $(800\hat{\mathbf{i}} + 10.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s. Si se supone que el motor cohete ejerce una fuerza horizontal constante, encuentre (a) los componentes de la fuerza y (b) su magnitud.

6. La rapidez promedio de una molécula de nitrógeno en aire es alrededor de 6.70×10^2 m/s, y su masa es 4.68×10^{-26} kg. (a) Si tarda 3.00×10^{-13} s para que una molécula de nitrógeno choque con una pared y rebote con la misma rapidez pero moviéndose en dirección opuesta, ¿cuál es la aceleración promedio de la molécula durante este intervalo de tiempo? (b) ¿Qué fuerza promedio ejerce la molécula sobre la pared?

7. Un electrón de masa 9.11×10^{-31} kg tiene una rapidez inicial de 3.00×10^5 m/s. Se desplaza en línea recta, y su rapidez aumenta a 7.00×10^5 m/s en una distancia de 5.00 cm. Suponiendo que su aceleración es constante, (a) determine la fuerza ejercida sobre el electrón y (b) compare esta fuerza con el peso del electrón, que despreciamos.

8. Una mujer pesa 120 lb. Determine (a) su peso en newtons (N) y (b) su masa en kilogramos (kg).

9. Si un hombre pesa 900 N sobre la Tierra, ¿cuál sería su peso en Júpiter, donde la aceleración debida a la gravedad es 25.9 m/s²?

10. La diferencia entre masa y peso fue descubierta después que Jean Richer transportaba relojes de péndulo de París a la Guayana francesa en 1671. Él encontró que se atrasaban sistemáticamente. El efecto se invertía cuando los relojes regresaban a París. ¿Cuánto peso perdería personalmente el lector al viajar de París, donde $g = 9.809\,5$ m/s², a Cayenne, donde $g = 9.780\,8$ m/s²? [Consideraremos la forma en que la aceleración en caída libre influye el periodo de un péndulo en la sección 15.5.]

11. Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ actúan sobre un objeto de 5.00 kg. Si $F_1 = 20.0$ N y $F_2 = 15.0$ N, encuentre la aceleración en (a) y (b) de la figura P5.11.

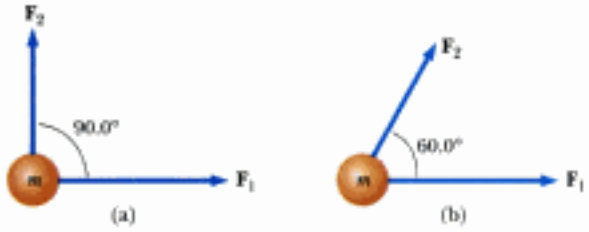


Figura P5.11

12. Además de su peso, un objeto de 2.80 kg es sometido a otra fuerza constante. El objeto inicia desde el reposo y en 1.20 s experimenta un desplazamiento de $(4.20\hat{\mathbf{i}} - 3.30\hat{\mathbf{j}})$, donde la dirección de $\hat{\mathbf{j}}$ es la dirección vertical hacia arriba. Determine la otra fuerza.

13. Usted está de pie sobre el asiento de una silla y luego salta de ella. (a) Durante el tiempo que está en el aire y cae al piso, la Tierra se mueve hacia arriba con usted ¿con una aceleración de qué orden de magnitud? En su solución explique su lógica. Modele la Tierra como un cuerpo perfectamente sólido. (b) La Tierra sube una distancia, ¿de qué orden de magnitud?

14. Tres fuerzas que actúan sobre un cuerpo están dadas por $\mathbf{F}_1 = (-2.00\hat{\mathbf{i}} + 2.00\hat{\mathbf{j}})$ N, $\mathbf{F}_2 = (5.00\hat{\mathbf{i}} - 3.00\hat{\mathbf{j}})$ N, y $\mathbf{F}_3 = (-45.0\hat{\mathbf{i}})$ N. El cuerpo experimenta una aceleración de magnitud 3.75 m/s². (a) ¿Cuál es la dirección de la aceleración? (b) ¿Cuál es la masa del objeto? (c) Si el cuerpo está inicialmente en reposo, ¿cuál es su rapidez después de 10.0 s? (d) ¿Cuáles son los componentes de velocidad del cuerpo después de 10.0 s?

15. Un bloque de 15.0 lb descansa sobre el piso. (a) ¿Qué fuerza ejerce el piso sobre el bloque? (b) Si una cuerda se ata al bloque y pasa verticalmente sobre una polea, y el otro extremo se ata a un peso de 10.0 lb que pende libremente, ¿cuál es la fuerza ejercida por el piso sobre el bloque de 15.0 lb? (c) Si sustituimos el peso de 10.0 lb de la parte (b) con un peso de 20.0 lb, ¿cuál es la fuerza ejercida por el piso sobre el bloque de 15.0 lb?

Materiał chroniony prawem autorskim

Sección 5.7 Algunas aplicaciones de las leyes de Newton

16. Un cuerpo de 3.00 kg se mueve en un plano, con sus coordenadas x e y dadas por $x = 5t^2 - 1$ y $y = 3t^3 + 2$, donde x e y son en metros y t es en segundos. Encuentre la magnitud de la fuerza neta que actúa sobre este objeto en $t = 2.00$ s.

17. La distancia entre dos postes de teléfonos es de 50.0 m. Cuando un pájaro de 1.00 kg se posa sobre el alambre telefónico al centro entre los postes, el alambre se curva 0.200 m. Trace un diagrama de cuerpo libre del pájaro. ¿Cuánta tensión produce el pájaro en el alambre? Haga caso omiso del peso del alambre.

18. Una bolsa de cemento que pesa 325 N pende de tres alambres, como se sugiere en la figura P5.18. Dos de los alambres forman ángulos $\theta_1 = 60.0°$ y $\theta_2 = 25.0°$ con la horizontal. Si el sistema está en equilibrio, encuentre las tensiones T_1, T_2 y T_3 en los alambres.

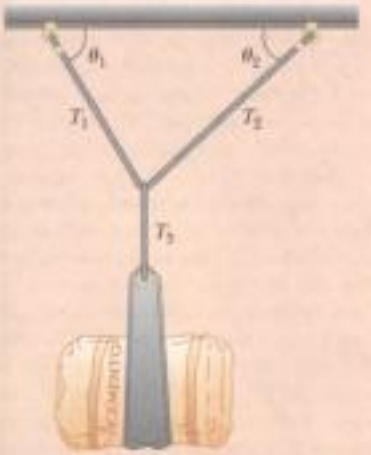


Figura P5.18 Problemas 18 y 19.

19. Una bolsa de cemento de peso F_g cuelga de tres alambres como se ve en la figura P5.18. Dos de los alambres forman ángulos θ_1 y θ_2 con la horizontal. Si el sistema está en equilibrio, muestre que la tensión en el alambre de la izquierda es

$$T_1 = F_g \cos\theta_2 / \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)$$

20. Usted es juez en un concurso infantil de volar papalotes (o cometas), donde dos niños ganarán premios por los papalotes que tiren con más y menos fuerza de sus cuerdas. Para medir las tensiones sobre las cuerdas, usted pide al maestro de física un gancho de pesas, algunos pesos con ranuras y un transportador, y usa el siguiente protocolo, ilustrado en la figura P5.20: esperar que una niña controle bien su papalote, colgar el gancho sobre la cuerda del papalote a unos 30 cm de la mano de ella, poner peso hasta que esa sección de la cuerda esté horizontal, registrar la masa necesaria, y registrar el ángulo entre la horizontal y la cuerda que corre hasta el papalote. (a) Explique cómo funciona este método. Cuando usted elabore su explicación, imagine que los padres de los niños le hacen preguntas sobre su método, que ellos podrían hacer falsas suposiciones acerca de la capacidad de usted sin concretar evidencia, y que la explicación de usted es una oportunidad para darles confianza en su técnica de evaluación. (b) Encuentre la tensión en la cuerda si la masa es de 132 g y el ángulo de la cuerda del papalote es 46.3°.

Figura P5.20

21. Los sistemas que se muestran en la figura P5.21 están en equilibrio. Si las básculas de resorte están calibradas en newtons, ¿cuál es la lectura de ellas? (Desprecie las masas de las poleas y cuerdas, y suponga que el plano inclinado de la parte (c) es sin fricción.)

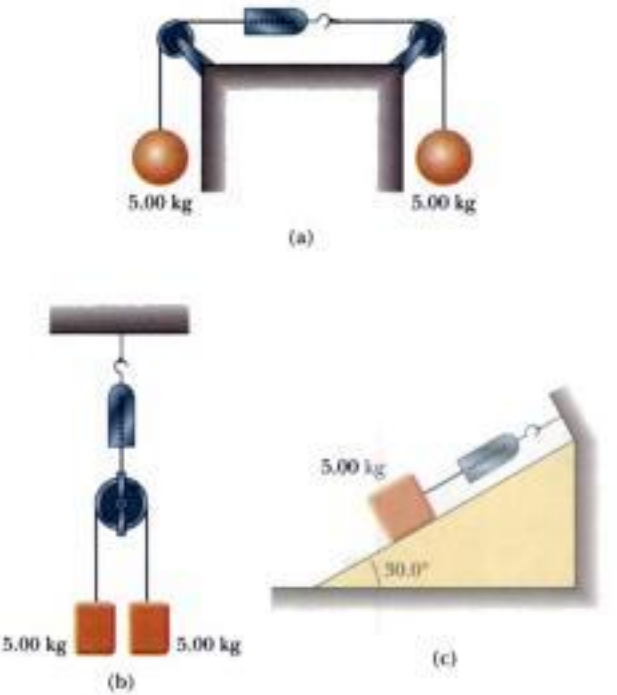


Figura P5.21

22. Trace un diagrama de cuerpo libre de un bloque que se desliza hacia abajo en un plano sin fricción y que tiene inclinación de $\theta = 15.0°$ (figura P5.22). El bloque inicia desde el reposo en la parte superior y la longitud del plano es 2.00 m. Encuentre (a)

Materiał chroniony prawem autorskim

la aceleración del bloque y (b) la rapidez cuando llegue al final del plano.

Figura P5.22 Problemas 22 y 25.

23. Se observa que un cuerpo de 1.00 kg tiene una aceleración de 10.0 m/s^2 en dirección 30.0° al norte del este (figura P5.23). La fuerza $\mathbf{F}_2$ que actúa sobre el cuerpo tiene una magnitud de 5.00 N y está dirigida al norte. Determine la magnitud y dirección de la fuerza $\mathbf{F}_1$ que actúa sobre el objeto.

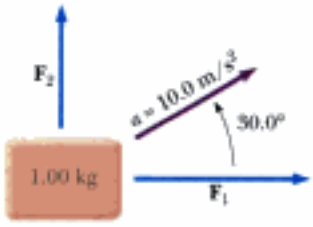


Figura P5.23

24. Un cuerpo de 5.00 kg colocado sobre una mesa horizontal, sin fricción, está unido a una cuerda que pasa sobre una polea y luego está sujeto a un cuerpo colgante de 9.00 kg, como se ve en la figura P5.24. Trace diagramas de cuerpo libre de ambos objetos. Encuentre la aceleración de los dos objetos y la tensión de la cuerda.

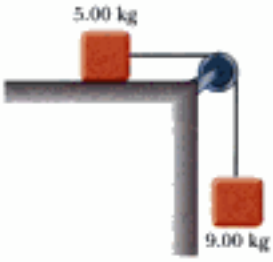


Figura P5.24 Problemas 24 y 43.

25. Un bloque recibe una velocidad inicial de 5.00 m/s hacia arriba de un plano inclinado de 20.0° sin fricción (figura P5.22). ¿Hasta qué altura del plano inclinado sube el bloque antes de detenerse?

26. Dos objetos están conectados a una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción, como se ve en la figura P5.26. Trace diagramas de cuerpo libre de ambos objetos. Si el plano inclinado es sin fricción y si $m_1 = 2.00$ kg, $m_2 = 6.00$ kg, y $\theta = 55.0°$, encuentre (a) las aceleraciones de los objetos, (b) la tensión de la cuerda, y (c) la rapidez de cada objeto de 2.00 s después de ser soltado desde el reposo.

Figura P5.26

27. Una grúa remolcadora tira de un auto que está atascado en el lodo con una fuerza de 2 500 N, como se ve en la figura P5.27. El cable remolcador está bajo tensión y por lo tanto tira hacia abajo y a la izquierda sobre el perno de su extremo superior. El perno ligero es mantenido en equilibrio por fuerzas ejercidas por las dos barras A y B. Cada barra es un *poste*: esto es, cada uno es una barra cuyo peso es pequeño en comparación con las fuerzas que ejerce, y lo consigue sólo por medio de pernos bisagra en sus extremos. Cada poste ejerce una fuerza dirigida paralela a su longitud. Determine la fuerza de tensión o compresión en cada poste. Proceda como sigue: haga un cálculo en cuanto a la forma (empujar o jalar) actúa cada fuerza sobre el perno superior. Trace un diagrama de cuerpo libre del perno. Use la condición de equilibrio del perno para traducir el diagrama de cuerpo libre en ecuaciones. De las ecuaciones calcule las fuerzas ejercidas por los postes A y B. Si usted obtiene una respuesta positiva, correctamente calculó la dirección de la fuerza. Una respuesta negativa significa que la dirección debe invertirse, pero el valor absoluto correctamente da la magnitud de la fuerza. Si un poste tira sobre el perno, es una tensión. Si empuja, el poste está en compresión. Identifique si cada poste está en tensión o en compresión.

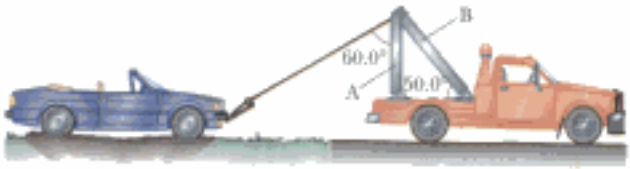


Figura P5.27

28. Dos objetos de masas 3.00 y 5.00 kg están unidos por una cuerda ligera, que pasa sobre una polea ligera y sí fricción, para formar una máquina de Atwood, como se ve en la figura 5.14a. Determine (a) la tensión de la cuerda, (b) la aceleración de cada objeto y (c) la distancia que cada objeto se moverá en el primer segundo de movimiento si inician desde el reposo.

29. En la figura P5.29, el hombre y la plataforma pesan 950 N en total. La polea puede modelarse sin fricción. Determine cuánto tiene el hombre que tirar de la cuerda para levantarse a sí mismo uniformemente hacia arriba del suelo. (¿Es esto imposible? Si es así, explique por qué.)

Materiał chroniony prawem autorskim

Figura P5.29

30. En la máquina de Atwood que se ilustra en la figura 5.14a, m_1 = 2.00 kg y m_2 = 7.00 kg. Las masas de la polea y la cuerda son despreciables. La polea gira sin fricción y la cuerda no se estira. El objeto más ligero se suelta con un brusco empujón que lo pone en movimiento a v_i = 2.40 m/s hacia abajo. (a) ¿Cuánto descenderá m_2 abajo de su nivel inicial? (b) Encuentre la velocidad de m_1 después de 1.80 segundos.

31. En el sistema que se ilustra en la figura P5.31, una fuerza horizontal $\mathbf{F}_x$ actúa sobre el objeto de 8.00 kg. La superficie horizontal es sin fricción. (a) ¿Para qué valores de F_x acelera hacia arriba el objeto de 2.00 kg? (b) ¿Para qué valores de F_x es cero la tensión en la cuerda? (c) Haga una gráfica de la aceleración del objeto de 8.00 kg contra F_x. Incluya valores de F_x de −100 N hasta +100 N.

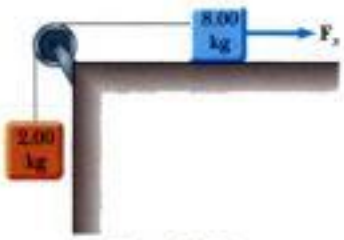


Figura P5.31

32. Un plano sin fricción mide 10.0 m de largo y está inclinado a 35.0°. Un trineo sube desde la base del plano con una rapidez inicial de 5.00 m/s hacia arriba del plano. Cuando llega al punto en el que momentáneamente se detiene, un segundo trineo se suelta desde lo alto del plano con una rapidez inicial v_i. Ambos trineos llegan a la base del plano en el mismo momento. (a) Determine la distancia que el primer trineo recorrió hacia arriba por el plano. (b) Determine la rapidez inicial del segundo trineo.

33. Un hombre de 72 kg está de pie sobre una báscula en un elevador. Iniciando desde el reposo, el elevador asciende y alcanza su máxima rapidez de 1.20 m/s en 0.800 s. Se desplaza con su rapidez constante durante los siguientes 5.00 s. El elevador entonces experimenta una aceleración uniforme en la dirección y negativa durante 1.50 s y se detiene. ¿Qué registra la báscula (a) antes que el elevador empiece a moverse? (b) durante los primeros 0.800 s? (c) mientras el elevador se desplace a rapidez constante? (d) durante el tiempo en que está reduciendo su velocidad?

34. Un objeto de masa m_1 sobre una mesa horizontal sin fricción está unido a un objeto de masa m_2 por medio de una polea muy ligera P_1 y una polea P_2 ligera y fija, como se ve en la figura P5.34. (a) Si a_1 y a_2 son las aceleraciones de m_1 y m_2, respectivamente, ¿cuál es la relación entre estas aceleraciones? Exprese (b) las tensiones de las cuerdas y (c) las aceleraciones a_1 y a_2 en términos de las masas m_1 y m_2 y g.

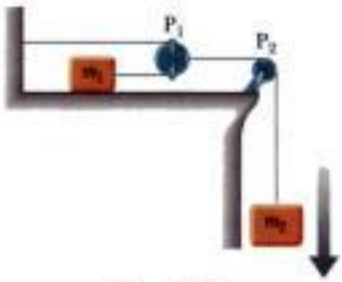


Figura P5.34

Sección 5.8 Fuerzas de fricción

35. La persona de la figura P5.35 pesa 170 libras. Vistas desde el frente, cada muleta forma un ángulo de 22.0° con la vertical. La mitad del peso de la persona está sostenido por las muletas. La otra mitad está sostenida por fuerzas verticales del suelo sobre sus pies. Si se supone que la persona se mueve con velocidad cons-

Figura P5.35

Materiał chroniony prawem autorskim

tante y la fuerza ejercida por el suelo sobre las muletas actúa a lo largo de éstas, determine (a) el mínimo coeficiente de fricción posible entre las muletas y el suelo y (b) la magnitud de la fuerza de compresión en cada muleta.

36. Un bloque de 25.0 kg está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal. Se requiere una fuerza horizontal de 75.0 N para poner el bloque en movimiento. Después que está en movimiento, es necesaria una fuerza horizontal de 60.0 N para mantenerlo con rapidez constante. Encuentre los coeficientes de fricción estática y cinética a partir de esta información.

37. Un auto viaja a 50.0 mi/h en una carretera horizontal. (a) Si el coeficiente de fricción estática entre la carretera y las llantas en un día lluvioso es 0.100, ¿cuál es la distancia mínima en la que el auto se detendrá? (b) ¿Cuál es la distancia de frenado cuando la superficie está seca y $\mu_s = 0.600$?

38. Antes de 1960 se pensaba que el máximo coeficiente de fricción estática que se podía alcanzar para las llantas de un automóvil era menos de 1. Entonces, hacia 1962, tres compañías independientemente perfeccionaron llantas de carreras con coeficientes de 1.6. Desde entonces, han mejorado las llantas, como se ilustra en este problema. Según el Libro de Récords Guinness, el tiempo más corto en el que un auto con motor de pistones inicialmente en reposo ha cubierto una distancia de un cuarto de milla es 4.96 s. Este récord fue establecido por Shirley Muldowney en septiembre de 1989. (a) Suponga que, como en la figura P5.38, las ruedas traseras levantaron las ruedas delanteras del pavimento. ¿Qué valor mínimo de μ_s es necesario para alcanzar este tiempo récord? (b) Suponga que Muldowney fuera capaz de duplicar la potencia de su motor, manteniendo otras cosas iguales. ¿Cómo afectaría este cambio al tiempo transcurrido?

Figura P5.38

39. Para satisfacer un requisito del servicio postal de Estados Unidos, el calzado debe tener un coeficiente de fricción estática de 0.5 o más en una superficie especificada de loseta. Un típico calzado atlético tiene un coeficiente de 0.800. En una emergencia, ¿cuál es el intervalo de tiempo mínimo en el que una persona que inicia desde el reposo puede avanzar 3.00 m en una superficie de loseta si usa (a) calzado que satisface el mínimo del servicio postal o (b) un típico calzado atlético?

40. Una mujer en un aeropuerto remolca su maleta de 20.0 kg con rapidez constante al jalar de una correa a un ángulo θ sobre la horizontal (figura P5.40). Ella tira de la correa con una fuerza de 35.0 N, y la fuerza de fricción sobre la maleta es 20.0 N. Trace un diagrama de cuerpo libre de la maleta. (a) ¿Qué ángulo forma la correa con la horizontal? (b) ¿Qué fuerza normal ejerce el suelo sobre la maleta?

Figura P5.40

41. Un bloque de 3.00 kg inicia desde el reposo en lo alto de un plano inclinado de 30.0° y se desliza una distancia de 2.00 m hacia abajo del plano en 1.50 s. Encuentre (a) la magnitud de la aceleración del bloque, (b) el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano, (c) la fuerza de fricción que actúa sobre el bloque, y (d) la rapidez del bloque después que se ha deslizado 2.00 m.

42. Un convertible Chevrolet Corvette puede frenar hasta detenerse desde una rapidez de 60.0 mi/h en una distancia de 123 pies en un camino plano. ¿Cuál es la distancia de frenado en un camino con pendiente descendente a un ángulo de 10.0°?

43. Un peso colgante de 9.00 kg está unido mediante una cuerda sobre una polea a un bloque de 5.00 kg que se desliza sobre una mesa plana (figura P5.24). Si el coeficiente de fricción cinética es 0.200, encuentre la tensión en la cuerda.

44. Tres objetos están conectados sobre la mesa como se muestra en la figura P5.44. La mesa es rugosa y tiene un coeficiente de fricción cinética de 0.350. Los objetos tienen masas de 4.00, 1.00, y 2.00 kg, como se muestra, y las poleas son sin fricción. Trace diagramas de cuerpo libre de cada uno de los objetos. (a) Determine la aceleración de cada objeto y sus direcciones. (b) Determine las tensiones de las dos cuerdas.

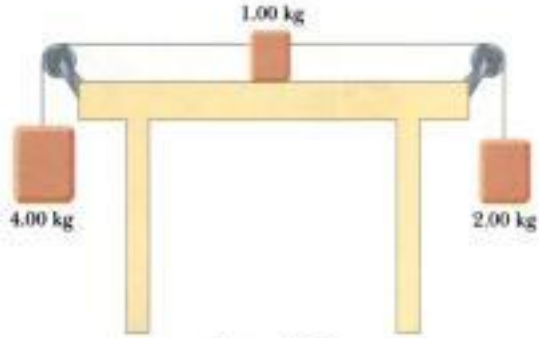


Figura P5.44

45. Dos bloques conectados por una cuerda de masa despreciable son jalados por una fuerza horizontal **F** (figura P5.45). Suponga que $F = 68.0$ N, $m_1 = 12.0$ kg, $m_2 = 18.0$ kg, y el coeficiente de fricción cinética entre cada bloque y la superficie es 0.100.

Materiał chroniony prawem autorskim

(a) Trace un diagrama de cuerpo libre para cada bloque. (b) Determine la tensión T y la magnitud de la aceleración del sistema.

Figura P5.45

46. Un bloque de masa 3.00 kg es empujado hacia arriba contra una pared por una fuerza **P** que forma un ángulo de 50.0° con la horizontal, como se ve en la figura P5.46. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la pared es 0.250. Determine los posibles valores para la magnitud de **P** que permitan que el bloque permanezca estacionario.

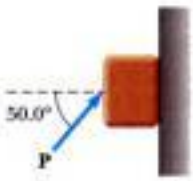


Figura P5.46

47. Usted y un amigo van a pasear en trineo. Por curiosidad, mida el ángulo constante θ que la pendiente cubierta de nieve forma con la horizontal. A continuación, use el siguiente método para determinar el coeficiente de fricción μ_k entre la nieve y el trineo. Dé al trineo un rápido empujón para que suba por la pendiente alejándose de usted. Espere que se deslice de nuevo hacia abajo, midiendo el tiempo del movimiento. Resulta que el trineo tarda el doble en bajar de lo que tarda en llegar al punto más alto en el viaje redondo. En términos de θ, ¿cuál es el coeficiente de fricción?

48. La tabla colocada entre otras dos tablas en la figura P5.48 pesa 95.5 N. Si el coeficiente de fricción entre las tablas es 0.663, ¿cuál debe ser la magnitud de las fuerzas de compresión (supuestas horizontales) que actúan sobre ambos lados de la tabla del centro para evitar que caiga?

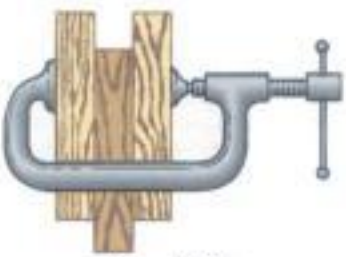


Figura P5.48

49. Un bloque que pesa 75.0 N descansa sobre un plano inclinado a 25.0° con la horizontal. Se aplica una fuerza F al objeto a 40.0° con la horizontal, empujándolo hacia arriba en el plano. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el bloque y el plano son, respectivamente, 0.363 y 0.156. (a) ¿Cuál es el valor mínimo de F que evitará que el bloque se deslice cuesta abajo? (b) Cuál es el valor mínimo de F que iniciará el movimiento del bloque hacia arriba del plano? (c) ¿Qué valor de F moverá el bloque hacia arriba del plano con velocidad constante?

50. **Problema de repaso.** Un lado del techo de un edificio está inclinado hacia arriba a 37.0°. Un estudiante lanza un disco Frisbee™ sobre el techo. El disco golpea con una rapidez de 15.0 m/s y no rebota, pero se desliza hacia arriba del plano. El coeficiente de fricción cinética entre el plástico y el techo es 0.400. El disco se desliza 10.0 m hacia arriba del techo hasta su punto máximo, donde inicia una caída libre, siguiendo una trayectoria parabólica con resistencia despreciable de aire. Determine la máxima altura que el disco alcanza por encima del punto donde pegó en el techo.

Problemas adicionales

51. Un niño ingenioso llamado Pat desea alcanzar una manzana que está en un árbol sin tener que trepar por éste. Sentado en una silla unida a una cuerda que pasa sobre una polea sin fricción (figura P5.51), Pat tira del extremo flojo de la cuerda con tal fuerza que la báscula indica 250 N. El peso real de Pat es 320 N, y la silla pesa 160 N. (a) Trace diagramas de cuerpo libre para Pat, y la silla considerados como sistemas separados, y otro diagrama para él y la silla considerados como un sistema. (b) Muestre que la aceleración del sistema es *hacia arriba* y encuentre su magnitud. (c) Encuentre la fuerza que Pat ejerce sobre la silla.

Figura P5.51

52. Una fuerza dependiente del tiempo, $\mathbf{F} = (8.00\hat{\mathbf{i}} - 4.00t\hat{\mathbf{j}})$, donde t está en segundos, es ejercida sobre un objeto de 2.00 kg inicialmente en reposo. (a) ¿En qué tiempo se moverá el objeto con una rapidez de 15.0 m/s? (b) ¿A qué distancia está el objeto desde su posición inicial cuando su rapidez es 15.0 m/s? (c) ¿Cuál es el desplazamiento total que el objeto ha recorrido en este tiempo?

53. Para evitar que una caja resbale por un plano inclinado, el estudiante A la empuja en dirección paralela al plano inclinado lo suficiente para sostenerla estacionaria. En una situación idéntica el estudiante B empuja horizontalmente sobre la caja. Considere como conocidos la masa m de la caja, el coeficiente de fricción está-

Materiał chroniony prawem autorskim

tica μ_s entre caja y plano inclinado, y el ángulo de inclinación θ. (a) Determine la fuerza que A tiene que ejercer. (b) Determine la fuerza que B tiene que ejercer. (c) Si $m = 2.00$ kg, $\theta = 25.0°$, y $\mu_s = 0.160$, ¿quién tiene el trabajo más fácil? (d) **¿Qué pasaría si** $\mu_s = 0.380$? ¿El trabajo de quién es más fácil?

54. Tres bloques están en contacto entre sí sobre una superficie horizontal y sin fricción, como en la figura P5.54. Una fuerza horizontal **F** se aplica a m_1. Tome $m_1 = 2.00$ kg, $m_2 = 3.00$ kg, $\mu_S = 4.00$ kg, y $F = 18.0$ N. Trace un diagrama separado de cuerpo libre para cada bloque y encuentre (a) la aceleración de los bloques, (b) la fuerza *resultante* sobre cada uno, y (c) las magnitudes de las fuerzas de contacto entre ellos. (d) Usted está trabajando en un proyecto de construcción. Un compañero de trabajo está clavando cartón de yeso en un lado del tabique ligero, y usted está en el lado opuesto dando "apoyo" al inclinarse contra la pared con la espalda empujando contra el muro. Cada golpe hace que su espalda le duela. El supervisor le ayuda al poner un pesado bloque de madera entre la pared y la espalda. Con el uso de la situación analizada en las partes (a), (b) y (c) como modelo, explique cómo funciona esto para hacerle más cómodo el trabajo.

Figura P5.54

55. Un objeto de masa M se mantiene en su lugar mediante una fuerza **F** aplicada y un sistema de poleas, como se muestra en la figura P5.55. Las poleas son sin masa y sin fricción. Encuentre (a) la tensión en cada sección de cuerda, T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5 y (b) la magnitud de **F**. *Sugerencia:* Trace un diagrama de cuerpo libre para cada polea.

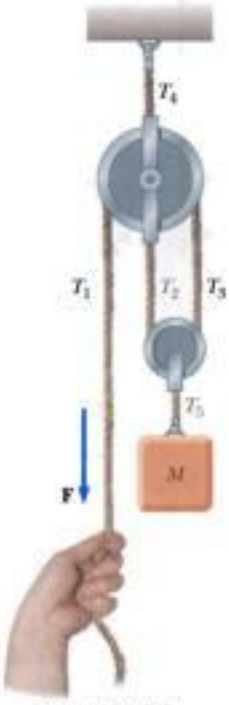


Figura P5.55

56. Un clavadista de masa 70.0 kg salta de un trampolín de 10.0 m sobre el agua. Si su movimiento hacia abajo se detiene 2.00 s después que entra al agua, ¿qué fuerza promedio hacia arriba ejerció el agua sobre él?

57. Una caja de peso F_g es empujada por una fuerza **P** sobre un piso horizontal. (a) Si el coeficiente de fricción estática es μ_s y **P** está dirigida a un ángulo θ abajo de la horizontal, demuestre que el valor mínimo de P que moverá la caja está dado por

$$P = \frac{\mu_s F_g \sec\theta}{1 - \mu_s \tan\theta}$$

(b) Encuentre el valor mínimo de P que pueda producir movimiento cuando $\mu_s = 0.400$, $F_g = 100$ N, y $\theta = 0°$, 15.0°, 30.0°, 45.0° y 60.0°.

58. **Problema de repaso.** Un bloque de masa $m = 2.00$ kg se suelta desde el reposo en $h = 0.500$ m arriba de la superficie de una tabla, en lo alto de un plano inclinado de $\theta = 30.0°$ como se muestra en la figura P5.58. El plano inclinado sin fricción está fijo sobre una mesa de altura $H = 2.00$ m. (a) Determine la aceleración del bloque cuando se deslice hacia abajo por el plano. (b) ¿Cuál es la velocidad del bloque cuando sale del plano? (c) ¿A qué distancia de la mesa caerá el bloque al piso? (d) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde que el bloque se suelta y cuándo éste cae el piso? (e) ¿Afecta la masa del bloque a cualquiera de los cálculos citados anteriormente?

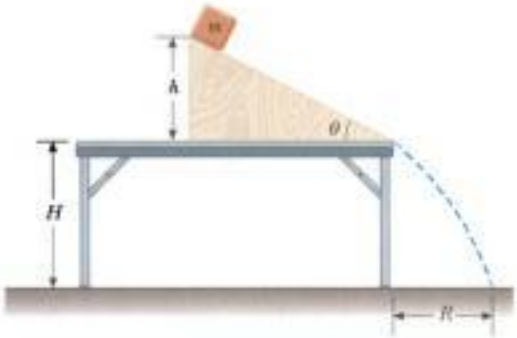


Figura P5.58 Problemas 58 y 70.

59. Un tostador de 1.30 kg no está conectado a la toma de corriente. El coeficiente de fricción estática entre el tostador y un tope de mostrador es 0.350. Para hacer que el tostador empiece a moverse, en un descuido usted tira de su cordón eléctrico. (a) Para que la tensión del cordón sea tan pequeña como es posible, ¿usted debe tirar a qué ángulo sobre la horizontal? (b) Con este ángulo, ¿qué tan grande debe ser la tensión?

60. Materiales como el hule de llantas de automóviles y suelas de zapatos se prueban en su coeficiente de fricción estática con un aparato llamado probador James. El par de superficies para las que μ_s ha de medirse se marcan como B y C en la figura P5.60. La muestra C se une a un pie D en el extremo inferior de un brazo de pivote E, que forma un ángulo θ con la vertical. El extremo superior del brazo está unido con bisagra en F a una varilla vertical G, que se desliza libremente en una guía H fija al bastidor del aparato y sostiene una carga I de masa 36.4 kg. El perno de bisagra en F es también el eje de una rueda que puede rodar verticalmente sobre el marco. Todas las partes móviles tienen masas despreciables en comparación a la carga de 36.4 kg. Los pivotes

Materiał chroniony prawem autorskim

son casi sin fricción. La superficie B de prueba está unida a una plataforma rodante A. El operador lentamente mueve la plataforma a la izquierda de la figura hasta que la muestra C de pronto resbale sobre la superficie B. En el punto crítico donde el movimiento deslizante está listo para iniciarse, el operador toma nota del ángulo θ, del brazo pivote. (a) Haga un diagrama de cuerpo libre del perno en F. Está en equilibrio bajo tres fuerzas: la fuerza gravitacional sobre la carga I, una fuerza horizontal normal ejercida por el marco, y una fuerza de compresión dirigida hacia arriba a lo largo del brazo E. (b) Trace un diagrama de cuerpo libre del pie D y la muestra C, considerados como un sistema. (c) Determine la fuerza normal que la superficie de prueba B ejerce sobre la muestra para cualquier ángulo θ. (d) Muestre que $\mu_s = \tan\theta_r$. (e) El transportador del probador puede registrar ángulos de hasta 50.2°. ¿Cuál es el máximo coeficiente de fricción que puede medir?

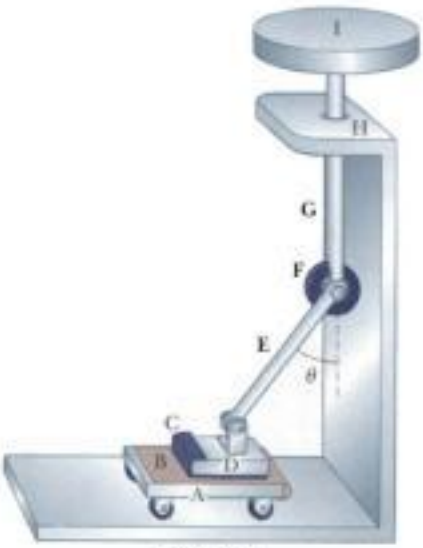


Figura P5.60

61. ¿Qué fuerza horizontal debe ser aplicada al carro que se ilustra en la figura P5.61 para que los bloques permanezcan estacionarios con respecto al carro? Suponga que todas las superficies, ruedas y polea son sin fricción. (*Sugerencia:* Nótese que la fuerza ejercida por la cuerda acelera a m_1.)

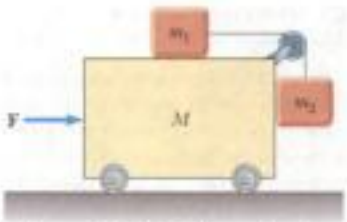


Figura P5.61 Problemas 61 y 63.

62. A un estudiante se le pide medir la aceleración de un carro en un plano inclinado "sin fricción" como en la figura 5.11, usando para ello una pista de aire, un cronómetro y una cinta de medir. La altura del plano inclinado se mide y es 1.774 cm, y la longitud total del plano inclinado se mide y es $d = 127.1$ cm. Por lo tanto, el ángulo de inclinación θ se determina a partir de la relación $\theta = 1.774/127.1$. El carro se suelta desde el reposo en la parte superior del plano, y su posición x a lo largo del plano se mide como función del tiempo, donde $x = 0$ se refiere a la posición inicial del carro. Para valores x de 10.0 cm, 20.0 cm, 35.0 cm, 50.0 cm, 75.0 cm y 100 cm, los tiempos medidos en los que se alcanzan estas posiciones (promedio sobre cinco corridas) son 1.02 s, 1.53 s, 2.01 s, 2.64 s, 3.30 s y 3.75 s, respectivamente. Construya una gráfica de x contra t^2, y efectúe un ajuste lineal de mínimos cuadrados a los datos. Determine la aceleración del carro desde la pendiente de esta gráfica, y compárela con el valor que se obtendría usando $a' = g\,\text{sen}\,\theta$, donde $g = 9.80\ \text{m/s}^2$.

63. Inicialmente el sistema de objetos que se muestran en la figura P5.61 se mantiene sin movimiento. Todas las superficies, polea y ruedas son sin fricción. Sea cero la fuerza **F** y suponga que m_2 se puede mover sólo verticalmente. En el instante después de soltar los objetos, encuentre (a) la tracción T en la cuerda, (b) la aceleración de m_2, (c) la aceleración de M, y (d) la aceleración de m_1. (*Nota:* La polea acelera junto con el carro.)

64. Un bloque de masa 5.00 kg se apoya sobre la parte superior de un segundo bloque rectangular de masa 15.0 kg, que a su vez está sobre una mesa horizontal. Los coeficientes de fricción entre los dos bloques son $\mu_s = 0.300$ y $\mu_k = 0.100$. Los coeficientes de fricción entre el bloque inferior y la mesa rugosa son $\mu_s = 0.500$ y $\mu_k = 0.400$. Usted aplica una fuerza horizontal constante al bloque inferior, apenas suficiente para hacer que este bloque empiece a deslizarse desde entre el bloque superior y la mesa. (a) Trace un diagrama de cuerpo libre de cada bloque, nombrando las fuerzas en cada uno. (b) Determine la magnitud de cada fuerza sobre cada bloque en el instante cuando usted ha empezado a empujar pero el movimiento no se ha iniciado todavía. En particular ¿qué fuerza debe aplicar usted? (c) Determine la aceleración que usted mide para cada bloque.

65. Un planeador sobre una vía horizontal de aire es jalado por una cuerda a un ángulo θ. La cuerda tensa corre sobre una polea y está unida a un objeto colgante de masa 0.500 como en la figura P5.65. (a) Muestre que la velocidad v_x del planeador y la rapidez v_y del objeto colgante están relacionadas por $v_x = sv_y$, donde

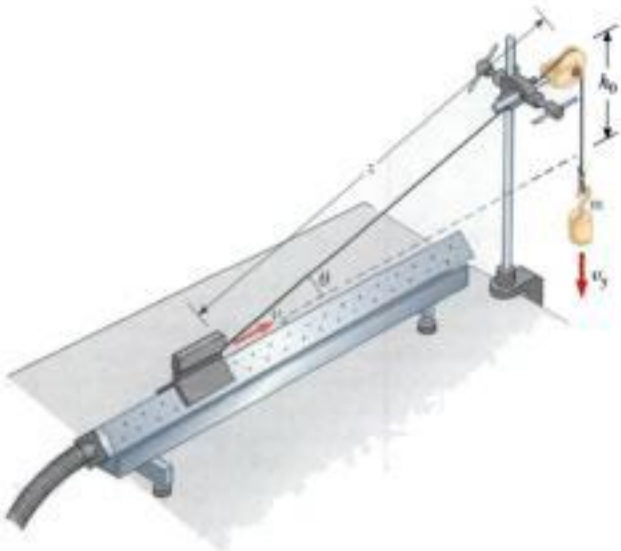


Figura P5.65

Materiał chroniony prawem autorskim

$u = z(z^2 - h_0^2)^{-1/2}$. (b) El planeador se suelta desde el reposo. Demuestre que en ese instante la aceleración a_x del planeador y la aceleración a_y del objeto colgante están relacionadas por $a_x = ua_y$. (c) Encuentre la tensión de la cuerda en el instante en que el planeador se suelta para $h_0 = 80.0$ cm y $\theta = 30.0°$.

66. Se usan mecanismos de leva en numerosas máquinas. Por ejemplo, las levas abren y cierran las válvulas del motor de un auto para permitir la admisión de vapor de gasolina a cada cilindro y permitir la salida de gases de escape. El principio se ilustra en la figura P5.66, que muestra una varilla (también llamada balancín) de masa m que apoya sobre una cuña de masa M. La cuña deslizante duplica la función de un disco excéntrico giratorio sobre un árbol de levas de un auto. Suponga que no hay fricción entre la cuña y la base, entre el balancín y la cuña, o entre la varilla y la guía en la que se desliza. Cuando la cuña es empujada a la izquierda por la fuerza F, la varilla se mueve hacia arriba y hace algo, por ejemplo abrir una válvula. Al variar la forma de la cuña, el movimiento de la varilla seguidora puede hacerse muy complejo, pero suponga que la cuña forma un ángulo constante de $\theta = 15.0°$. Suponga que usted desea que la cuña y la varilla arranquen desde el reposo y se muevan con aceleración constante, con la varilla moviéndose hacia arriba 1.00 mm en 8.00 ms. Tome $m = 0.250$ kg y $M = 0.500$ kg. ¿Qué fuerza F debe ser aplicada a la cuña?

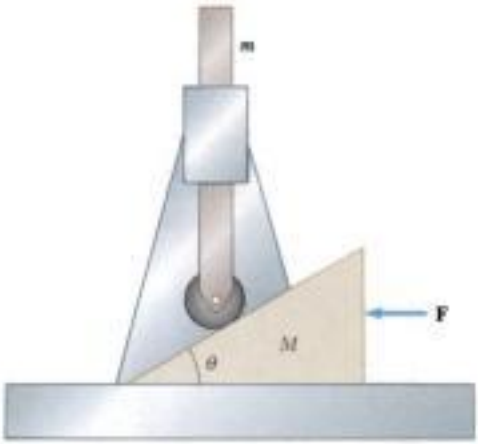


Figura P5.66

67. Cualquier dispositivo que permita aumentar la fuerza que se ejerce es una clase de *máquina*. Algunas máquinas, como la palanca o el plano inclinado, son muy simples. Algunas máquinas ni siquiera parecen máquinas. Un ejemplo es el siguiente: un auto queda atascado en el lodo, y el conductor no puede tirar de él para sacarlo, pero cuenta con un cable largo que conecta tenso entre la defensa delantera del auto y un árbol; luego tira del cable en su punto medio, lo cual ejerce una fuerza f. Cada mitad del cable es desplazada un pequeño ángulo θ de la recta entre los extremos del cable. (a) Deduzca una expresión para la fuerza ejercida sobre el auto. (b) Evalúe la tracción del cable para el caso donde $\theta = 7.00°$ y $f = 100$ N.

68. Dos bloques de masa 3.50 kg y 8.00 kg están conectados por una cuerda sin masa que pasa sobre una polea sin fricción (figura P5.68). Los planos inclinados son sin fricción. Encuentre (a) la magnitud de la aceleración de cada bloque y (b) la tensión de la cuerda.

Figura P5.68

69. Una camioneta acelera cuesta abajo (figura P5.69), pasando del reposo a 30.0 m/s en 6.00 s. Durante la aceleración, un juguete ($m = 0.100$ kg) cuelga de una cuerda del techo de la camioneta. La aceleración es tal que la cuerda permanece perpendicular al techo. Determine (a) el ángulo θ y (b) la tensión de la cuerda.

Figura P5.69

70. En la figura P5.58 el plano inclinado tiene masa M y está sujeto a una mesa horizontal estacionaria. El bloque de masa m está puesto cerca del fondo del plano y se suelta con un rápido empujón que lo hace deslizarse hacia arriba. Se detiene cerca de la parte alta del plano, como se ve en la figura, y luego se desliza de nuevo hacia abajo, siempre sin fricción. Encuentre la fuerza que la mesa ejerce sobre el plano inclinado en todo este movimiento.

71. Un mago tira de un mantel que está bajo un tarro de 200 g puesto a 30.0 cm del borde del mantel. El mantel ejerce una fuerza de fricción de 0.100 N sobre el tarro, y el mantel se tira con una aceleración constante de 3.00 m/s². ¿Cuánto se mueve el tarro con respecto a la mesa horizontal antes que el mantel esté completamente fuera de bajo el tarro? Nótese que el mantel debe moverse más de 30 cm con respecto a la mesa durante el proceso.

72. Un objeto de 8.40 kg se desliza hacia abajo de un plano inclinado fijo y sin fricción. Use una computadora para determinar y tabular la fuerza normal ejercida sobre el objeto y su aceleración para una serie de ángulos de inclinación (medidos desde la horizontal) que van de 0° a 90° en incrementos de 5°. Haga una gráfica de la fuerza normal y la aceleración como funciones del ángulo de inclinación. En los casos límite de 0° y 90°, ¿son sus resultados consistentes con el comportamiento conocido?

Materiał chroniony prawem autorskim

73. Un móvil se forma al sostener cuatro mariposas metálicas de igual masa m de una cuerda de longitud L. Los puntos de soporte están igualmente separados una distancia ℓ, como se ve en la figura P5.73. La cuerda forma un ángulo θ_1 con el techo en cada punto extremo. La sección central de la cuerda es horizontal. (a) Encuentre la tensión en cada sección de cuerda en términos de θ_1, m y g. (b) Hállese el ángulo θ_2, en términos de θ_1, que las secciones de cuerda entre las mariposas exteriores y las mariposas interiores forman con la horizontal. (c) Demuestre que la distancia D entre los puntos extremos de la cuerda es

$$D = \frac{L}{5}\left(2\cos\theta_1 + 2\cos\left[\tan^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\tan\theta_1\right)\right] + 1\right)$$

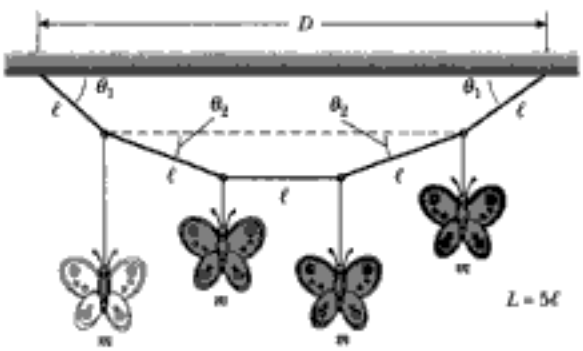


Figura P5.73

Respuestas a las *preguntas rápidas*

5.1 (d). La opción (a) es verdadera. La primera ley de Newton nos dice que el movimiento no requiere fuerza: un objeto en movimiento continúa moviéndose a velocidad constante en ausencia de fuerzas externas. La opción (b) también es verdadera. Un objeto estacionario puede tener varias fuerzas actuando sobre él, pero si el vector suma de todas estas fuerzas externas es cero, no hay fuerza neta y el objeto permanece estacionario.

5.2 (a). Si actúa una sola fuerza, esta fuerza constituye la fuerza neta y hay una aceleración según la segunda ley de Newton.

5.3 (c). La segunda ley de Newton relaciona sólo la fuerza y la aceleración. La dirección de movimiento es parte de la *velocidad* de un objeto, y la fuerza determina la dirección de la aceleración, no la de la velocidad.

5.4 (d). Con el doble de fuerza, el objeto va a experimentar el doble de aceleración. Como la fuerza es constante, la aceleración es constante, y la rapidez del objeto (que inicia desde el reposo) está dada por $v = at$. Con el doble de aceleración, el objeto llegará a la rapidez v en la mitad del tiempo.

5.5 (a). La fuerza gravitacional actúa sobre la pelota en *todos* los puntos en su trayectoria.

5.6 (b). Como el valor de g es menor en la Luna que en la Tierra, más masa de oro se necesita para representar 1 newton de peso en la Luna. Por lo tanto, su amigo en la Luna es más rico, por un factor de 6.

5.7 (c). De acuerdo con la tercera ley de Newton, la mosca y el autobús experimentan fuerzas que son iguales en magnitud, pero opuestas en dirección.

5.8 (a). Como la mosca tiene una masa tan pequeña, la segunda ley de Newton nos dice que experimenta una aceleración muy grande. La enorme masa del autobús significa que éste resiste más efectivamente cualquier cambio en su movimiento y exhibe una pequeña aceleración.

5.9 (c). La fuerza de reacción a su peso es una fuerza gravitacional hacia arriba en la Tierra debida a usted.

5.10 (b). Recuerde la frase "cuerpo libre." Usted traza *un* cuerpo (un objeto), libre de todos los otros que puedan interactuar, y traza sólo las fuerzas ejercidas sobre ese objeto.

5.11 La fuerza de fricción actúa opuesta a la fuerza gravitacional sobre el libro para mantenerlo en equilibrio. Debido a que la fuerza gravitacional es hacia abajo, la fuerza de fricción debe ser hacia arriba.

5.12 (b). La caja acelera al este. Como la única fuerza horizontal que actúa sobre ella es la fuerza de fricción estática entre su superficie inferior y la plataforma del camión, esa fuerza también debe estar dirigida al este.

5.13 (b). Al ángulo al que el libro se libera, el componente de la fuerza gravitacional paralelo a la tabla es aproximadamente igual a la máxima fuerza estática de fricción. Como el coeficiente cinético de fricción es menor que el coeficiente estático, a este ángulo, el componente de la fuerza gravitacional paralelo a la tabla es mayor que la fuerza cinética de fricción. Entonces, hay una fuerza neta hacia abajo paralela a la tabla y el libro acelera.

5.14 (b). Cuando se tire de la cuerda, hay un componente de la fuerza de usted aplicada que es hacia arriba. Esto reduce la fuerza normal entre el trineo y la nieve. A su vez, esto reduce la fuerza de fricción entre el trineo y la nieve, haciendo más fácil que se mueva. Si usted empuja desde atrás, con fuerza un componente hacia abajo, la fuerza normal es mayor, la fuerza de fricción es mayor, y el trineo es más difícil de moverse.

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 6

Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

6.1 Segunda ley de Newton aplicada al movimiento circular uniforme

6.2 Movimiento circular no uniforme

6.3 Movimiento en marcos acelerados

6.4 Movimiento en presencia de fuerzas resistivas

6.5 Modelación numérica en dinámica de partículas

▲ *El ojo de Londres, juego mecánico sobre el río Támesis en el centro de Londres. Los paseantes se mueven en un gran círculo vertical y observan una panorámica impresionante de la ciudad. En este capítulo estudiaremos las fuerzas que intervienen en el movimiento circular. (© Paul Hardy/CORBIS).*

Materiał chroniony prawem autorskim

En el capítulo precedente introdujimos las leyes de Newton y las aplicamos a situaciones donde aparece un movimiento lineal; aquí estudiaremos un movimiento que es ligeramente más complicado. Por ejemplo, aplicaremos las leyes de Newton a objetos que se desplazan en trayectorias circulares. Del mismo modo, estudiaremos el movimiento observado desde un marco de referencia que acelera y el movimiento de un objeto que se mueve en un medio viscoso. En su mayor parte, este capítulo está formado por una serie de ejemplos seleccionados para ilustrar la aplicación de las leyes de Newton a una amplia variedad de circunstancias.

6.1 Segunda ley de Newton aplicada al movimiento circular uniforme

En la sección 4.4 encontramos que una partícula que se mueve con rapidez v uniforme en una trayectoria de radio r experimenta una aceleración que tiene una magnitud de

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

La aceleración se denomina *aceleración centrípeta* porque $\mathbf{a}_c$ está dirigida hacia el centro del círculo. Además, $\mathbf{a}_c$ es *siempre* perpendicular a $\mathbf{v}$. (Si hubiera un componente de aceleración paralelo a $\mathbf{v}$, la rapidez de la partícula estaría cambiando.)

Considere una pelota de masa m que está atada a una cuerda de longitud r y se hace girar con rapidez constante en una trayectoria circular horizontal, como se ve en la figura 6.1. Su peso es sostenido por una mesa sin fricción. ¿Por qué la pelota se mueve en círculos? Según la primera ley de Newton, la pelota tiende a moverse en línea recta, pero la cuerda im-

Atleta en el proceso de lanzamiento de martillo en los juegos olímpicos de 1996 en Atlanta, Georgia. La fuerza ejercida por la cadena produce la aceleración centrípeta del martillo. Sólo cuando el atleta suelta el martillo, éste se moverá a lo largo de una trayectoria recta tangente al círculo.

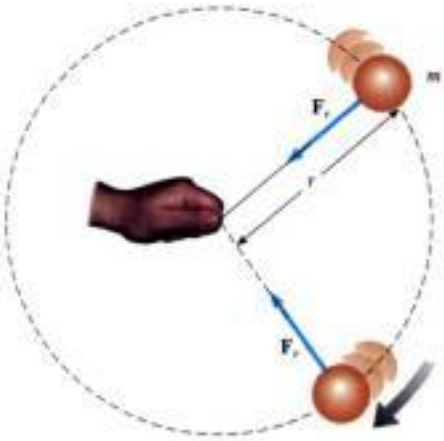


Figura 6.1 Vista superior de una pelota que se mueve en una trayectoria circular en un plano horizontal. Una fuerza $\mathbf{F}_c$ dirigida hacia el centro del círculo mantiene la pelota en movimiento en su trayectoria circular.

Material chroniony prawem autorskim

pide el movimiento a lo largo de una recta al ejercer sobre la pelota una fuerza radial $\mathbf{F}_r$ que la hace seguir una trayectoria circular. Esta fuerza está dirigida a lo largo de la cuerda hacia el centro del círculo, como se ve en la figura 6.1.

Si aplicamos la segunda ley de Newton a lo largo de la dirección radial, encontramos que se puede evaluar la fuerza neta que causa la aceleración centrípeta:

Fuerza que causa la aceleración centrípeta

$$\sum F = ma_r = m\frac{v^2}{r} \tag{6.1}$$

Una fuerza que causa la aceleración centrípeta actúa hacia el centro de la trayectoria circular y ocasiona un cambio en la dirección del vector velocidad. Si esa fuerza desaparece, el objeto ya no se movería en su trayectoria circular, sino que se movería a lo largo de una trayectoria recta tangente al círculo. Esta idea está ilustrada en la figura 6.2 para la pelota que se hace girar en el extremo de una cuerda en un plano horizontal. Si la cuerda se rompe en algún instante, la pelota se mueve a lo largo de una trayectoria recta tangente al círculo en el punto donde se rompe la cuerda.

Figura 6.3 (Preguntas rápidas 6.1 y 6.2) Rueda de la fortuna instalada en el muelle de la Armada, en Chicago, Illinois.

Pregunta rápida 6.1 Usted está a bordo de una rueda de la fortuna (figura 6.3) que está girando con rapidez constante. El carro en el que usted se encuentra siempre mantiene su orientación correcta hacia arriba, no se invierte. ¿Cuál es la dirección de la aceleración centrípeta de los pasajeros cuando están en lo *alto* de la rueda? (a) hacia arriba (b) hacia abajo (c) imposible de determinar. ¿Cuál es la dirección de la aceleración centrípeta de los pasajeros cuando están en el *fondo* de la rueda? (d) hacia arriba (e) hacia abajo (f) imposible de determinar.

Pregunta rápida 6.2 Usted está a bordo de la rueda de la fortuna de la pregunta rápida 6.1. ¿Cuál es la dirección de la fuerza normal ejercida por el asiento sobre usted cuando se encuentre en lo *alto* de la rueda? (a) hacia arriba (b) hacia abajo (c) imposible de determinar. ¿Cuál es la dirección de la fuerza normal ejercida por el asiento sobre usted cuando se encuentre en el *fondo* de la rueda? (d) hacia arriba (e) hacia abajo (f) imposible de determinar.

¡ADVERTENCIA!

6.1 Dirección del movimiento cuando la cuerda se rompe

Estudie la figura 6.2 con todo cuidado. Muchos estudiantes (equivocadamente) piensan que la pelota se moverá *radialmente* alejándose del centro del círculo cuando la cuerda se rompe. La velocidad de la pelota es *tangente* al círculo. Por la primera ley de Newton, la pelota continúa su movimiento en la dirección en la que se mueve justo cuando la fuerza de la cuerda desaparece.

En el vínculo **Active Figures** *en* **http://www.pse6.com**, *usted podrá "romper" la cuerda y observar el efecto sobre el movimiento de la pelota.*

Figura activa 6.2 Vista superior de una pelota que se mueve en trayectoria circular en un plano horizontal. Cuando la cuerda se rompe, la pelota se mueve en la dirección tangente al círculo.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo conceptual 6.1 Fuerzas que causan aceleración centrípeta

La fuerza que causa la aceleración centrípeta se llama a veces *fuerza centrípeta*. Estamos familiarizados con varias fuerzas en la naturaleza: fricción, gravedad, fuerzas normales, tensión, etcétera. ¿Debemos agregar fuerza *centrípeta* a esta lista?

Solución No; la fuerza centrípeta *no debe* agregarse a esta lista. Ésta es una trampa para muchos estudiantes. Dar nombre a la fuerza que causa movimiento circular —fuerza centrípeta— lleva a muchos estudiantes a considerarla como una nueva *clase* de fuerza en lugar de un nuevo *papel* para la fuerza. Un error común en diagramas de fuerza es trazar todas las fuerzas usuales y luego sumar otro vector para la fuerza centrípeta. Pero no es una fuerza separada, es simplemente una o más de nuestras conocidas fuerzas *que actúan en el papel de una fuerza que produce movimiento circular.*

Considere algunos ejemplos. Para el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, la fuerza centrípeta es la *gravedad*. Para un objeto colocado sobre una mesa giratoria, la fuerza centrípeta es la *fricción*. Para una piedra que se hace girar horizontal en el extremo de una cuerda, la magnitud de la fuerza centrípeta es la *tensión* de la cuerda. Para un paseante de un juego mecánico de un parque de diversiones, presionado contra la pared interior de un cuarto circular que gira rápidamente, la fuerza centrípeta es la *fuerza normal* ejercida por la pared. Además, la fuerza centrípeta podría ser una combinación de dos o más fuerzas. Por ejemplo, cuando una persona pasa por el punto más bajo de la rueda de la fortuna de la pregunta rápida 6.1, la fuerza centrípeta sobre ella es la diferencia entre la fuerza normal ejercida por el asiento y la fuerza de gravedad. Después de este análisis, no usaremos el término *fuerza centrípeta* en este libro.

Ejemplo 6.2 El péndulo cónico

Un pequeño objeto de masa m está suspendido de una cuerda de longitud L. El objeto gira con rapidez constante v en un círculo horizontal de radio r, como se muestra en la figura 6.4. (Como la cuerda recorre la superficie de un cono, el sistema se conoce como *péndulo cónico*.) Encuentre una expresión para v.

Solución Conceptualice el problema con ayuda de la figura 6.4. Clasificamos éste como un problema que combina el equilibrio para la pelota en la dirección vertical con un movimiento circular uniforme en la dirección horizontal. Para analizar el problema, comience por hacer que θ represente el ángulo entre la cuerda y la vertical. En el diagrama de cuerpo libre que se ilustra, la fuerza **T** ejercida por la cuerda se descompone en un componente vertical $T\cos\theta$ y un componente horizontal $T\,\text{sen}\,\theta$ que actúan hacia el centro de revolución. Como el objeto no acelera en la dirección vertical, $\Sigma F_y = ma_y = 0$ y el componente vertical hacia arriba de **T** debe equilibrar la fuerza de gravedad hacia abajo. Por lo tanto,

$$(1) \qquad T\cos\theta = mg$$

Como la fuerza que causa la aceleración centrípeta en este ejemplo es el componente $T\,\text{sen}\,\theta$, podemos usar la ecuación 6.1 para obtener

$$(2) \qquad \sum F = T\,\text{sen}\,\theta = ma_c = \frac{mv^2}{r}$$

Al dividir (2) entre (1) y usar $\text{sen}\,\theta/\cos\theta = \tan\theta$, eliminamos T y encontramos que

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$v = \sqrt{rg\tan\theta}$$

De la geometría de la figura 6.4, vemos que $r = L\,\text{sen}\,\theta$; por lo tanto,

$$v = \sqrt{Lg\,\text{sen}\,\theta\tan\theta}$$

Nótese que la rapidez es independiente de la masa del objeto.

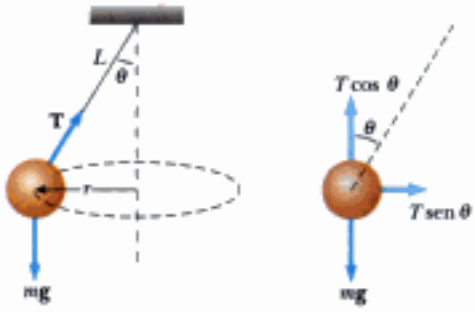


Figura 6.4 (Ejemplo 6.2) El péndulo cónico y su diagrama de cuerpo libre.

Ejemplo 6.3 ¿Qué tan rápido puede girar?

Una pelota de masa 0.500 kg está unida al extremo de una cuerda de 1.50 m de largo. La pelota se hace girar en un círculo horizontal como se ve en la figura 6.1. Si la cuerda puede resistir una tensión máxima de 50.0 N, ¿cuál es la rapidez máxima a la que la pelota puede girar antes que la cuerda se rompa? Suponga que la cuerda permanece horizontal durante el movimiento.

Solución Es lógico que cuanto más fuerte sea la cuerda, la pelota puede hacerse girar con más rapidez antes que se rompa la cuerda. También esperamos que una pelota más grande rompa la cuerda a menor rapidez (¡Imagine hacer girar una bola de boliche en la cuerda!)

Como la fuerza que causa la aceleración centrípeta, en este caso es la fuerza **T** ejercida por la cuerda sobre la pelota, la ecuación 6.1 da

$$(1) \qquad T = m\frac{v^2}{r}$$

Al despejar v tendremos

$$v = \sqrt{\frac{Tr}{m}}$$

Esto muestra que v aumenta con T y disminuye con una m más grande, como esperábamos ver; para una v dada, una masa grande requiere una tensión grande y una masa pequeña necesita sólo una tensión pequeña. La máxima rapidez que la pelota puede tener corresponde a la máxima tensión. Por lo tanto, encontramos

Materiał chroniony prawem autorskim

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{T_{máx} r}{m}} = \sqrt{\frac{(50.0\ \text{N})\ (1.50\ \text{m})}{0.500\ \text{kg}}} = \mathbf{12.2\ m/s}$$

¿Qué pasaría si? Suponga que la pelota se hace girar en un círculo de mayor radio a la misma rapidez *v*. ¿Es más probable o menos probable que la cuerda se rompa?

Respuesta El radio más grande significa que el cambio en la dirección del vector velocidad será menor para un intervalo dado de tiempo. Así, la aceleración es menor y la fuerza necesaria desde la cuerda es menor. En consecuencia, es menos probable que la cuerda se rompa cuando la pelota se desplaza en un círculo de radio mayor. Para comprender mejor este argumento, escribamos dos veces la ecuación (1), una por cada radio:

$$T_1 = \frac{mv^2}{r_1} \qquad T_2 = \frac{mv^2}{r_2}$$

Al dividir las dos ecuaciones tendremos:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(\dfrac{mv^2}{r_2}\right)}{\left(\dfrac{mv^2}{r_1}\right)} = \frac{r_1}{r_2}$$

Si escogemos $r_2 > r_1$, vemos que $T_2 < T_1$. Por lo tanto, se necesita menos tensión para hacer girar la pelota en el círculo más grande, y es menos probable que la cuerda se rompa.

Ejemplo 6.4 ¿Cuál es la máxima rapidez del auto?

Un auto de 1 500 kg que se mueve en un camino plano y horizontal toma una curva, como se ve en la figura 6.5. Si el radio de la curva es de 35.0 m y el coeficiente de fricción estática entre las llantas y el pavimento seco es 0.500, encuentre la máxima rapidez que el auto puede tener y todavía tomar satisfactoriamente la curva.

Solución En este caso, la fuerza que hace posible que el auto permanezca en su trayectoria circular es la fuerza de fricción estática. (*Estática* porque no ocurre derrape en el punto de contacto entre camino y llantas. Si la fuerza de fricción estática fuera cero, por ejemplo, si el auto estuviera en un camino con hielo, el auto continuaría en línea recta y se saldría del camino.) Por lo tanto, de la ecuación 6.1 tenemos

$$(1) \qquad f_s = m\frac{v^2}{r}$$

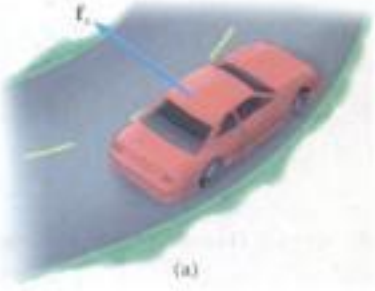


Figura 6.5 (Ejemplo 6.4) (a) La fuerza de fricción estática dirigida hacia el centro de la curva mantiene al auto moviéndose en una trayectoria circular. (b) Diagrama de cuerpo libre para el auto.

La máxima rapidez que el auto puede tener alrededor de la curva es la rapidez con la que está a punto de patinar hacia fuera. En este punto, la fuerza de fricción tiene su valor máximo $f_{s,\,máx} = \mu_s n$. Como el auto que se ilustra en la figura 6.5b está en equilibrio en la dirección vertical, la magnitud de la fuerza normal es igual al peso ($n = mg$) y entonces $f_{s,\,máx} = \mu_s mg$. Sustituyendo este valor por f_s en (1), encontramos que la rapidez máxima es

$$(2) \qquad v_{máx} = \sqrt{\frac{f_{s,\,máx}\, r}{m}} = \sqrt{\frac{\mu_s m g r}{m}} = \sqrt{\mu_s g r}$$

$$= \sqrt{(0.500)(9.80\ \text{m/s}^2)(35.0\ \text{m})}$$

$$= \mathbf{13.1\ m/s}$$

Nótese que la rapidez máxima no depende de la masa del auto. Ésta es la razón por la que en las carreteras con curvas no se necesitan tantos señalamientos de límite de rapidez para la gran cantidad de vehículos que usan las carreteras.

¿Qué pasaría si? Suponga que un auto transita por esta curva en un día lluvioso y empieza a patinar en la curva cuando su rapidez alcanza sólo 8.00 m/s. ¿Qué se puede decir del coeficiente de fricción estática en este caso?

Respuesta El coeficiente de fricción entre llantas y un pavimento mojado debería ser menor que entre llantas y un camino seco. Esto es consistente con la experiencia al conducir un vehículo, porque es más probable que un auto derrape en un camino mojado que en uno seco.

Para comprobar esta idea, de la ecuación (2) podemos despejar el coeficiente de fricción:

$$\mu_s = \frac{v_{máx}^2}{gr}$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$\mu_s = \frac{v_{máx}^2}{gr} = \frac{(8.00\ \text{m/s})^2}{(9.80\ \text{m/s}^2)(35.0\ \text{m})} = 0.187$$

Esto es en verdad menor que el coeficiente de 0.500 para un camino seco.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 6.5 Rampa de salida peraltada

Un ingeniero civil desea diseñar una rampa peraltada de salida para una carretera, en forma tal que un auto no tenga que confiar en la fricción para pasar por la curva sin patinar. En otras palabras, un auto que se mueva a la velocidad designada, puede transitar por la curva aun cuando el camino esté cubierto de hielo. Una curva de este tipo se conoce como *peraltada*, lo cual significa que el camino está inclinado hacia el interior de la curva. Suponga que la rapidez diseñada para la rampa es 13.4 m/s (30.0 mi/h) y el radio de la curva es 50.0 m. ¿A qué ángulo debe darse el peralte a la curva?

Solución En un camino nivelado (sin peralte), la fuerza que produce la aceleración centrípeta es la fuerza de fricción estática entre el auto y el camino, como vimos en el ejemplo previo. No obstante, si el camino está peraltado a un ángulo θ, como en la figura 6.6, la fuerza normal **n** tiene un componente horizontal n sen θ que apunta hacia el centro de la curva. Como la rampa ha de diseñarse de modo que la fuerza de fricción estática sea cero, sólo el componente $n_x = n \operatorname{sen}\theta$ causa aceleración centrípeta. Por lo tanto, la segunda ley de Newton para la dirección radial da

$$(1) \qquad \sum F_x = n \operatorname{sen}\theta = \frac{mv^2}{r}$$

El auto está en equilibrio en la dirección vertical. Así, de $\Sigma F_y = 0$ tenemos

$$(2) \qquad n\cos\theta = mg$$

Al dividir (1) entre (2) tendremos

$$(3) \qquad \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(13.4\ \text{m/s})^2}{(50.0\ \text{m})(9.80\ \text{m/s}^2)}\right) = \mathbf{20.1°}$$

Si el auto da vuelta por la curva con una rapidez menor a 13.4 m/s, se necesita fricción para evitar que patine y caiga hacia adentro (a la izquierda en la figura 6.6). Un conductor que trate de transitar por la curva a una rapidez mayor a 13.4 m/s tiene que depender de la fricción para evitar que patine y suba por el peralte (a la derecha en la figura 6.6). El ángulo de peralte es independiente de la masa del vehículo que transite por la curva.

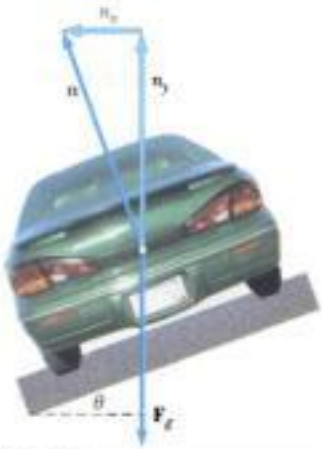


Figura 6.6 (Ejemplo 6.5) Un auto toma una curva en un camino peraltado a un ángulo θ con la horizontal. Cuando se desprecia la fricción, la fuerza que causa la aceleración centrípeta y mantiene al auto moviéndose en su trayectoria circular, es el componente horizontal de la fuerza normal.

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si el mismo camino se construyera en Marte en el futuro para conectar diferentes centros colonizados; se recorrería a la misma rapidez?

Respuesta La fuerza menor gravitacional en Marte significaría que el auto no está presionado con tanta fuerza al camino. La menor fuerza normal resulta en un menor componente de la fuerza normal hacia el centro del círculo. Este menor componente no será suficiente para dar la aceleración centrípeta asociada con la rapidez original. La aceleración centrípeta debe ser reducida, lo cual se puede hacer al reducir la rapidez v.

La ecuación (3) muestra que la rapidez v es proporcional a la raíz cuadrada de g para un camino de radio fijo r peraltado a un ángulo fijo θ. Entonces, si g es menor, como lo es en Marte, la rapidez v con la que el camino puede ser recorrido con seguridad también es menor.

Ejemplo 6.6 ¡A hacer un rizo!

Un piloto de masa m en un avión a reacción ejecuta un rizo, como se ve en la figura 6.7a. En esta maniobra, la nave se mueve en un círculo vertical de radio 2.70 km a una rapidez constante de 225 m/s. Determine la fuerza ejercida por el asiento sobre el piloto **(A)** en la parte baja del círculo y **(B)** en la parte alta del círculo. Exprese sus respuestas en términos del peso mg del piloto.

Solución Para conceptualizar este problema, observe atentamente la figura 6.7. Con base en la experiencia de conducir un auto sobre colinas de poca altura, o pasear en lo alto de una rueda de la fortuna, es de esperar sentirse más ligero en la parte alta de la trayectoria. Del mismo modo, el estudiante esperaría sentirse más pesado en la parte baja de la trayectoria. Al observar la figura 6.7, esperamos que la respuesta para (A) sea mayor que para (B) porque en la parte baja del círculo las fuerzas normal y de gravedad actúan en direcciones *opuestas*, mientras que en lo alto del círculo estas dos fuerzas actúan en la *misma* dirección. El vector suma de estas dos fuerzas da la fuerza de magnitud constante que mantiene al piloto en movimiento en una trayectoria circular a una rapidez constante. Para obtener vectores de fuerza neta con la misma

Materiał chroniony prawem autorskim

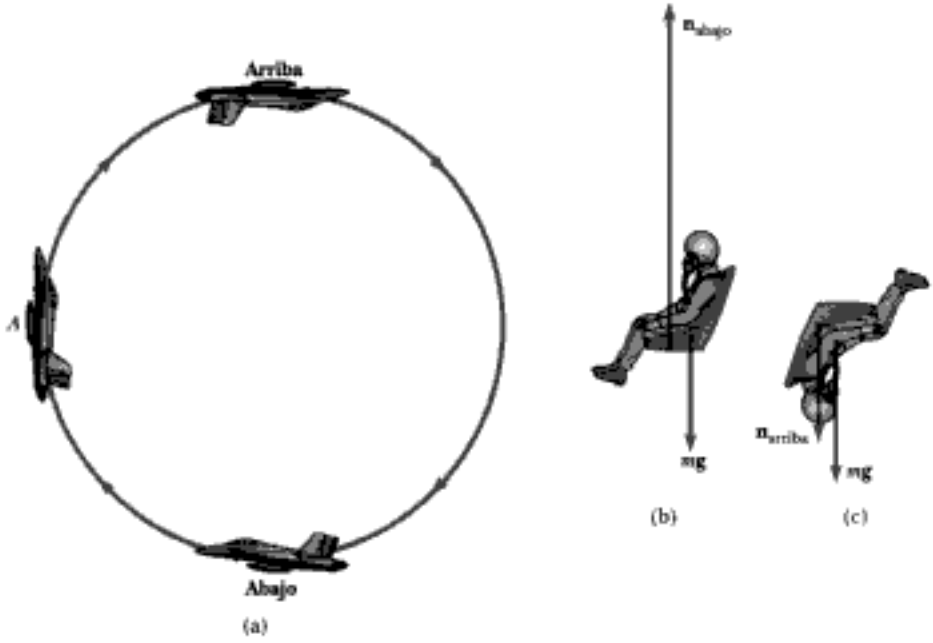


Figura 6.7 (Ejemplo 6.6) Un avión ejecuta un rizo cuando se mueve en un círculo vertical a rapidez constante. (b) Diagrama de cuerpo libre para el piloto en la parte baja del círculo. En esta posición, el piloto experimenta un mayor peso aparente que su peso verdadero. (c) Diagrama de cuerpo libre para el piloto en la parte alta del círculo.

magnitud, la fuerza normal en la parte baja debe ser mayor que en la parte alta. Como la rapidez del avión es constante (¿qué tan probable es esto?), podemos clasificar éste como un problema de movimiento circular uniforme, complicado por el hecho de que la fuerza gravitacional actúa en todo tiempo sobre el avión.

(A) Analice la situación y trace un diagrama de cuerpo libre para el piloto en la parte baja del círculo, como se ilustra en la figura 6.7b. Las únicas fuerzas que actúan sobre él son la fuerza gravitacional hacia abajo $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$ y la fuerza hacia arriba $\mathbf{n}_{abajo}$ ejercida por el asiento. Como la fuerza hacia arriba que da la aceleración centrípeta tiene una magnitud $n_{abajo} - mg$, la segunda ley de Newton para la dirección radial da

$$\sum F = n_{abajo} - mg = m\frac{v^2}{r}$$

$$n_{abajo} = mg + m\frac{v^2}{r} = mg\left(1 + \frac{v^2}{rg}\right)$$

Sustituyendo los valores dados para la rapidez y radio, tendremos

$$n_{abajo} = mg\left(1 + \frac{(225\ \text{m/s})^2}{(2.70 \times 10^3\ \text{m})(9.80\ \text{m/s}^2)}\right) = \mathbf{2.91}\,mg$$

Por lo tanto, la magnitud de la fuerza $\mathbf{n}_{abajo}$ ejercida por el asiento sobre el piloto es *mayor* que el peso del piloto en un factor de 2.91. Esto significa que el piloto experimenta un peso aparente que es mayor que su verdadero peso en un factor de 2.91.

(B) El diagrama de cuerpo libre para el piloto en lo alto del círculo se ilustra en la figura 6.7c. Como ya vimos antes, la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra y la fuerza $\mathbf{n}_{arriba}$ ejercida por el asiento sobre el piloto actúan hacia abajo, y por lo tanto la fuerza neta hacia abajo da la aceleración centrípeta y tiene una magnitud $n_{arriba} + mg$. Al aplicar la segunda ley de Newton tendremos

$$\sum F = n_{arriba} + mg = m\frac{v^2}{r}$$

$$n_{arriba} = m\frac{v^2}{r} - mg = mg\left(\frac{v^2}{rg} - 1\right)$$

$$n_{arriba} = mg\left(\frac{(225\ \text{m/s})^2}{(2.70 \times 10^3\ \text{m})(9.80\ \text{m/s}^2)} - 1\right)$$

$$= \mathbf{0.913}\,mg$$

En este caso, la magnitud de la fuerza ejercida por el asiento sobre el piloto es *menor* que su verdadero peso en un factor de 0.913, y el piloto se siente más ligero. Para finalizar el problema, nótese que esto es consistente con nuestra predicción del inicio de la solución.

Materiał chroniony prawem autorskim

6.2 Movimiento circular no uniforme

En el capítulo 4 encontramos que si una partícula se mueve con rapidez variable en una trayectoria circular, hay, además del componente radial de aceleración, un componente tangencial que tiene una magnitud de dv/dt. Por lo tanto, la fuerza que actúa sobre la partícula también debe tener un componente tangencial y uno radial. Como la aceleración total es $\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$, la fuerza total ejercida sobre la partícula es $\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}_r + \Sigma\mathbf{F}_t$, como se ve en la figura 6.8. El vector $\Sigma\mathbf{F}_r$ está dirigido hacia el centro del círculo y es responsable de la aceleración centrípeta. El vector $\Sigma\mathbf{F}_t$ tangente al círculo es responsable de la aceleración tangente, que representa un cambio en la rapidez de la partícula con el tiempo.

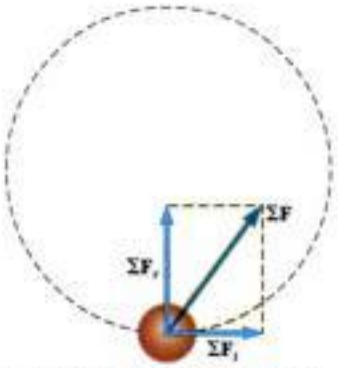


Figura activa 6.8 Cuando la fuerza que actúa sobre una partícula que se mueve en una trayectoria circular tiene un componente tangencial ΣF_t, cambia la rapidez de la partícula. La fuerza total ejercida sobre la partícula en este caso es el vector suma de la fuerza radial y la fuerza tangencial. Esto es, $\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}_r + \Sigma\mathbf{F}_t$.

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, usted podrá ajustar la posición inicial de la partícula y compare las fuerzas componentes que actúan sobre la partícula con aquellas que se ejercen sobre un niño en un columpio.

Pregunta rápida 6.3 De lo siguiente, ¿qué es *imposible* para un auto que se mueve en una trayectoria circular? (a) El auto tiene aceleración tangencial, pero no aceleración centrípeta. (b) El auto tiene aceleración centrípeta, pero no aceleración tangencial. (c) El auto tiene aceleración centrípeta y aceleración tangencial.

Pregunta rápida 6.4 Una cuenta se desliza libremente a una rapidez constante a lo largo de un alambre *horizontal* curvo, como se ve en la figura 6.9. Trace los vectores que representen la fuerza ejercida por el alambre sobre la cuentecilla en los puntos Ⓐ, Ⓑ y Ⓒ.

Figura 6.9 (Preguntas rápidas 6.4 y 6.5) Una cuenta se desliza a lo largo de un alambre curvo.

Pregunta rápida 6.5 En la figura 6.9, la cuenta acelera con aceleración tangencial constante cuando avanza hacia la derecha. Trace los vectores que representan la fuerza sobre la cuenta en los puntos Ⓐ, Ⓑ y Ⓒ.

Robin Smith / Getty Images

Los pasajeros de una "montaña rusa" de tirabuzón experimentan una fuerza radial hacia el centro de la vía circular y una fuerza tangencial debida a la gravedad.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 6.7 Mantenga la mirada en la pelota

Una pequeña esfera de masa m está unida al extremo de una cuerda de longitud R y puesta en movimiento en un círculo *vertical* alrededor de un punto fijo O, como se ilustra en la figura 6.10a. Determine la tensión de la cuerda en cualquier instante cuando la rapidez de la esfera sea v y la cuerda forme un ángulo θ con la vertical.

Solución A diferencia de la situación del ejemplo 6.6, la rapidez *no es* uniforme en este ejemplo porque, en casi todos los puntos a lo largo de la trayectoria, aparece un componente tangencial de aceleración de la fuerza gravitacional ejercida sobre la esfera. Del diagrama de cuerpo libre de la figura 6.10a, vemos que las únicas fuerzas que actúan sobre la esfera son la fuerza gravitacional $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$ ejercida por la Tierra y la fuerza $\mathbf{T}$ ejercida por la cuerda. Ahora descomponemos $\mathbf{F}_g$ en un componente tangencial $mg \operatorname{sen}\theta$ y un componente radial $mg \cos\theta$. Al aplicar la segunda ley de Newton a las fuerzas que actúan sobre la esfera en la dirección tangencial tendremos

$$\sum F_t = mg \operatorname{sen}\theta = ma_t$$

$$a_t = g \operatorname{sen}\theta$$

Este componente tangencial de la aceleración ocasiona que v cambie en el tiempo porque $a_t = dv/dt$.

Al aplicar la segunda ley de Newton a las fuerzas que actúan sobre la esfera en la dirección radial y observar que tanto $\mathbf{T}$ como $\mathbf{a}_r$ están dirigidas hacia O, obtenemos

$$\sum F_r = T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$T = m\left(\frac{v^2}{R} + g\cos\theta\right)$$

¿Qué pasaría si? **¿Qué pasaría si ponemos la pelota en movimiento con menos rapidez? (A) ¿Qué rapidez tendría la pelota cuando pasa sobre lo alto del círculo si la tensión de la cuerda se va a cero instantáneamente en este punto?**

Respuesta En lo alto de la trayectoria (figura 6.10b), donde $\theta = 180°$, tenemos $\cos 180° = -1$, y la ecuación de la tensión se convierte en

$$T_{\text{arriba}} = m\left(\frac{v^2_{\text{arriba}}}{R} - g\right)$$

Hagamos $T_{\text{arriba}} = 0$. Entonces

$$0 = m\left(\frac{v^2_{\text{arriba}}}{R} - g\right)$$

$$v_{\text{arriba}} = \sqrt{gR}$$

(B) ¿Qué pasaría si ponemos la pelota en un movimiento tal que la rapidez en lo alto es menor que este valor? ¿Qué ocurre?

Respuesta En este caso, la pelota nunca llega a lo alto del círculo. En algún punto en su ascenso, la tensión de la cuerda se va a cero y la pelota se convierte en proyectil. Sigue un segmento de una trayectoria parabólica sobre lo alto de su movimiento, que vuelve a unir la trayectoria circular sobre el otro lado cuando la tensión se convierte de nuevo en diferente de cero.

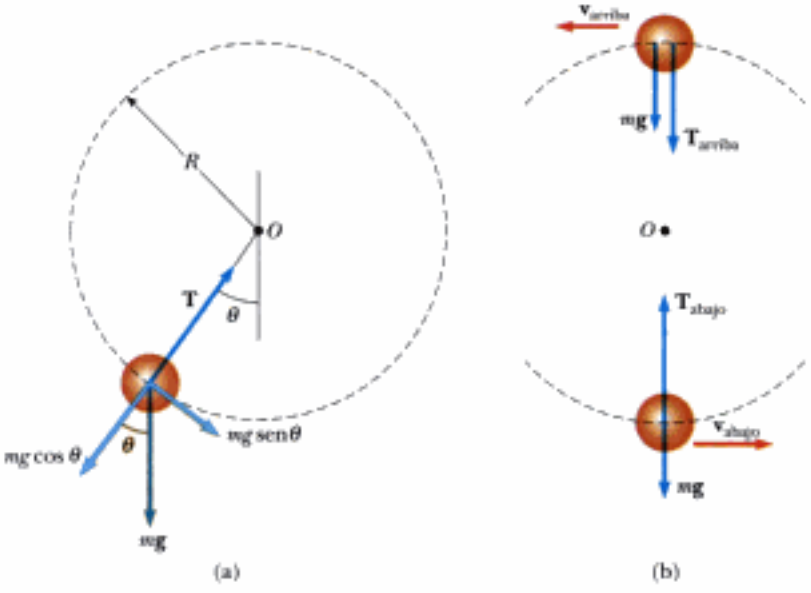


Figura 6.10 (a) Fuerzas que actúan sobre una esfera de masa m conectada a una cuerda de longitud R y que gira en un círculo vertical centrado en O. (b) Fuerzas que actúan sobre la esfera en la parte alta y baja del círculo. La tensión es máxima en la parte baja y mínima en la parte alta.

Materiał chroniony prawem autorskim

6.3 Movimiento en marcos acelerados

Cuando introdujimos las leyes de Newton en el capítulo 5, insistimos en que son válidas sólo cuando se hacen observaciones en un marco inercial de referencia. En esta sección analizamos la forma en que la segunda ley de Newton es aplicada por un observador en un marco no inercial de referencia, es decir, uno que está acelerando. Por ejemplo, recordemos el análisis de la mesa de aire para hockey a bordo de un tren que vimos en la sección 5.2. El tren que se mueve a velocidad constante representa un marco inercial. El disco en reposo permanece en reposo y se obedece la primera ley de Newton. El tren que acelera no es un marco inercial. Según un observador a bordo del tren parece no haber fuerza visible sobre el disco, pero éste acelera desde el reposo hacia la parte posterior del tren, violando así la primera ley de Newton.

Como observador en un tren que acelera, si usted aplica la segunda ley de Newton al disco cuando éste acelera hacia la parte posterior del tren, podría concluir que una fuerza ha actuado sobre el disco para hacer que acelere. A una fuerza aparente como ésta se da el nombre de **fuerza ficticia,** porque se debe a un marco de referencia acelerado. Recuerde que las fuerzas reales se deben siempre a interacciones entre dos objetos. Una fuerza ficticia parece actuar sobre un objeto en la misma forma que una fuerza real, pero no se puede identificar un segundo objeto para una fuerza ficticia.

El ejemplo del tren describe una fuerza ficticia debida a un cambio en la rapidez del tren. Otra fuerza ficticia se debe al cambio en la *dirección* del vector velocidad. Para comprender el movimiento de un sistema que es no inercial debido a un cambio en dirección, considere un auto que corre a lo largo de una carretera a alta velocidad y se aproxima a una rampa curva de salida, como se ve en la figura 6.11a. Cuando el auto toma la curva cerrada a la izquierda sobre la rampa, una persona sentada en el asiento del pasajero se desliza a la derecha hasta llegar a la puerta. En ese punto, la fuerza ejercida por la puerta sobre la pasajera evita que ella sea expulsada del auto. ¿Qué la hace moverse hacia la puerta? Una explicación popular pero incorrecta es que una fuerza que actúa hacia la derecha en la figura 6.11b la empuja hacia fuera. A veces esto recibe el nombre de "fuerza centrífuga," pero es una fuerza ficticia debida a la aceleración asociada con la dirección cambiante del vector velocidad del auto. (El conductor también experimenta este efecto, pero se sostiene del volante para evitar deslizarse a la derecha).

El fenómeno se explica en forma correcta como sigue: Antes que el auto entre a la rampa, la pasajera se mueve en una trayectoria recta. Cuando el auto entra a la rampa y toma una trayectoria curva, la pasajera tiende a moverse a lo largo de la trayectoria recta original, lo cual está de acuerdo con la primera ley de Newton: la tendencia natural de un objeto es continuar en movimiento en línea recta. No obstante, si una fuerza suficientemente grande (hacia el centro de la curvatura) actúa sobre la pasajera, como se ve en la figura 6.11c, ella se mueve en una trayectoria curva junto con el auto. Esta fuerza es la fuerza de fricción entre ella y el asiento del auto. Si esta fuerza de fricción no es suficientemente grande, la pasajera se desliza a la derecha cuando el auto y el asiento den vuelta a la izquierda. Por último ella topa con la puerta del auto, misma que da una fuerza suficiente para que siga la misma ruta curva del auto. La pasajera se desliza hacia la puerta no por efecto de una fuerza hacia fuera, sino porque **la fuerza de fricción no es suficiente para permitirle moverse a lo largo de la trayectoria circular seguida por el auto.**

Otra interesante fuerza ficticia es la "fuerza de Coriolis". Ésta es una fuerza aparente causada por el cambio de la posición radial de un objeto en un sistema giratorio de coordenadas. Por ejemplo, suponga que usted y un amigo están en lados opuestos de una plataforma circular giratoria y usted lanza una pelota de béisbol a su amigo. Como se ve en la figura 6.12a, en $t = 0$ usted lanza la pelota hacia su amigo, pero para el tiempo t_f cuando la pelota ha cruzado la plataforma, su amigo ha pasado a una nueva posición.

La figura 6.12a representa lo que un observador vería si la pelota se ve mientras el observador está en reposo desde arriba de la plataforma giratoria. Según este observador, que está en un marco inercial, la pelota sigue una trayectoria recta, como debe ser según la primera ley de Newton. Ahora, sin embargo, considere la situación desde el punto de vista de su amigo. Él está en un marco no inercial de referencia porque está experimentando una aceleración centrípeta relativa al marco inercial de la superficie de la Tierra. Él empieza viendo que la pelota de béisbol va hacia él, pero cuando la pelota cruza la plataforma, vira a un lado, como se ve en la figura 6.12b. Así, su amigo sobre la plataforma giratoria dice que

(a)

(b)

(c)

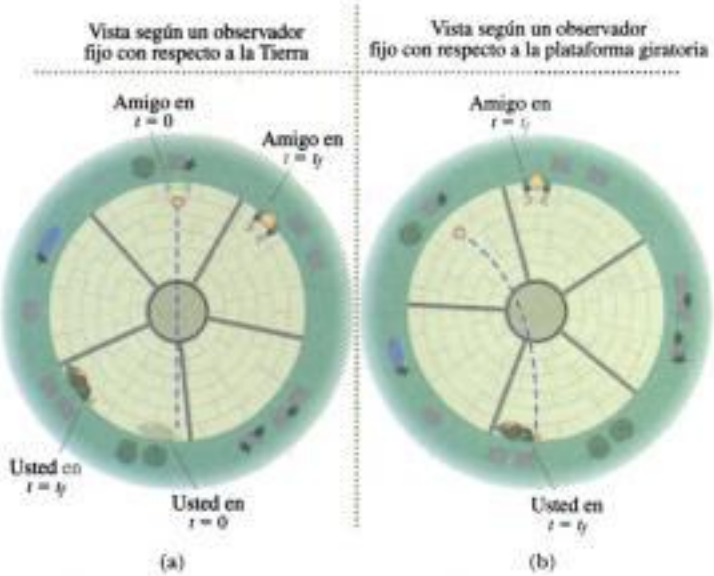
Figura 6.11 (a) Un auto se aproxima a una rampa curva de salida. ¿Qué hace que la pasajera del asiento delantero se mueva hacia la puerta derecha? (b) Desde el marco de referencia de la pasajera, parece que una fuerza la empuja hacia la puerta derecha, pero ésta es una fuerza ficticia. (c) En relación al marco de referencia de la Tierra, el asiento del auto aplica a la pasajera una fuerza a la izquierda, causando que ella cambie su dirección junto con el resto del auto.

Materiał chroniony prawem autorskim

¡ADVERTENCIA!

6.2 Fuerza centrífuga

La frase comúnmente escuchada de "fuerza centrífuga", se describe como una fuerza que tira *hacia fuera* sobre un objeto que se mueva en una trayectoria circular. Si una persona siente una "fuerza centrífuga" en un juego mecánico giratorio de carnaval, ¿cuál es el otro objeto con el que interactúa? No se puede identificar otro objeto porque ésta es una fuerza ficticia que se presenta como resultado de que la persona está en un marco no inercial de referencia.



En el vínculo* Active Figures *en* http://www.pse6.com, *usted podrá observar la trayectoria de la pelota simultáneamente desde el marco de referencia de un observador inercial y desde el marco de referencia de la mesa giratoria.

Figura activa 6.12 (a) Usted y un amigo se sientan en el borde de una mesa giratoria. En esta vista desde arriba observada por alguien en un marco inercial de referencia unido a la Tierra, usted lanza la pelota en $t = 0$ en la dirección de su amigo. Para el tiempo t_f en que la pelota llega al otro lado de la mesa, su amigo ya no está ahí para atraparla. Según este observador, la pelota siguió una trayectoria recta, consistente con las leyes de Newton. (b) Desde el punto de vista de su amigo, la pelota vira a un lado durante su desplazamiento. Su amigo introduce una fuerza ficticia para causar esta desviación desde la trayectoria esperada. Esta fuerza ficticia se denomina "fuerza de Coriolis".

la pelota no obedece la primera ley de Newton y que una fuerza está haciendo que la pelota siga una trayectoria curva. Esta fuerza ficticia se denomina fuerza de Coriolis.

Las fuerzas ficticias pueden no ser fuerzas reales, pero pueden tener efectos reales. Un objeto colocado sobre el tablero de un auto *realmente* se desliza si usted pisa el acelerador del auto. Cuando una persona sube a una rueda de la fortuna, se siente empujada hacia el exterior como si se debiera a una "fuerza centrífuga" ficticia. Es probable que la persona caiga y se lesione si camina a lo largo de una línea radial cuando gire la rueda de la fortuna. La fuerza de Coriolis debida a la rotación de la Tierra, ocasiona las rotaciones de huracanes y de corrientes oceánicas de gran escala.

Pregunta rápida 6.6 Considere la pasajera del auto que da vuelta a la izquierda en la figura 6.11. ¿Cuál de lo siguiente es correcto acerca de fuerzas en la dirección horizontal si la persona hace contacto con la puerta derecha? (a) La pasajera está en equilibrio entre fuerzas reales que actúan a la derecha y fuerzas reales que actúan a la izquierda. (b) La pasajera está sujeta sólo a fuerzas reales que actúan a la derecha. (c) La pasajera está sujeta sólo a fuerzas reales que actúan a la izquierda. (d) Nada de esto es cierto.

Ejemplo 6.8 Fuerzas ficticias en movimiento lineal

Una pequeña esfera de masa m se cuelga de una cuerda del techo de un furgón de ferrocarril que está acelerando a la derecha, como se muestra en la figura 6.13. El observador no inercial de la figura 6.13b dice que una fuerza, que sabemos es ficticia, debe actuar para causar la desviación observada de la cuerda a partir de la vertical. ¿Cómo está relacionada la magnitud de esta fuerza a la aceleración del furgón medida por la observadora inercial de la figura 6.13a?

Solución Según la observadora inercial en reposo (figura 6.13a), las fuerzas sobre la esfera son la fuerza **T** ejercida por la cuerda y la fuerza gravitacional. La observadora inercial concluye que la aceleración de la esfera es la misma que la del furgón, y que esta aceleración es proporcionada por la componente horizontal de **T**. Del mismo modo, la componente vertical de **T** equilibra la fuerza gravitacional porque la esfera está en equilibrio en la dirección vertical. Por lo tanto, ella escribe la segun-

Materiał chroniony prawem autorskim

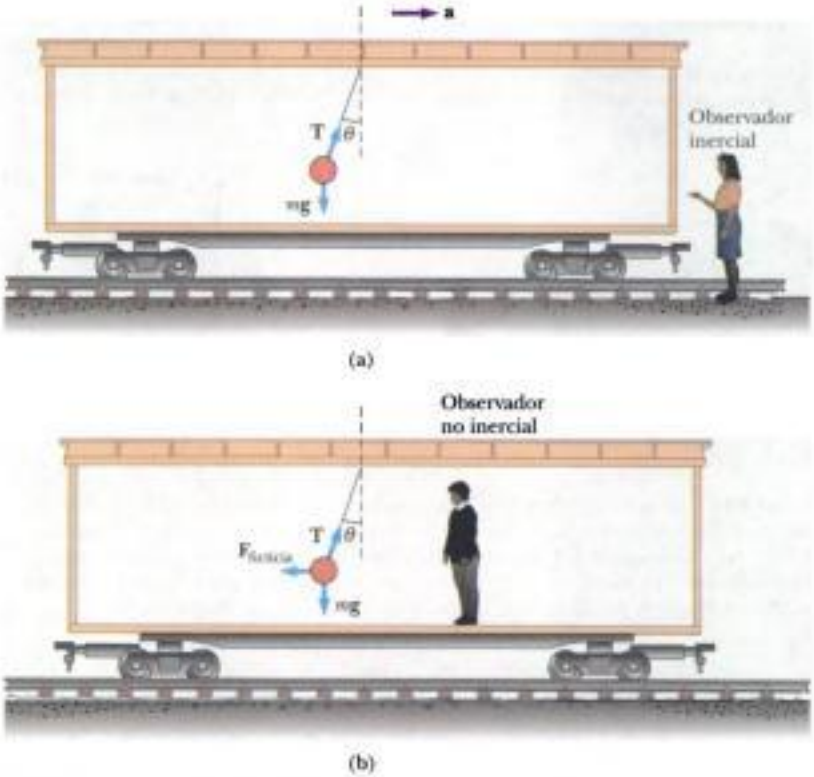


Figura 6.13 (Ejemplo 6.8) Una pequeña esfera, suspendida del techo de un furgón que acelera a la derecha, se desvía a la izquierda como se ilustra. (a) Una observadora inercial en reposo fuera del furgón, dice que la aceleración de la esfera es proporcionada por la componente horizontal de **T**. (b) Un observador no inercial que viaja en el furgón, dice que la fuerza neta sobre la esfera es cero y que la desviación de la cuerda, desde la vertical, se debe a una fuerza ficticia $\mathbf{F}_{\text{ficticia}}$ que equilibra la componente horizontal de **T**.

da ley de Newton como $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$, que en forma de componentes se convierte en

$$\text{Observadora inercial}\begin{cases} (1) & \sum F_x = T \operatorname{sen}\theta = ma \\ (2) & \sum F_y = T\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

Según el observador no inercial que viaja en el furgón (figura 6.13b), la cuerda también forma un ángulo θ con la vertical; no obstante, para él la esfera está en reposo y por ello su aceleración es cero. Por lo tanto, él introduce una fuerza ficticia en la dirección horizontal para equilibrar la componente horizontal de **T** y dice que la fuerza neta sobre la esfera es *cero*. En este marco no inercial de referencia, la segunda ley de Newton en forma de componente da

$$\text{Observador no inercial}\begin{cases} \sum F'_x = T\operatorname{sen}\theta - F_{\text{ficticia}} = 0 \\ \sum F'_y = T\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

Vemos que estas expresiones son equivalentes a (1) y (2) si $F_{\text{ficticia}} = ma$, donde a es la aceleración según el observador inercial. Si fuéramos a hacer esta sustitución en la ecuación por F'_y, el observador no inercial obtiene los mismos resultados matemáticos que la observadora inercial, pero la interpretación física de la desviación de la cuerda difiere en los dos marcos de referencia.

¿Qué pasaría si? Suponga que la observadora inercial desea medir la aceleración del tren por medio del péndulo (la esfera que cuelga de la cuerda). ¿Cómo podría ella hacer esto?

Respuesta Nuestra intuición nos dice que el ángulo θ que la cuerda forma con la vertical debe aumentar cuando aumenta la aceleración. Al despejar a simultáneamente de (1) y (2), la observadora inercial puede determinar la magnitud de la aceleración del furgón al medir el ángulo θ y usar la relación $a = g \tan\theta$. Como la desviación de la cuerda desde la vertical sirve como una medida de aceleración, *un péndulo simple se puede usar como acelerómetro.*

Ejemplo 6.9 Fuerza ficticia en un sistema en rotación

Suponga que un bloque de masa m que se encuentra sobre una mesa horizontal y sin fricción está conectado a una cuerda unida al centro de la mesa, como se ve en la figura 6.14. ¿Cómo escribiría cada uno de los observadores la segunda ley de Newton para el bloque?

Solución Según un observador inercial (figura 6.14a), si el bloque gira uniformemente, experimenta una aceleración de magnitud v^2/r, donde v es su rapidez lineal.

El observador inercial concluye que esta aceleración centrípeta es proporcionada por la fuerza **T** que se ejerce

Materiał chroniony prawem autorskim

por la cuerda y escribe la segunda ley de Newton como $T = mv^2/r$.

Según una observadora no inercial unida a la mesa (figura 6.14b), el bloque está en reposo y su aceleración es cero. Por lo tanto, ella debe introducir una fuerza ficticia hacia fuera, de magnitud mv^2/r, para equilibrar la fuerza hacia dentro ejercida por la cuerda. Para ella, la fuerza neta sobre el bloque es cero, y ella escriba la segunda ley de Newton como $T - mv^2/r = 0$.

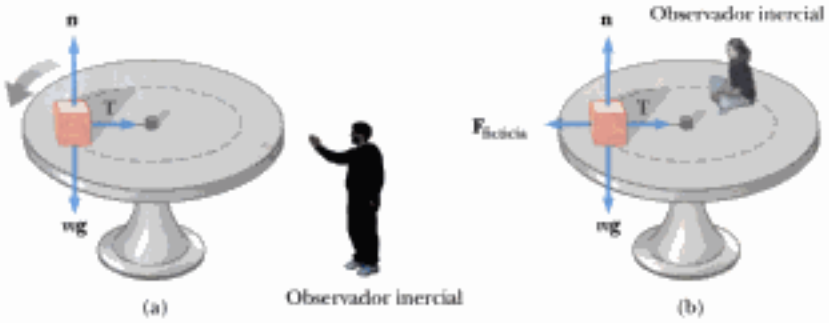


Figura 6.14 (Ejemplo 6.9) Bloque de masa m conectado a una cuerda atada al centro de una mesa giratoria. (a) El observador inercial dice que la fuerza que causa el movimiento circular es proporcionada por la fuerza **T** ejercida por la cuerda sobre el bloque. (b) La observadora no inercial dice que el bloque no está acelerando y, por lo tanto, ella introduce una fuerza ficticia de magnitud mv^2/r que actúa hacia fuera y equilibra la fuerza **T**.

6.4 Movimiento en presencia de fuerzas resistivas

En el capítulo precedente describimos la fuerza de fricción cinética sobre un objeto en movimiento sobre alguna superficie. Por completo hicimos caso omiso de cualquier interacción entre el objeto y el medio en el que se mueve. Ahora consideremos el efecto de ese medio, que puede ser un líquido o un gas. El medio ejerce una **fuerza resistiva R** sobre el objeto que se mueve en él. Algunos ejemplos son la resistencia del aire asociada con vehículos en movimiento (a veces llamada *resistencia al avance*) y las fuerzas viscosas que actúan sobre objetos que se mueven en un líquido. La magnitud de **R** depende de factores tales como la rapidez del objeto, y la dirección de **R** es siempre opuesta a la dirección de movimiento del objeto con respecto al medio. Además, la magnitud de **R** casi siempre aumenta con una rapidez creciente.

La magnitud de la fuerza resistiva puede depender de la rapidez en una forma compleja, y aquí consideramos sólo dos situaciones. En la primera situación, suponemos que la fuerza resistiva es proporcional a la rapidez del objeto en movimiento; esta suposición es válida para objetos que caen lentamente en un líquido y para objetos muy pequeños, por ejemplo partículas de polvo que se mueven en el aire. En la segunda situación, suponemos una fuerza resistiva que es proporcional al cuadrado de la rapidez del objeto en movimiento; objetos grandes, por ejemplo un paracaidista que se mueve en el aire en caída libre, experimentan esta fuerza.

Fuerza resistiva proporcional a la rapidez de un objeto

Si suponemos que la fuerza resistiva que actúa sobre un objeto que se mueve en un líquido o gas es proporcional a la rapidez del objeto, entonces la fuerza resistiva se puede expresar como

$$\mathbf{R} = -b\mathbf{v} \tag{6.2}$$

donde **v** es la velocidad del objeto y b es una constante cuyo valor depende de las propiedades del medio y de la forma y dimensiones del objeto. Si el objeto es una esfera de radio r, entonces b es proporcional a r. El signo negativo indica que **R** va en la dirección opuesta a **v**.

Considere una pequeña esfera de masa m que se suelta desde el reposo en un líquido, como se ve en la figura 6.15a. Si se supone que las únicas fuerzas que actúan sobre la esfera

Materiał chroniony prawem autorskim

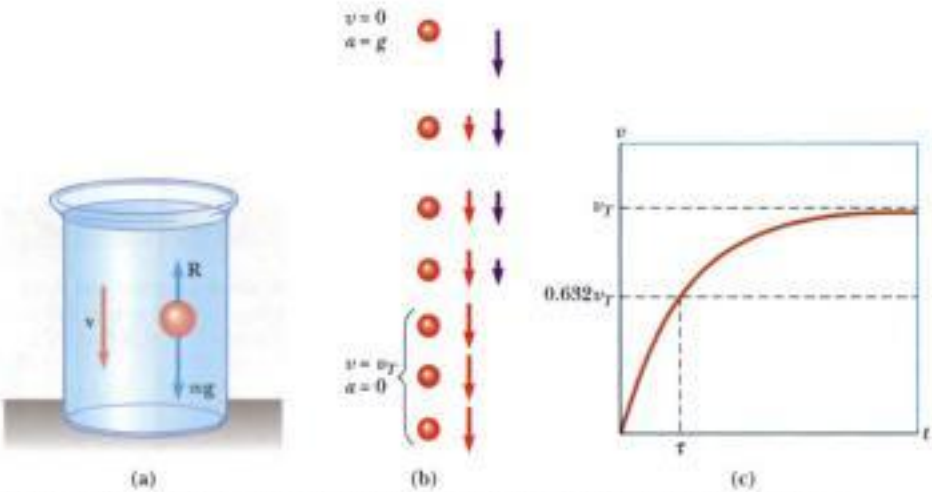


Figura activa 6.15 (a) Pequeña esfera que cae en un líquido. (b) Diagrama de movimiento de la esfera cuando cae. (c) Gráfica de rapidez-tiempo para la esfera. La esfera alcanza una rapidez máxima (o terminal) v_T, y la constante de tiempo t es el intervalo durante el cual alcanza una rapidez de $0.632v_T$.

En el vínculo* Active Figures *en* http://www.pse6.com, *usted podrá variar el tamaño y masa de la esfera y la viscosidad (resistencia al flujo) del medio circundante, luego observar los efectos sobre el movimiento de la esfera y su gráfica de rapidez-tiempo.

son la fuerza resistiva $\mathbf{R} = -b\mathbf{v}$ y la fuerza gravitacional $\mathbf{F}_g$, describamos su movimiento.[1] Al aplicar la segunda ley de Newton al movimiento vertical, eligiendo la dirección hacia abajo como positiva y observar que $\Sigma F_y = mg - bv$, obtenemos

$$mg - bv = ma = m\frac{dv}{dt} \tag{6.3}$$

donde la aceleración dv/dt es hacia abajo. Al despejar la aceleración de esta expresión, tendremos

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v \tag{6.4}$$

Esta ecuación se llama *ecuación diferencial*, y los métodos de resolverla pueden no ser familiares al estudiante. No obstante, nótese que inicialmente, cuando $v = 0$, la magnitud de la fuerza resistiva bv es también cero, y la aceleración dv/dt es simplemente g. Cuando t aumenta, la magnitud de la fuerza resistiva aumenta y la aceleración disminuye. La aceleración se aproxima a cero cuando la magnitud de la fuerza resistiva se aproxima al peso de la esfera. En esta situación, la rapidez de la esfera se aproxima a su **rapidez terminal** v_T. En realidad, la esfera sólo *se aproxima* a la rapidez terminal pero nunca *alcanza* la rapidez terminal.

Rapidez terminal

Podemos obtener la rapidez terminal de la ecuación 6.3 al hacer $a = dv/dt = 0$. Esto da

$$mg - bv_T = 0 \qquad \text{o} \qquad v_T = \frac{mg}{b}$$

La expresión para v que satisface la ecuación 6.4 con $v = 0$ en $t = 0$ es

$$v = \frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m}) = v_T(1 - e^{-t/\tau}) \tag{6.5}$$

Esta función está graficada en la figura 6.15c. El símbolo e representa la base del logaritmo natural, y también se llama *número de Euler*: $e = 2.718\,28$. La **constante de tiempo** $\tau = m/b$ (letra griega tau) es el tiempo en el que la esfera que se suelta desde el reposo alcanza 63.2% de su rapidez terminal. Esto se puede ver al notar que cuando $t = \tau$, la ecuación 6.5 da $v = 0.632v_T$.

Podemos verificar que la ecuación 6.5 es una solución a la ecuación 6.4 por diferenciación directa:

[1] También hay una *fuerza de sustentación* que actúa sobre el objeto sumergido. Esta fuerza es constante, y su magnitud es igual al peso del líquido desplazado. Esta fuerza cambia el peso aparente de la esfera por un factor constante, de modo que aquí pasaremos por alto esta fuerza. En el capítulo 14 trataremos las fuerzas de sustentación.

Materiał chroniony prawem autorskim

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mg}{b} - \frac{mg}{b}e^{-bt/m}\right) = -\frac{mg}{b}\frac{d}{dt}e^{-bt/m} = ge^{-bt/m}$$

(Vea la tabla B.4 del apéndice para la derivada de e elevada a alguna potencia.) La sustitución, en la ecuación 6.4, de esta expresión por dv/dt y la expresión para v por la ecuación 6.5 muestra que nuestra solución satisface la ecuación diferencial.

Ejemplo 6.10 Esfera que cae en aceite

Una pequeña esfera de masa 2.00 g se suelta desde el reposo en un recipiente grande lleno de aceite, donde experimenta una fuerza resistiva proporcional a su rapidez. La esfera alcanza una rapidez terminal de 5.00 cm/s. Determine la constante de tiempo τ y el tiempo en el que la esfera alcanza 90.0% de su rapidez terminal.

Solución Como la rapidez terminal está dada por $v_T = mg/b$, el coeficiente b es

$$b = \frac{mg}{v_T} = \frac{(2.00\text{ g})(980\text{ cm/s}^2)}{5.00\text{ cm/s}} = 392\text{ g/s}$$

Por lo tanto, la constante de tiempo τ es

$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{2.00\text{ g}}{392\text{ g/s}} = \mathbf{5.10 \times 10^{-3}\text{ s}}$$

La rapidez de la esfera como función del tiempo está dada por la ecuación 6.5. Para hallar el tiempo t en el que la esfera alcanza una rapidez de $0.900v_T$, hacemos $v = 0.900v_T$ en la ecuación 6.5 y despejamos t:

$$0.900v_T = v_T(1 - e^{-t/\tau})$$

$$1 - e^{-t/\tau} = 0.900$$

$$e^{-t/\tau} = 0.100$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln(0.100) = -2.30$$

$$t = 2.30\tau = 2.30(5.10 \times 10^{-3}\text{ s})$$

$$= 11.7 \times 10^{-3}\text{ s} = \mathbf{11.7\text{ ms}}$$

Por lo tanto, la esfera alcanza 90.0% de su rapidez terminal en un intervalo de tiempo muy corto

Resistencia al avance a alta rapidez

Para objetos que se mueven a alta rapidez en el aire, por ejemplo aviones, paracaidistas, autos y pelotas de béisbol, la fuerza resistiva es aproximadamente proporcional al cuadrado de la rapidez. En estas situaciones, la magnitud de la fuerza resistiva se puede expresar como

$$R = \tfrac{1}{2}D\rho A v^2 \tag{6.6}$$

donde ρ es la densidad del aire, A es el área de sección del objeto en movimiento medida en un plano perpendicular a su velocidad, y D es una cantidad empírica sin dimensiones llamada *coeficiente de resistencia al avance*. El coeficiente de resistencia al avance tiene un valor de alrededor de 0.5 para objetos esféricos, pero puede tener un valor de hasta 2 para objetos de formas irregulares.

Analicemos el movimiento de un objeto en caída libre, sujeto a una fuerza resistiva del aire hacia arriba, de magnitud $R = \frac{1}{2}D\rho A v^2$. Supongamos que un objeto de masa m se suelta desde el reposo. Como se ve en la figura 6.16, el objeto experimenta dos fuerzas externas:[2] la fuerza gravitacional hacia abajo $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$ y la fuerza resistiva $\mathbf{R}$ hacia arriba. En consecuencia, la magnitud de la fuerza neta es

$$\sum F = mg - \tfrac{1}{2}D\rho A v^2 \tag{6.7}$$

donde hemos tomado hacia abajo como la dirección vertical positiva. Si combinamos $\Sigma F = ma$ con la ecuación 6.7, encontramos que el objeto tiene una aceleración hacia abajo de magnitud

$$a = g - \left(\frac{D\rho A}{2m}\right)v^2 \tag{6.8}$$

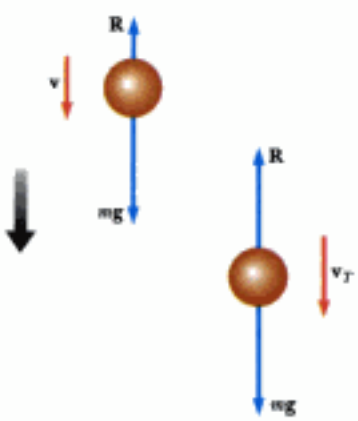


Figura 6.16 Un objeto que cae en el aire experimenta una fuerza resistiva $\mathbf{R}$ y una fuerza gravitacional $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$. El objeto alcanza su rapidez terminal (a la derecha) cuando la fuerza neta que actúa sobre él es cero, es decir, cuando $\mathbf{R} = -\mathbf{F}_g$ o $R = mg$. Antes que esto ocurra, la aceleración varía con la rapidez según la ecuación 6.8.

Podemos calcular la rapidez terminal v_T si usamos el hecho de que cuando la fuerza gravitacional queda equilibrada por la fuerza resistiva, la fuerza neta sobre el objeto es cero y, por lo tanto, su aceleración es cero. Si hacemos $a = 0$ en la ecuación 6.8 tendremos

$$g - \left(\frac{D\rho A}{2m}\right)v_T^2 = 0$$

[2] También hay una fuerza de sustentación hacia arriba que despreciamos.

Materiał chroniony prawem autorskim

Tabla 6.1

Rapidez terminal para varios objetos que caen en aire

Objeto	Masa (kg)	Área de sección transversal (m^2)	v_T (m/s)
Paracaidista	75	0.70	60
Pelota de béisbol (radio 3.7 cm)	0.145	4.2×10^{-3}	43
Pelota de golf (radio 2.1 cm)	0.046	1.4×10^{-3}	44
Granizo (radio 0.50 cm)	4.8×10^{-4}	7.9×10^{-5}	14
Gota de lluvia (radio 0.20 cm)	3.4×10^{-5}	1.3×10^{-5}	9.0

de modo que

$$v_T = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}} \tag{6.9}$$

Con el uso de esta expresión, podemos determinar la forma en que la rapidez terminal depende de las dimensiones del objeto. Suponga que el objeto es una esfera de radio r. En este caso, $A \propto r^2$ (de $A = \pi r^2$) y $m \propto r^3$ (porque la masa es proporcional al volumen de la esfera, que es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Por lo tanto, $v_T \propto \sqrt{r}$.

La tabla 6.1 es una lista de valores de rapidez terminal para varios objetos que caen en aire.

Pregunta rápida 6.7 Una pelota de béisbol y un balón de baloncesto, que tienen la misma masa, se dejan caer en el aire desde el reposo, en forma tal que la parte inferior de ambas están a la misma altura sobre el suelo, del orden de 1 m o más. ¿Cuál de ellas llega primero al suelo? (a) la de béisbol (b) la de baloncesto (c) ambas llegan al suelo al mismo tiempo.

Ejemplo conceptual 6.11 La paracaidista

Considere una paracaidista (figura 6.17) que, cuando salta de un avión con sus pies unidos firmemente a su tabla de *surf*, hace algunas acrobacias y luego abre su paracaídas. Describa las fuerzas que actúan sobre ella durante estas maniobras.

Solución Cuando la paracaidista da sus primeros pasos fuera del avión, no tiene velocidad vertical. La fuerza gravitacional hacia abajo hace que ella acelere hacia el suelo. A medida que aumenta su rapidez hacia abajo, también aumenta la fuerza resistiva hacia arriba ejercida por el aire sobre su cuerpo y la tabla. Esta fuerza hacia arriba reduce la aceleración de ella y su tabla, por lo que su rapidez aumenta con más lentitud. Por último, van tan rápido que la fuerza resistiva hacia arriba es igual a la fuerza gravitacional hacia abajo. Ahora la fuerza neta es cero y ya no aceleran, pero alcanzan su rapidez terminal. En algún punto después de alcanzar la rapidez terminal, ella abre su paracaídas y resulta un drástico aumento en la fuerza resistiva hacia arriba. La fuerza neta (y por lo tanto la aceleración) es ahora hacia arriba, en la dirección opuesta a la dirección de la velocidad. Esto ocasiona que la velocidad hacia abajo disminuya rápidamente, lo cual significa que la fuerza resistiva sobre el paracaídas también disminuya. A final de cuentas, la fuerza resistiva hacia arriba y la fuerza gravitacional hacia abajo se equilibran entre sí y se alcanza una rapidez terminal mucho menor, que permite un aterrizaje seguro.

(Contrario a la creencia popular, el vector velocidad de un paracaidista nunca apunta hacia abajo. Es posible que el lector haya visto una videocinta en la que un paracaidista parece ser "lanzado" hacia arriba una vez que se abre el paracaídas. En efecto, lo que ocurre es que el paracaidista reduce su velocidad mientras que la persona que sostiene la cámara continúa cayendo con alta rapidez)

Jump Film Productions / Getty Images

Figura 6.17 (Ejemplo conceptual 6.11) Una paracaidista.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 6.12 Filtros de café que caen

La dependencia de la fuerza resistiva con la rapidez es una relación empírica. En otras palabras, está basada en la observación en lugar de un modelo teórico. Imagine un experimento en el que dejamos caer varios filtros de café puestos uno sobre otro y les medimos su rapidez terminal. La tabla 6.2 presenta datos para estos filtros de café cuando caen en el aire. La constante de tiempo τ es pequeña, de modo que un filtro que se deje caer rápidamente alcanza su rapidez terminal. Cada filtro tiene una masa de 1.64 g. Cuando los filtros se juntan, se empalman en forma tal que el área de superficie frontal no aumenta. Determine la relación entre la fuerza resistiva ejercida por el aire y la rapidez de los filtros en caída. Los filtros de café plegados se pueden juntar para estudiar la fuerza de la resistencia del aire.

Solución En la rapidez terminal, la fuerza resistiva hacia arriba equilibra la fuerza gravitacional hacia abajo. Así, un filtro que caiga a su rapidez terminal experimenta una fuerza resistiva de

$$R = mg = (1.64\ \text{g})\left(\frac{1\ \text{kg}}{100\ 0\ \text{g}}\right)(9.80\ \text{m/s}^2) = 0.016\ 1\ \text{N}$$

Dos filtros juntos experimentan 0.032 2 N de fuerza resistiva, y así sucesivamente. En la figura 6.18 se muestra una gráfica de la fuerza resistiva sobre los filtros como función de la rapidez terminal. Una recta no ajustaría bien, indicando que la fuerza resistiva *no es* proporcional a la rapidez. El comportamiento se ve con más claridad en la figura 6.18b, en la que la fuerza resistiva está graficada como función del cuadrado de la rapidez terminal. Esto indica una proporcionalidad de la fuerza resistiva con el *cuadrado* de la rapidez, como lo sugiere la ecuación 6.6.

Los filtros de café plegados se pueden juntar para estudiar la fuerza de la resistencia del aire.

Tabla 6.2

Rapidez terminal para filtros de café apilados

Número de filtros	v_T (m/s)*
1	1.01
2	1.40
3	1.63
4	2.00
5	2.25
6	2.40
7	2.57
8	2.80
9	3.05
10	3.22

* Todos los valores de v_T son aproximados.

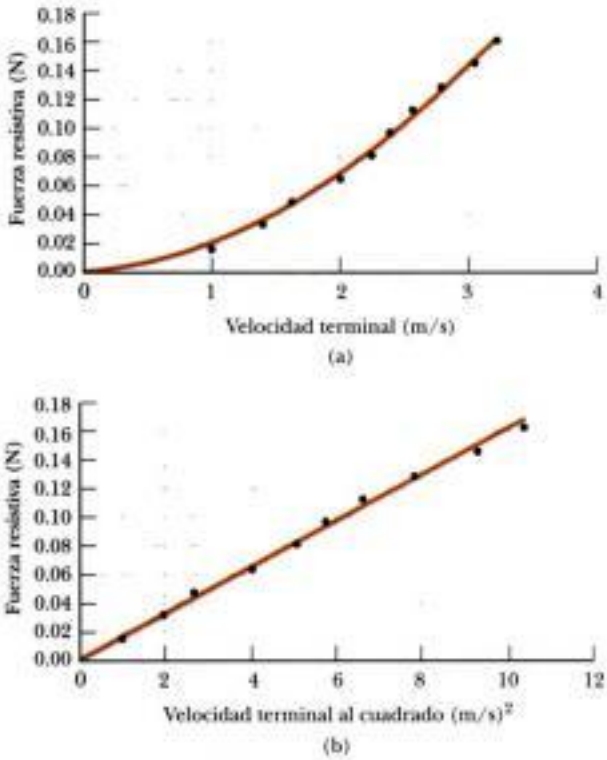


Figura 6.18 (Ejemplo 6.12) (a) Relación entre la fuerza resistiva que actúa sobre filtros de café que caen y su rapidez terminal. La línea curva es un ajuste polinomial de segundo orden. (b) Gráfica que relaciona la fuerza resistiva con el cuadrado de la rapidez terminal. El ajuste de la recta a los puntos de datos indica que la fuerza resistiva es proporcional al cuadrado de la rapidez terminal. ¿Puede el lector encontrar la constante de proporcionalidad?

Ejemplo 6.13 Fuerza resistiva ejercida sobre una pelota de béisbol

Un *pitcher* lanza una pelota de béisbol de 0.145 kg a 40.2 m/s (= 90 mi/h) por delante de un bateador. Encuentre la fuerza resistiva que actúa sobre la pelota a esta rapidez.

Solución No esperamos que el aire ejerza una fuerza enorme sobre la pelota, y por eso la fuerza resistiva que calculamos con la ecuación 6.6 no debe ser más de unos pocos newtons.

Materiał chroniony prawem autorskim

Primero, debemos determinar el coeficiente de resistencia al avance D. Hacemos esto si imaginamos soltar la pelota y dejamos que alcance su rapidez terminal. De la ecuación 6.9 despejamos D y sustituimos los valores apropiados por m, v_T y A de la tabla 6.1. Si consideramos la densidad del aire como 1.20 kg/m^3, obtenemos

$$D = \frac{2mg}{v_T{}^2 \rho A} = \frac{2(0.145\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)}{(43\ \text{m/s})^2(1.20\ \text{kg/m}^3)(4.2 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)}$$
$$= 0.305$$

Este número no tiene dimensiones. Hemos mantenido un dígito extra además de los dos que son significativos y lo eliminamos al final de nuestro cálculo.

Ahora podemos usar este valor para D en la ecuación 6.6 para hallar la magnitud de la fuerza resistiva:

$$R = \tfrac{1}{2} D\rho A v^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(0.305)(1.20\ \text{kg/m}^3)(4.2 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)(40.2\ \text{m/s})^2$$
$$= \mathbf{1.2\ N}$$

6.5 Modelación numérica en dinámica de partículas[3]

Como hemos visto en este capítulo y en el precedente, el estudio de la dinámica de una partícula se concentra en describir la posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo. Existen relaciones de causa y efecto entre estas cantidades: la velocidad hace que la posición cambie, la aceleración hace que la velocidad cambie. Como la aceleración es resultado directo de fuerzas aplicadas, cualquier análisis de la dinámica de una partícula suele empezar con una evaluación de la fuerza neta que actúa sobre la partícula.

Hasta ahora, hemos usado lo que se llama *método analítico* para investigar la posición, velocidad y aceleración de una partícula en movimiento. Este método comprende la identificación de expresiones funcionales de buen comportamiento para la posición de una partícula (por ejemplo, las ecuaciones cinemáticas del capítulo 2), generadas de manipulaciones de álgebra o las técnicas de cálculo. Repasemos brevemente este método antes de aprender una segunda forma de abordar problemas en dinámica. (Dado que en esta sección confinamos nuestro análisis al movimiento en una dimensión, no se usará notación de letras en negrita para cantidades vectoriales).

Si una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de una fuerza neta ΣF, la segunda ley de Newton nos dice que la aceleración de la partícula es $a = \Sigma F/m$. En general, aplicamos el método analítico a un problema de dinámica usando el siguiente procedimiento:

1. Sumar todas las fuerzas que actúen sobre la partícula para hallar la fuerza neta ΣF.
2. Usar esta fuerza neta para determinar la aceleración con la relación $a = \Sigma F/m$.
3. Usar esta aceleración para determinar la velocidad con la relación $dv/dt = a$.
4. Usar esta velocidad para determinar la posición con la relación $dx/dt = v$.

El siguiente ejemplo sencillo ilustra este método.

Ejemplo 6.14 Un objeto en caída en un vacío; método analítico

Considere una partícula que cae en un vacío bajo la influencia de la fuerza gravitacional, como se ve en la figura 6.19. Use el método analítico para hallar la aceleración, velocidad y posición de la partícula.

Solución La única fuerza que actúa sobre la partícula es la fuerza gravitacional hacia abajo, de magnitud F_g, que es también la fuerza neta. Al aplicar la segunda ley de Newton, se establece la fuerza neta que actúa sobre la partícula igual a la masa de la partícula por su aceleración (tomando hacia arriba como la dirección y positiva):

$$F_g = ma_y = -mg$$

Figura 6.19 (Ejemplo 6.14) Un objeto en caída en el vacío bajo la influencia de la gravedad.

[3] Los autores agradecen al coronel James Head, de la Academia de la Fuerza Aérea de Estados Unidos, por escribir esta sección.

Materiał chroniony prawem autorskim

Por lo tanto, $a_y = -g$, lo cual significa que la aceleración es constante. Como $dv_y/dt = a_y$, vemos que $dv_y/dt = -g$, que se puede integrar para obtener

$$v_y(t) = v_{yi} - gt$$

Entonces, como $v_y = dy/dt$, la posición de la partícula se obtiene de otra integración, que da el bien conocido resultado de

$$y(t) = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$$

En estas expresiones, y_i y v_{yi} representan la posición y rapidez de la partícula en $t_i = 0$.

El método analítico es fácil para muchas situaciones físicas. En el "mundo real," sin embargo, con frecuencia aparecen complicaciones que hacen difíciles las soluciones analíticas y quizá estén fuera del alcance de la capacidad matemática de muchos estudiantes que toman un curso de introducción a la física. Por ejemplo, la fuerza neta que actúa sobre una partícula puede depender de la posición de la partícula, como en casos donde la aceleración gravitacional varía con la altura. O la fuerza puede variar con la velocidad, como en casos de fuerza resistiva causada por el movimiento en un líquido o gas.

Otras complicaciones surgen porque las expresiones que relacionan la aceleración, velocidad, posición y tiempo son ecuaciones diferenciales en lugar de algebraicas. Las ecuaciones diferenciales suelen resolverse con el uso de cálculo integral y otras técnicas especiales que estudiantes de cursos de introducción pueden no dominar.

Cuando aparecen estas situaciones, es frecuente que los científicos usen un procedimiento llamado *modelado numérico* para estudiar el movimiento. El modelo numérico más sencillo se llama método de Euler, en honor al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783).

El método de Euler

En el **método de Euler** para resolver ecuaciones diferenciales, las derivadas se aproximan como razones entre diferencias finitas. Si consideramos un pequeño incremento de tiempo Δt, podemos aproximar la relación entre la rapidez de una partícula y la magnitud de su aceleración como

$$a(t) \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Entonces la rapidez $v(t + \Delta t)$ de la partícula al final del intervalo de tiempo Δt es aproximadamente igual a la rapidez $v(t)$ al principio del intervalo de tiempo, más la magnitud de la aceleración durante el intervalo multiplicado por Δt:

$$v(t + \Delta t) \approx v(t) + a(t)\,\Delta t \tag{6.10}$$

Debido a que la aceleración es una función de tiempo, esta estimación de $v(t + \Delta t)$ es precisa sólo si el intervalo de tiempo Δt es suficientemente corto para que el cambio en aceleración durante el intervalo sea muy pequeño (como ya dijimos antes). Por supuesto, la ecuación 6.10 es exacta si la aceleración es constante.

La posición $x(t + \Delta t)$ de la partícula al final del intervalo Δt se puede hallar en la misma forma:

$$v(t) \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + v(t)\,\Delta t \tag{6.11}$$

El estudiante puede estar tentado a sumar el término $\frac{1}{2}a(\Delta t)^2$ a este resultado, para hacerlo parecerse a la conocida ecuación de cinemática, pero este término no está incluido en el método de Euler, porque se supone que Δt es tan pequeño que $(\Delta t)^2$ es casi cero.

Si se conoce la aceleración en cualquier instante t, la velocidad y posición de la partícula en un tiempo $t + \Delta t$ se puede calcular de las ecuaciones 6.10 y 6.11. El cálculo entonces continúa en una serie de pasos finitos para determinar la velocidad y posición en cualquier

Materiał chroniony prawem autorskim

Tabla 6.3

Método de Euler para resolver problemas de dinámica

Paso	Tiempo	Posición	Velocidad	Aceleración
0	t_0	x_0	v_0	$a_0 = F(x_0, v_0, t_0)/m$
1	$t_1 = t_0 + \Delta t$	$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$	$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t$	$a_1 = F(x_1, v_1, t_1)/m$
2	$t_2 = t_1 + \Delta t$	$x_2 = x_1 + v_1 \Delta t$	$v_2 = v_1 + a_1 \Delta t$	$a_2 = F(x_2, v_2, t_2)/m$
3	$t_3 = t_2 + \Delta t$	$x_3 = x_2 + v_2 \Delta t$	$v_3 = v_2 + a_2 \Delta t$	$a_3 = F(x_3, v_3, t_3)/m$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	t_n	x_n	v_n	a_n

tiempo posterior. La aceleración se determina de la fuerza neta que actúa sobre la partícula, y esta fuerza puede depender de la posición, velocidad o tiempo:

$$a(x, v, t) = \frac{\sum F(x, v, t)}{m} \tag{6.12}$$

Es conveniente establecer la solución numérica a esta clase de problemas al numerar los pasos y escribir los cálculos en una tabla. La tabla 6.3 ilustra la forma de hacer esto de una manera ordenada. Se pueden tomar muchos incrementos pequeños, y por lo general se pueden obtener resultados precisos con ayuda de una computadora. Las ecuaciones que aparecen en la tabla se pueden escribir en una hoja de cálculo y los cálculos se pueden hacer fila por fila para determinar la velocidad, posición y aceleración como funciones del tiempo. Los cálculos también se pueden realizar usando un lenguaje de programación, o con paquetes de matemáticas que se pueden adquirir comercialmente. Las gráficas de velocidad contra tiempo o posición contra tiempo se pueden mostrar en pantalla para ayudar a visualizar el movimiento.

Una ventaja del método de Euler es que la dinámica no está oculta, sino que las relaciones fundamentales entre aceleración y fuerza, velocidad y aceleración, y posición y velocidad son claramente evidentes. De hecho, estas relaciones forman el corazón de los cálculos. No hay necesidad de usar matemáticas avanzadas, y la física básica gobierna la dinámica.

El método de Euler es confiable por completo para incrementos de tiempo infinitesimalmente pequeños, pero por razones prácticas debe seleccionarse un tamaño finito de incremento. Para que la aproximación de diferencias finitas de la ecuación 6.10 sea válida, el incremento de tiempo debe ser suficientemente pequeño para que la aceleración se pueda aproximar como si fuera constante durante el incremento. Podemos determinar un tamaño apropiado para el incremento de tiempo al examinar el problema particular que se investigue. Durante el curso del movimiento, puede ser necesario cambiar el criterio para el tamaño del incremento de tiempo pero, en la práctica, por lo general seleccionamos un incremento de tiempo apropiado a las condiciones iniciales y usamos el mismo valor en todos los cálculos.

El tamaño del incremento de tiempo influye sobre la precisión del resultado, pero desafortunadamente no es fácil determinar la precisión de una solución con el método de Euler sin un conocimiento de la solución analítica correcta. Un método para determinar la exactitud de la solución numérica, es repetir los cálculos con un incremento de tiempo más pequeño y comparar resultados. Si los dos cálculos concuerdan a cierto número de cifras significativas, se puede suponer que los resultados son correctos a esa precisión.

Ejemplo 6.15 Repaso de Euler y la esfera en aceite

Considere la esfera que cae en aceite del ejemplo 6.10. Usando el método de Euler, encuentre la posición y la aceleración de la esfera en el instante en que la rapidez llegue a 90.0% de la rapidez terminal.

Solución La fuerza neta sobre la esfera es

$$\Sigma F = -mg + bv$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Por lo tanto, los valores de aceleración de la última columna de la tabla 6.3 son

$$a = \frac{\Sigma F(x, v, t)}{m} = \frac{-mg + bv}{m} = -g + \frac{bv}{m}$$

Con la selección de un incremento de tiempo de 0.1 ms, las primeras pocas líneas de la hoja de cálculo modelada con la tabla 6.3 se asemejan a la tabla 6.4. Vemos que la rapidez está aumentando mientras la magnitud de la aceleración está disminuyendo debido a la fuerza resistiva. También vemos que la esfera no cae muy lejos en el primer milisegundo.

Más abajo en la hoja de cálculo, como se ve en la tabla 6.5, encontramos el instante en el que la esfera alcanza una rapidez de $0.900v_T$, que es 0.900×5.00 cm/s = 4.50 cm/s. Este cálculo demuestra que esto ocurre en $t = 11.6$ ms, que concuerda dentro de su incertidumbre con el valor obtenido en el ejemplo 6.10. La diferencia de 0.1 ms en los dos valores se debe a la naturaleza aproximada del método de Euler. Si se usara un incremento de tiempo más pequeño, el instante en el que la rapidez alcanza $0.900v_T$ se aproxima al valor calculado en el Ejemplo 6.10.

De la tabla 6.5, vemos que la posición y aceleración de la esfera cuando alcanza una rapidez de $0.900v_T$ son

$$= -0.035 \text{ cm} \quad \text{y} \quad a = -99 \text{ cm/s}^2$$

Tabla 6.4

La esfera empieza a caer en aceite

Paso	Tiempo (ms)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)	Aceleración (cm/s²)
0	0.0	0.0000	0.0	−980.0
1	0.1	0.0000	−0.10	−960.8
2	0.2	0.0000	−0.19	−942.0
3	0.3	0.0000	−0.29	−923.5
4	0.4	−0.0001	−0.38	−905.4
5	0.5	−0.0001	−0.47	−887.7
6	0.6	−0.0001	−0.56	−870.3
7	0.7	−0.0002	−0.65	−853.2
8	0.8	−0.0003	−0.73	−836.5
9	0.9	−0.0003	−0.82	−820.1
10	1.0	−0.0004	−0.90	−804.0

Tabla 6.5

La esfera alcanza $0.900\ v_T$

Paso	Tiempo (ms)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)	Aceleración (cm/s²)
110	11.0	−0.0324	−4.43	−111.1
111	11.1	−0.0328	−4.44	−108.9
112	11.2	−0.0333	−4.46	−106.8
113	11.3	−0.0337	−4.47	−104.7
114	11.4	−0.0342	−4.48	−102.6
115	11.5	−0.0346	−4.49	−100.6
116	11.6	−0.0351	−4.50	−98.6
117	11.7	−0.0355	−4.51	−96.7
118	11.8	−0.0360	−4.52	−94.8
119	11.9	−0.0364	−4.53	−92.9
120	12.0	−0.0369	−4.54	−91.1

RESUMEN

La segunda ley de Newton aplicada a una partícula que se mueve en movimiento circular uniforme expresa que la fuerza neta que hace que la partícula experimente aceleración centrípeta es

$$\sum F = ma_c = \frac{mv^2}{r} \tag{6.1}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Una partícula que se mueve en movimiento circular no uniforme tiene un componente radial de aceleración y un componente tangencial de aceleración diferente de cero. En el caso de una partícula que gira en un círculo vertical, la fuerza gravitacional proporciona el componente tangencial de aceleración y parte o todo el componente radial de aceleración.

Un observador en un marco no inercial (que acelera) debe introducir **fuerzas ficticias** cuando aplique la segunda ley de Newton a ese marco. Si estas fuerzas ficticias se definen correctamente, la descripción de movimiento en el marco no inercial es equivalente al hecho por un observador en un marco inercial. No obstante, los observadores en los dos marcos no concuerdan sobre las causas del movimiento.

Un objeto que se mueva en un líquido o gas experimenta una **fuerza resistiva** que depende de la rapidez. Esta fuerza resistiva, que se opone al movimiento relativo del medio, generalmente aumenta con la rapidez. La magnitud de la fuerza resistiva depende del tamaño y forma del objeto y de las propiedades del medio en el que el objeto se mueva. En el caso limitante para un objeto en caída, cuando la magnitud de la fuerza resistiva sea igual al peso del objeto, éste alcanza su **rapidez terminal.** El **método de Euler** es un medio para analizar el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza que no es sencilla.

PREGUNTAS

1. ¿Por qué salpica lodo una llanta de automóvil que gira rápidamente?

2. Imaginemos que el estudiante une un objeto pesado a un extremo de un resorte, sostiene el otro extremo del resorte y luego hace girar el objeto en un círculo horizontal. ¿Se estira el resorte? Si es así, ¿por qué? Analice esto en términos de la fuerza que hace que el movimiento sea circular.

3. Describa una situación en la que el conductor de un auto puede tener aceleración centrípeta pero no aceleración tangencial.

4. Describa la trayectoria de un cuerpo en movimiento en el caso que su aceleración sea constante en magnitud en todo momento y (a) perpendicular a la velocidad; (b) paralela a la velocidad.

5. Un objeto ejecuta movimiento circular con rapidez constante siempre que una fuerza neta de magnitud constante actúe perpendicular a la velocidad. ¿Qué ocurre a la rapidez si la fuerza no es perpendicular a la velocidad?

6. Explique por qué la Tierra no es de forma esférica y está abultada en el ecuador.

7. Debido a que la Tierra gira alrededor de su eje, es un marco no inercial de referencia. Suponga que la Tierra es una esfera uniforme. ¿Por qué sería mayor el peso aparente de un objeto en los polos que en el ecuador?

8. ¿Qué hace girar un aspersor giratorio de jardín?

9. Si alguien le dice que los astronautas no tienen peso en órbita porque están fuera de la atracción de la gravedad, ¿aceptaría esta afirmación? Explique.

10. Se ha sugerido llevar al espacio cilindros giratorios de unas 10 millas de largo y 5 millas de diámetro y usarlos como colonias. El propósito de la rotación es simular la gravedad para los habitantes. Explique este concepto para producir una imitación efectiva de la gravedad.

11. Considere una estación espacial giratoria que gire a la rapidez precisa tal que la aceleración centrípeta en la superficie interior sea g. Así, astronautas que se encuentren de pie en esta superficie interior se sentirían presionados a la superficie como si estuvieran presionados en el piso debido a la fuerza gravitacional de la Tierra. Suponga que una astronauta en esta estación sostiene una pelota sobre su cabeza y "la deja caer" al piso. ¿Caerá la pelota como si estuviera en la Tierra?

12. Una cubeta de agua se puede hacer girar en trayectoria circular de modo que no se tire agua. ¿Por qué el agua se mantiene en la cubeta, aun cuando ésta se encuentre boca abajo?

13. ¿Cómo se explicaría la fuerza que empuja a un pasajero hacia el lado de un auto cuando éste transita por una esquina?

14. ¿Por qué un piloto tiende a desmayarse cuando sale de una profunda maniobra en picada?

15. El observador en el elevador que acelera en el ejemplo 5.8 diría que el "peso" del pescado es T, la lectura de la báscula. Esto es obviamente erróneo. ¿Por qué esta observación difiere de la de una persona fuera del elevador, en reposo con respecto a la Tierra?

16. Si alguna vez usted ha subido a un elevador rápido de un edificio alto, es posible que haya experimentado una sensación de náuseas, pesadez o ligereza, dependiendo de la dirección de la aceleración. Explique estas sensaciones. ¿Estamos realmente sin peso en caída libre?

17. Una paracaidista en caída alcanza su rapidez terminal con su paracaídas cerrado. Una vez abierto el paracaídas, ¿qué parámetros cambian para reducir esta rapidez terminal?

18. Considere una pequeña gota de agua y una gota de agua grande que caen en la atmósfera. Compare la rapidez terminal de ambas. ¿Cuáles son sus aceleraciones cuando alcanzan su rapidez terminal?

19. En viajes largos, los aviones tipo jet por lo general vuelan a alturas de alrededor de 30 000 pies. Desde el punto de vista económico, ¿cuál es la principal ventaja de volar a estas alturas?

20. Analice el movimiento de una piedra que cae en agua en términos de su rapidez y aceleración cuando cae. Suponga que la fuerza resistiva que actúa sobre la piedra aumenta a medida que aumenta la rapidez.

21. "Si se conocieran la posición y velocidad actuales de toda partícula en el universo, junto con sus leyes que describen las fuerzas que las partículas ejercen una sobre otra, entonces todo el futuro del universo podría calcularse. El futuro es determinado y preordenado. La voluntad libre es una ilusión". ¿Está usted de acuerdo con esta tesis? Hable a favor o en contra de ella.

Materiał chroniony prawem autorskim

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, difícil = solución guiada con sugerencias disponibles en http://www.pse6.com

= use computadora para resolver el problema = problemas numéricos y simbólicos por pares

Sección 6.1 Segunda ley de Newton aplicada al movimiento circular uniforme

1. Una cuerda ligera puede sostener una carga colgante estacionaria de 25.0 kg antes de romperse. Un objeto de 3.00 kg unido a la cuerda gira en una mesa horizontal y sin fricción en un círculo de radio 0.800 m, mientras el otro extremo de la cuerda se mantiene fijo. ¿Qué rango de rapidez puede tener el objeto antes que la cuerda se rompa?

2. Una curva en un camino forma parte de un círculo horizontal. Cuando un auto transita por ella a una rapidez constante de 14.0 m/s, la fuerza total sobre el conductor tiene una magnitud de 130 N. ¿Cuál es el vector total si la rapidez es 18.0 m/s?

3. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, la rapidez del electrón es aproximadamente 2.20×10^6 m/s. Encuentre (a) la fuerza que actúa sobre el electrón cuando éste gira en una órbita circular de radio 0.530×10^{-10} m y (b) la aceleración centrípeta del electrón.

4. En un ciclotrón (un tipo de acelerador de partículas), un deuterón (de masa atómica 2.00 u) alcanza una rapidez final de 10.0% de la rapidez de la luz cuando se mueve en una trayectoria circular de radio 0.480 m. El deuterón es mantenido en la trayectoria circular por una fuerza magnética. ¿Qué magnitud de fuerza se requiere?

5. Una moneda colocada a 30.0 cm del centro de una mesa horizontal giratoria se desliza cuando su rapidez es 50.0 cm/s. (a) ¿Qué fuerza ocasiona la aceleración centrípeta cuando la moneda está estacionaria con respecto a la mesa giratoria? (b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre la moneda y la mesa giratoria?

6. Siempre que los astronautas del *Apolo* estuvieron en la superficie de la Luna, un tercer astronauta estaba en órbita alrededor de la Luna. Suponga que la órbita era circular y a 100 km sobre la superficie de la Luna, donde la aceleración debida a la gravedad es 1.52 m/s^2. El radio de la Luna es 1.70×10^6 m. Determine (a) la rapidez orbital del astronauta, y (b) el periodo de la órbita.

7. Una caja de huevo está situada en el centro de la plataforma plana de una camioneta cuando ésta transita por una curva peraltada del camino. La curva puede ser considerada como un arco de círculo de radio 35.0 m. Si el coeficiente de fricción estática entre la caja y el camión es de 0.600, ¿con qué rapidez puede circular el camión sin que la caja se deslice?

8. La capacidad de viraje de un automóvil se evalúa en una pista de derrapes, donde se mide la máxima rapidez que un auto puede mantener alrededor de una trayectoria circular sobre una superficie seca y plana. Entonces la aceleración centrípeta, también llamada aceleración lateral, se calcula como múltiplo de la aceleración g en caída libre. Los principales factores que afectan la capacidad de viraje son las características de las llantas y el sistema de suspensión del auto. Un Dodge Viper GTS puede transitar en una pista de derrapes de radio 61.0 m a 86.5 km/h. Calcule su máxima aceleración lateral.

9. Considere un péndulo cónico con una pesa de 80.0 kg unido a un alambre de 10.0 m que forma un ángulo de 5.00° con la vertical (figura P6.9). Determine (a) los componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por el alambre sobre el péndulo y (b) la aceleración de la pesa.

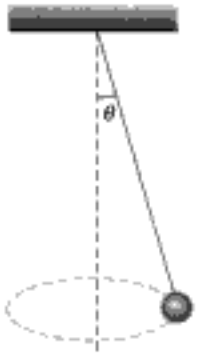


Figura P6.9

10. Un auto que inicialmente va hacia el este vira al norte cuando viaja en una trayectoria circular a rapidez uniforme, como en la figura P6.10. La longitud del arco ABC es 235 m y el auto completa la vuelta en 36.0 s. (a) ¿Cuál es la aceleración cuando el auto está en B ubicado a un ángulo de 35.0°? Exprese su respuesta en términos de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$. Determine (b) la rapidez promedio del auto y (c) su aceleración promedio durante el intervalo de 36.0 s.

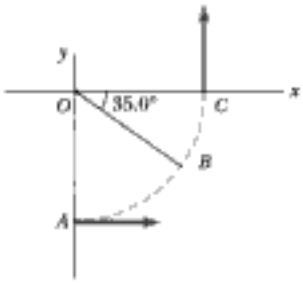


Figura P6.10

11. Un objeto de 4.00 kg está unido a una varilla vertical por medio de dos cuerdas, como en la figura P6.11. El objeto gira en un círculo horizontal a rapidez constante de 6.00 m/s. Encuentre la tensión en (a) la cuerda superior y (b) la cuerda inferior.

12. El moldeo de metal fundido es importante en muchos procesos industriales. Se usa *fundición centrífuga* para manufacturar tubos, cojinetes y muchas otras estructuras. Se ha inventado una amplia variedad de refinadas técnicas, pero la idea básica es como se ilustra en la figura P6.12. Una caja cilíndrica se hace girar rápida y uniformemente alrededor de un eje horizontal. Se vacía metal fundido en el cilindro giratorio y luego se deja enfriar, formando así el producto terminado. El giro del cilindro a una gran rapidez

Materiał chroniony prawem autorskim

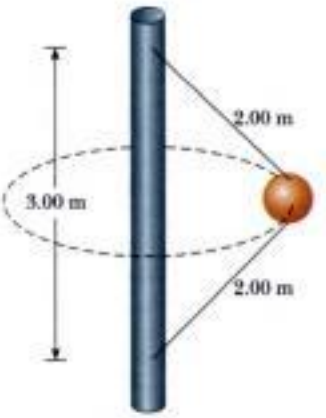


Figura P6.11

de rotación impulsa fuertemente al metal que se solidifica hacia el exterior. Cualesquiera burbujas son desplazadas hacia el eje, de modo que los vacíos no deseados no estarán presentes en la pieza fundida. A veces es deseable formar una pieza compuesta, por ejemplo un cojinete, donde se vacía una fuerte superficie exterior de acero, seguida por un recubrimiento interior de metal especial de baja fricción. En algunas aplicaciones, a un metal muy fuerte se le da un recubrimiento de metal resistente a la corrosión. La fundición centrífuga resulta en un fuerte enlace entre capas.

Suponga que se ha de fundir un casquillo de cobre de radio interior 2.10 cm y radio exterior 2.20 cm. Para eliminar burbujas y dar alta integridad estructural, la aceleración centrípeta de cada parte de metal debe ser 100*g*. ¿Qué rapidez de rotación se requiere? Exprese la respuesta en revoluciones por minuto.

Sección 6.2 Movimiento circular no uniforme

13. Un niño de 40.0 kg se mece en un columpio de dos cadenas, cada una de 3.00 m de largo. Si la tensión en cada cadena en el punto más bajo es 350 N, encuentre (a) la rapidez del niño en el punto más bajo y (b) la fuerza ejercida por el asiento sobre el niño en el punto más bajo. (Desprecie la masa del asiento).

14. Un niño de masa m se mece en un columpio sostenido por dos cadenas, cada una de longitud R. Si la tensión en cada cadena en los puntos más bajos es T, encuentre (a) la rapidez del niño en el punto más bajo y (b) la fuerza ejercida por el asiento sobre el niño en el punto más bajo. (Desprecie la masa del asiento).

15. Tarzán (m = 85.0 kg) trata de cruzar un río sujetándose de una liana que mide 10 m de largo; la rapidez de Tarzán en la parte inferior del columpio (apenas sobre el agua) será de 8.00 m/s. Él no sabe que la liana tiene una resistencia a la ruptura de 1 000 N. ¿Cruza con seguridad el río?

16. Un halcón vuela en un arco horizontal de radio 12.0 m a una rapidez constante de 4.00 m/s. (a) Encuentre su aceleración centrípeta. (b) Continúa volando a lo largo del mismo arco horizontal pero aumenta su rapidez a razón de 1.20 m/s^2. Encuentre la aceleración (magnitud y dirección) bajo estas condiciones.

17. Una cubeta de agua se hace girar en un círculo vertical de radio 1.00 m. ¿Cuál es la rapidez mínima de la cubeta en lo alto del círculo si no ha de caer nada de agua?

18. Un objeto de 0.400 kg gira en una trayectoria circular vertical en una cuerda de 0.500 m de largo. Si su rapidez es 4.00 m/s en lo alto del círculo, ¿cuál es ahí la tensión en la cuerda?

19. Un carro de montaña rusa (figura P6.19) tiene una masa de 500 kg cuando está lleno de pasajeros. (a) Si el vehículo tiene una rapidez de 20.0 m/s en el punto Ⓐ, ¿cuál es la fuerza ejercida por la vía sobre el carro en este punto? (b) ¿Cuál es la rapidez máxima que el vehículo puede tener en Ⓑ y todavía permanecer sobre la vía?

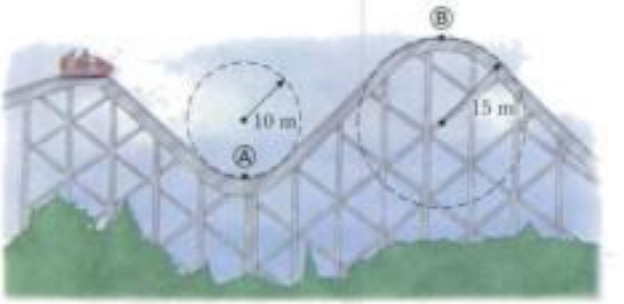


Figura P6.19

20. Una "montaña rusa" del parque de diversiones Six Flags America en Gurnee, IL, fue diseñada con tecnología y ciertos principios básicos de física. Cada espira vertical, en lugar de ser circular, tiene forma de lágrima (figura P6.20). Los carros corren en el interior de la espira en la parte superior, y las magnitudes de rapidez son suficientemente altas para asegurar que los carros permanezcan sobre la vía. La espiral más grande mide 40.0 m de alto, con una rapidez máxima de 31.0 m/s (casi 70 millas/hora) en la parte inferior. Supon-

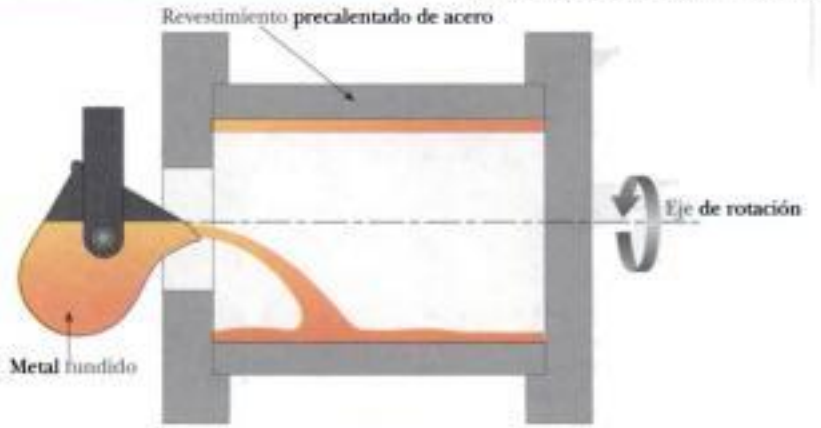


Figura P6.12

Materiał chroniony prawem autorskim

ga que la rapidez en la parte superior es de 13.0 m/s y la correspondiente aceleración centrípeta es 2g. (a) ¿Cuál es el radio del arco de la lágrima en la parte superior? (b) Si la masa total de un carro más sus pasajeros es M, ¿qué fuerza ejerce el riel sobre el carro en la parte superior? (c) Suponga que la montaña rusa tiene una espiral circular de 20.0 m de radio. Si los carros tienen la misma rapidez, 13.0 m/s en lo alto, ¿cuál es la aceleración centrípeta en lo alto? Comente sobre la fuerza normal en lo alto en esta situación.

Figura P6.20

Sección 6.3 Movimiento en marcos acelerados

21. Un objeto de masa 5.00 kg, está unido a una báscula de resorte, y se apoya sobre una superficie horizontal sin fricción, como se ve en la figura P6.21. La báscula de resorte, unida al extremo delantero de un furgón, tiene una lectura constante de 18.0 N cuando el carro está en movimiento. (a) Si la báscula de resorte indica cero cuando el carro está en reposo, determine la aceleración del carro. (b) ¿Qué lectura constante mostrará la báscula si el carro se mueve con velocidad constante? (c) Describa las fuerzas sobre el objeto como es observado por alguien en el carro y por alguien en reposo fuera del carro.

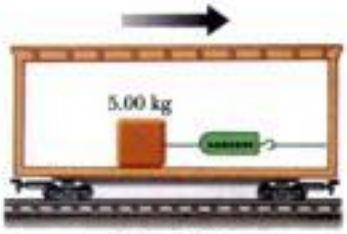


Figura P6.21

22. Si el coeficiente de fricción estática entre su taza de café y el tablero horizontal de su auto es $\mu_s = 0.800$, ¿con qué rapidez puede usted conducir su auto en un camino horizontal al transitar por una curva a la derecha, de radio 30.0 m, antes que la taza empiece a deslizarse? Si conduce demasiado rápido, ¿en qué dirección se desliza la taza con respecto al tablero?

23. Un objeto de 0.500 kg está suspendido del techo de un furgón que acelera, como se ve en la figura 6.13. Si $a = 3.00$ m/s^2, encuentre (a) el ángulo que la cuerda forma con la vertical y (b) la tensión en la cuerda.

24. Un recipiente pequeño de agua se coloca en un carrusel dentro de un horno de microondas, a un radio de 12.0 cm del centro. La mesa gira de modo uniforme, dando una revolución en cada 7.25 s. ¿Qué ángulo forma la superficie del agua con la horizontal?

25. Una persona está de pie en una báscula en un elevador. Cuando el elevador arranca, la báscula tiene una lectura constante de 591 N; cuando se detiene poco después, la lectura es 391 N. Suponga que la magnitud de la aceleración es la misma durante arrancadas y paradas, y determine (a) el peso de la persona, (b) la masa de la persona, y (c) la aceleración del elevador.

26. La Tierra gira alrededor de su eje con un periodo de 24.0 h. Imagine que la rapidez rotacional puede aumentar. Si un objeto en el ecuador ha de tener peso aparente cero, (a) ¿cuál debe ser el nuevo periodo? (b) ¿Por qué factor aumentaría la rapidez del objeto cuando el planeta está girando a la más alta rapidez? Nótese que el peso aparente del objeto se hace cero cuando la fuerza normal ejercida sobre él es cero.

27. Un bloque pequeño está en reposo sobre el piso en el frente de un furgón de ferrocarril que tiene una longitud ℓ. El coeficiente de fricción cinética entre el piso del furgón y el bloque es μ_k. El furgón, originalmente en reposo, empieza a moverse con aceleración a. El bloque se desliza hacia atrás horizontalmente hasta que llega a la pared trasera del furgón. En ese momento, ¿cuál es su rapidez (a) con respecto al furgón? (b) ¿con respecto a la Tierra?

28. Una estudiante está de pie en un elevador que está acelerando continuamente hacia arriba con aceleración a. Su mochila está apoyada sobre el piso junto a la pared. El ancho del carro del elevador es L. La estudiante da a su mochila un rápido puntapié en $t = 0$, lo cual le imparte una rapidez v y hace que se deslice por el piso del elevador. En el tiempo t, la mochila llega a la pared opuesta. Encuentre el coeficiente de fricción cinética μ_k entre la mochila y el piso del elevador.

29. En vacaciones, una niña despierta. Ella está de espaldas. La tensión en los músculos de ambos lados de su cuello es 55.0 N cuando levanta la cabeza para mirar sus pies y la ventana del motel. ¡Al fin no llueve! Diez minutos después, grita con sus pies por delante en un tobogán acuático a una rapidez terminal de 5.70 m/s, tocando la pared exterior de una curva horizontal de radio 2.40 m (figura P6.29). Ella levanta la cabeza para mirar hacia delante de sus pies; encuentre la tensión en los músculos de ambos lados del cuello de ella.

Figura P6.29

Materiał chroniony prawem autorskim

30. Un diseño popular de extractor doméstico de jugo es una canasta cónica y perforada de acero inoxidable de 3.30 cm de alto, con un fondo cerrado de 8.00 cm de diámetro y una parte superior abierta de 13.70 cm de diámetro, que gira a 20 000 revoluciones por minuto alrededor de un eje vertical (figura P6.30). Partes sólidas de fruta son cortadas en gránulos en el fondo del cono giratorio. Entonces los gránulos rápidamente encuentran su paso hacia la superficie inclinada donde el jugo es extraído al exterior del cono por las perforaciones de la canasta. La pulpa seca sube a lo largo de la pendiente para ser expulsada de la parte superior del cono. El jugo se recibe en un recipiente que rodea inmediatamente la superficie inclinada del cono. (a) ¿Qué aceleración centrípeta experimenta un pequeño trozo de fruta cuando gira con la canasta en un punto a medio camino entre la parte superior y la inferior? Exprese la respuesta como múltiplo de g. (b) Observe que el peso de la fruta es una fuerza insignificante. ¿Cuál es la fuerza normal sobre 2.00 g de fruta en ese punto? (c) Si el coeficiente efectivo de fricción cinética entre la fruta y el cono es 0.600, ¿con qué aceleración relativa al cono empezará el pequeño trozo de fruta a deslizarse hacia arriba de la pared del cono en ese punto, después de estar momentáneamente atorado?

Figura P6.30

31. Una plomada no cuelga exactamente a lo largo de una línea dirigida al centro de rotación de la Tierra. ¿Cuánto se desvía la plomada de la línea radial a 35° de latitud norte? Suponga que la Tierra es esférica.

Sección 6.4 Movimiento en presencia de fuerzas resistivas

32. Una paracaidista de masa 80.0 kg salta de una nave lenta y alcanza una rapidez terminal de 50.0 m/s. (a) ¿Cuál es la aceleración de la paracaidista cuando su rapidez es 30.0 m/s? ¿Cuál es la fuerza de resistiva sobre la paracaidista cuando su rapidez es (b) ¿50.0 m/s? (c) ¿30.0 m/s?

33. Un pequeño trozo de material de empaque de espuma de estireno se deja caer desde una altura de 2.00 m sobre el suelo. Hasta que alcanza su rapidez terminal, la magnitud de su aceleración está dada por $a = g - bv$. Después de caer 0.500 m, la espuma de estireno efectivamente alcanza su rapidez terminal, y luego tarda 5.00 s más en llegar al suelo. (a) ¿Cuál es el valor de la constante b? (b) ¿Cuál es la aceleración en $t = 0$? (c) ¿Cuál es la aceleración cuando la rapidez es 0.150 m/s?

34. (a) Estime la rapidez terminal de una esfera de madera (densidad 0.830 g/cm^3) que cae en aire si su radio es 8.00 cm y su coeficiente de retardo es 0.500. (b) ¿Desde qué altura un objeto en caída libre debería caer para alcanzar esta rapidez en ausencia de resistencia del aire?

35. Calcule la fuerza necesaria para jalar hacia arriba una esfera de cobre de 2.00 cm de radio, en un fluido a rapidez constante de 9.00 cm/s. Considere que la fuerza resistiva es proporcional a la rapidez, con constante de proporcionalidad de 0.950 kg/s. Haga caso omiso del empuje hidrostático.

36. Un helicóptero contra incendios lleva una cubeta de 620 kg en el extremo de un cable de 20.0 m de largo, como se ve en la figura P6.36. Cuando el helicóptero vuela hacia un incendio a una rapidez constante de 40.0 m/s, el cable forma un ángulo de 40.0° con respecto a la vertical. La cubeta presenta un área de sección transversal de 3.80 m^2 en un plano perpendicular al aire que se mueve frente a ella. Determine el coeficiente de resistencia al avance suponiendo que la fuerza resistiva es proporcional al cuadrado de la rapidez de la cubeta.

Figura P6.36

37. Una pequeña esfera de masa 3.00 g se suelta desde el reposo en $t = 0$ en una botella de champú líquido. Se observa que la rapidez terminal es $v_T = 2.00$ cm/s. Encuentre (a) el valor de la constante b en la ecuación 6.2, (b) el tiempo τ en el que la esfera alcanza $0.632v_T$, y (c) el valor de la fuerza resistiva cuando la esfera alcanza su rapidez terminal.

38. La masa de un auto deportivo es 1 200 kg. La forma de la carrocería es tal, que el coeficiente de retardo aerodinámico es 0.250 y el área frontal es 2.20 m^2. Despreciando todas las otras fuentes de fricción, calcule la aceleración inicial del auto si ha estado viajando a 100 km/h y su palanca de velocidades se pone en neutral para que corra por inercia.

39. Un bote apaga su motor cuando su rapidez es 10.0 m/s y avanza por inercia hasta detenerse. La ecuación que describe el movimiento del bote de motor durante este periodo es $v = v_i e^{-ct}$, donde v es la rapidez en el tiempo t, v_i es la rapidez inicial, y c es una constante. En $t = 20.0$ s, la rapidez es 5.00 m/s. (a) Encuentre la constante c. (b) ¿Cuál es la rapidez en $t = 40.0$ s? (c) Derive la expresión para $v(t)$ y así demuestre que la aceleración del bote es proporcional a la rapidez en cualquier tiempo.

40. Considere un objeto sobre el cual la fuerza neta es una fuerza resistiva proporcional al cuadrado de su rapidez. Por ejemplo, suponga que la fuerza resistiva que actúa sobre un patinador de velocidad es $f = -kmv^2$, donde k es una constante y m es la masa del patinador. El patinador cruza la línea de meta en una carrera

Materiał chroniony prawem autorskim

en línea recta con rapidez v_0 y luego reduce su velocidad al avanzar por inercia en sus patines. Demuestre que la rapidez del patinador en cualquier tiempo t después de cruzar la línea de meta es $v(t) = v_0/(1 + ktv_0)$. Este problema también es la base para los dos problemas siguientes.

41. (a) Use el resultado del problema 40 para hallar la posición x como función del tiempo para un objeto de masa m, ubicado en $x = 0$ y que se mueve con velocidad $v_0\hat{\mathbf{i}}$ en el tiempo $t = 0$ y después experimenta una fuerza neta $-kmv^2\hat{\mathbf{i}}$. (b) Encuentre la velocidad del objeto como función de su posición.

42. En juegos de béisbol de ligas mayores es común ver en el marcador la rapidez de cada lanzamiento. Esta rapidez se determina con un cañón de radar apuntado a un operador colocado detrás de la placa del *home*. El cañón usa el efecto Doppler de microondas reflejadas desde la pelota de béisbol, como estudiaremos en el capítulo 17 del volumen II. El cañón determina la rapidez en algún punto particular de la trayectoria de la pelota, dependiendo de donde el operador accione el gatillo. Como la pelota está sujeta a una fuerza resistiva debida al aire, disminuye su rapidez cuando recorre los 18.3 m hacia la placa del *home*. Use el resultado del problema 41(b) para hallar cuánto se reduce la rapidez. Suponga que la pelota sale de la mano del lanzador a 90.0 millas/hora = 40.2 m/s. Haga caso omiso de su movimiento vertical. Use datos sobre pelotas de béisbol del ejemplo 6.13 para determinar la rapidez del lanzamiento cuando cruza la placa del *home*.

43. Usted puede sentir en su mano una fuerza resistiva del aire si saca el brazo por la ventanilla de un auto rápido. [*Nota:* No se arriesgue]. ¿Cuál es el orden de magnitud de esta fuerza? En su solución exprese las cantidades que usted mida o estima y sus valores.

Sección 6.5 Modelación numérica en dinámica de partículas

44. Una hoja de 3.00 g se deja caer desde una altura de 2.00 m sobre el suelo. Suponga que la fuerza neta hacia abajo ejercida sobre la hoja es $F = mg - bv$, donde el factor de retardo es $b = 0.030$ kg/s. (a) Calcule la rapidez terminal de la hoja. (b) Use el método de Euler de análisis numérico para hallar la rapidez y posición de la hoja, como función del tiempo, desde el instante en que se suelta hasta que alcanza 99% de su rapidez terminal. (*Sugerencias:* Intente con $\Delta t = 0.005$ s.)

45. Un granizo de masa 4.80×10^{-4} kg cae en el aire y experimenta una fuerza neta dada por

$$F = -mg + Cv^2$$

donde $C = 2.50 \times 10^{-5}$ kg/m. (a) Calcule la rapidez terminal del granizo. (b) Use el método de Euler de análisis numérico para hallar la rapidez y posición del granizo a intervalos de 0.2 s, tomando la rapidez inicial como cero. Continúe el cálculo hasta que el granizo alcance 99% de su rapidez terminal.

46. Una pelota de béisbol de 0.142 kg tiene una rapidez terminal de 42.5 m/s (95 millas/hora). (a) Si una pelota experimenta una fuerza resistiva de magnitud $R = Cv^2$, ¿cuál es el valor de la constante C? (b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza resistiva cuando la rapidez de la pelota de béisbol es 36.0 m/s? (c) Use una computadora para determinar el movimiento de una pelota de béisbol lanzada verticalmente hacia arriba a una rapidez inicial de 36 m/s. ¿Qué altura máxima alcanza la pelota? ¿Cuánto tiempo está en el aire? ¿Cuál es su rapidez justo antes de que llegue al suelo?

47. Una paracaidista de 50.0 kg salta de un avión y cae a la Tierra con una fuerza resistiva proporcional al cuadrado de la rapidez, $R = Cv^2$. Tome $C = 0.200$ kg/m (con el paracaídas cerrado) y $C = 20.0$ kg/m (con el paracaídas abierto). (a) Determine la rapidez terminal de la paracaidista en ambas configuraciones, antes y después de que el paracaídas se abra. (b) Realice un análisis numérico del movimiento, y calcule la rapidez y posición como función del tiempo, suponiendo que la saltadora empieza el descenso a 1 000 m sobre el suelo y está en caída libre durante 10.0 s antes de abrir el paracaídas. (*Sugerencias:* Cuando el paracaídas se abre, ocurre una repentina aceleración; puede ser necesario un escalón de tiempo más pequeño en esta región.)

48. Considere un proyectil de 10.0 kg lanzado con una rapidez inicial de 100 m/s, a un ángulo de elevación de 35.0°. La fuerza resistiva es $\mathbf{R} = -b\mathbf{v}$, donde $b = 10.0$ kg/s. (a) Use un método numérico para determinar las coordenadas horizontales y verticales del proyectil como función del tiempo. (b) ¿Cuál es el alcance del proyectil? (c) Determine el ángulo de elevación que da el máximo alcance para el proyectil. (*Sugerencias:* Ajuste el ángulo de elevación por prueba y error para hallar el alcance más grande.)

49. Una golfista profesional pega con su palo de hierro 5 a 155 m (170 yardas). Una pelota de golf de 46.0 g experimenta una fuerza resistiva de magnitud $R = Cv^2$, y tiene una rapidez terminal de 44.0 m/s. (a) Calcule la constante resistiva C para la pelota de golf. (b) Use un método numérico para calcular la trayectoria de este tiro. Si la velocidad inicial de la pelota forma un ángulo de 31.0° (el ángulo alto) con la horizontal, ¿qué rapidez inicial debe tener la pelota para alcanzar la distancia de 155 m? (c) Si esta misma golfista tira con su hierro 9 (47.0° de inclinación) una distancia de 119 m, ¿cuál es la rapidez inicial de la pelota en este caso? Analice las diferencias en trayectorias entre los dos tiros.

Problemas adicionales

50. En una secadora doméstica para ropa, una tina cilíndrica que contiene ropa mojada se hace girar constantemente alrededor de un eje horizontal, como se ve en la figura P6.50. Para que las ropas se sequen uniformemente, se hacen girar con gran rapidez. La frecuencia de rotación de la tina de paredes lisas se escoge de modo que una pequeña prenda pierda contacto con la tina cuando la prenda se encuentre a un ángulo de 68.0° sobre la horizon-

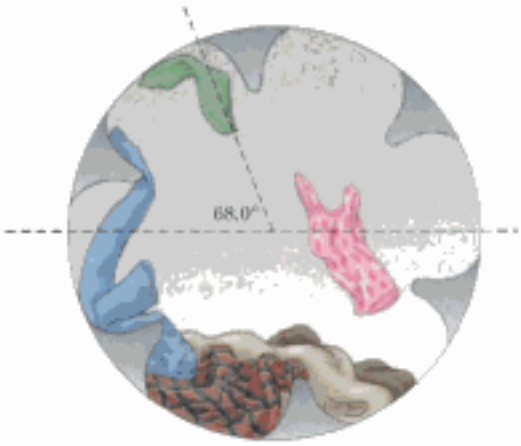


Figura P6.50

Materiał chroniony prawem autorskim

tal. Si el radio de la tina es de 0.330 m, ¿qué rapidez de revolución se necesita?

51. En el capítulo 18 del volumen II estudiaremos la obra más importante del premio Nobel Arthur Compton. Molesto por los veloces automóviles que circulaban fuera del edificio de Física en la Washington University en St. Louis, Compton diseñó un tope (reductor de velocidad) y lo hizo instalar. Suponga que un auto de 1 800 kg pasa sobre un tope en un camino que sigue el arco de un círculo de radio 20.4 m, como se ve en la figura P6.51. (a) ¿Qué fuerza ejerce el camino sobre el auto cuando éste pasa el punto más alto del tope, si el auto viaja a 30.0 km/h? (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es la máxima rapidez que el auto puede tener cuando pasa por este punto más alto sin perder contacto con el pavimento?

Figura P6.51 Problemas 51 y 52.

52. Un auto de masa m pasa sobre un tope en un camino que sigue el arco de un círculo de radio R, como en la figura P6.51. (a) ¿Qué fuerza ejerce el camino sobre el auto cuando éste pasa por el punto más alto del tope, si el auto viaja a una rapidez v? (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es la máxima rapidez que puede tener el auto cuando pasa por este punto más alto sin perder contacto con el pavimento?

53. Interprete la gráfica de la figura 6.18(b). Proceda como sigue: (a) Encuentre la pendiente de la recta, incluyendo sus unidades. (b) De la ecuación 6.6, $R = \frac{1}{2}D\rho A v^2$, identifique la pendiente teórica de una gráfica de la fuerza resistiva contra el cuadrado de la rapidez. (c) Haga que las pendientes experimental y teórica sean iguales entre sí y continúe para calcular el coeficiente resistivo al avance de los filtros. Use el valor para la densidad de aire que aparece en las guardas de este libro. Modele el área de sección transversal de los filtros como la de un círculo de radio 10.5 cm. (d) Arbitrariamente seleccione el octavo punto de datos de la gráfica y encuentre su separación vertical desde la línea de mejor ajuste. Exprese esta dispersión como un porcentaje. (e) En un breve párrafo, exprese lo que demuestra la gráfica y compárela contra la predicción teórica. Será necesario que haga referencia a las cantidades graficadas sobre los ejes, a la forma de la línea de gráfica, a los puntos de datos, y a los resultados de las partes (c) y (d).

54. Una estudiante construye y calibra un acelerómetro, que utiliza para determinar la rapidez de su auto alrededor de cierta curva no peraltada de una carretera. El acelerómetro es una plomada con un transportador que ella fija al techo de su auto. Un amigo que viaja en el auto con ella, observa que la plomada cuelga a un ángulo de 15.0° con la vertical cuando el auto tiene una rapidez de 23.0 m/s. (a) ¿Cuál es la aceleración centrípeta del auto que transita por la curva? (b) ¿Cuál es el radio de la curva? (c) ¿Cuál es la rapidez del auto si la desviación de la plomada es 9.00° cuando transita por la misma curva?

55. Suponga que el furgón de la figura 6.13 se mueve con aceleración constante a por una pendiente que forma un ángulo ϕ con la horizontal. Si el péndulo forma un ángulo constante θ con la perpendicular al techo, ¿cuál es a?

56. (a) Una banda transportadora de equipaje en un aeropuerto tiene la forma de una sección de un cono grande, que gira constantemente alrededor de su eje vertical. Su superficie metálica tiene una pendiente descendente hacia el exterior, formando un ángulo de 20.0° con la horizontal. Una maleta que tiene una masa de 30.0 kg se coloca sobre la banda, a 7.46 m desde el eje de rotación. La maleta hace el recorrido una vez en 38.0 s. Calcule la fuerza de fricción estática entre la maleta y la banda. (b) Se cambia la velocidad del motor de impulsión para hacer girar la banda con más rapidez de rotación, y la maleta cambia a otra posición, a 7.94 m del eje de rotación. Ahora dando una vuelta en 34.0 s, la maleta está a punto de deslizarse. Calcule el coeficiente de fricción estática entre la maleta y la banda.

57. Como la Tierra gira alrededor de su eje, un punto en el ecuador experimenta una aceleración centrípeta de 0.033 7 m/s^2, mientras que un punto en los polos no experimenta aceleración centrípeta. (a) Demuestre que en el ecuador la fuerza gravitacional sobre un objeto debe exceder la fuerza normal necesaria para sostener el objeto. Esto es, demuestre que el verdadero peso del objeto es mayor que su peso aparente. (b) ¿Cuál es el peso aparente en el ecuador y en los polos, de una persona que tiene una masa de 75.0 kg? (Suponga que la Tierra es una esfera uniforme y toma $g = 9.800$ m/s^2.)

58. Un disco de aire de masa m_1 está unido a una cuerda y se deja girar en un círculo de radio R sobre una mesa horizontal sin fricción. El otro extremo de la cuerda pasa por un agujero en el centro de la mesa, y un contrapeso de masa m_2 está atado a él (figura P6.58). El objeto suspendido permanece en equilibrio mientras gira el disco sobre la mesa. ¿Cuál es (a) la tensión en la cuerda? (b) ¿la fuerza radial que actúa sobre el disco? (c) ¿la rapidez del disco?

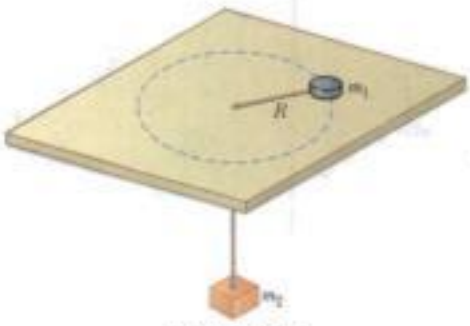


Figura P6.58

59. El piloto de un avión ejecuta una maniobra de rizo a velocidad constante en un círculo vertical. La rapidez del avión es de 300 mi/h, y el radio del círculo es 1 200 pies. (a) ¿Cuál es el peso aparente del piloto en el punto más bajo si su peso verdadero es de 160 lb? (b) ¿Cuál es su peso aparente en el punto más alto? (c) **¿Qué pasaría si?** Describa la forma en que el piloto podría experimentar ausencia de peso si el radio y la rapidez se pudieran hacer variar. (*Nota:* Si peso aparente es igual a la magnitud de la fuerza ejercida por el asiento sobre el cuerpo del piloto.)

60. Una moneda de 1 centavo, de masa 3.10 g, descansa sobre un pequeño bloque de 20.0 g sostenido por un disco giratorio (figura P6.60). Los coeficientes de fricción entre el bloque y el disco son 0.750 (estático) y 0.640 (cinético) mientras que los de la moneda

Materiał chroniony prawem autorskim

de a centavo y el bloque son 0.520 (estático) y 0.450 (cinético). ¿Cuál es la máxima frecuencia de rotación en revoluciones por minuto que el disco puede tener, sin que el bloque o la moneda de a centavo se deslicen sobre el disco?

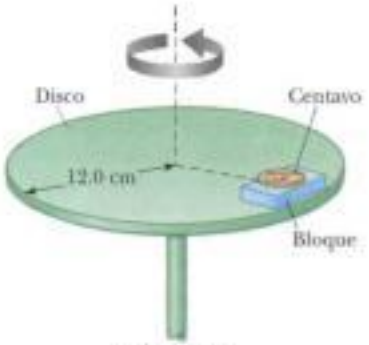


Figura P6.60

61. La figura P6.61 muestra una rueda de la fortuna que gira cuatro veces por minuto. Lleva cada carro alrededor de un círculo de 18.0 m de diámetro. (a) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de un pasajero? ¿Qué fuerza ejerce el asiento sobre un pasajero de 40.0 kg (b) en el punto más bajo de la vuelta y (c) en el punto más alto de la vuelta? (d) ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) ejerce el asiento sobre un pasajero cuando éste está a medio camino entre la parte más alta y la más baja?

Color Blue/Getty Images

Figura P6.61

62. Una estación espacial, que tiene la forma de una rueda de 120 m de diámetro, gira para producir una "gravedad artificial" de 3.00 m/s^2 a personas que caminan alrededor en la pared interior del borde exterior. Encuentre la frecuencia de rotación de la rueda (en revoluciones por minuto) que producirá este efecto.

63. Un juego mecánico de un parque de diversiones está equipado con una plataforma circular giratoria de 8.00 m de diámetro, de la cual están suspendidos asientos de 10.0 kg en el extremo de unas cadenas sin masa de 2.50 m (figura P6.63). Cuando gira el sistema, las cadenas forman un ángulo de $\theta = 28.0°$ con la vertical. (a) ¿Cuál es la rapidez de cada asiento? (b) Trace un diagrama de cuerpo libre de un niño de 40.0 kg que viaja en un asiento y encuentre la tensión de la cadena.

64. Una pieza de masilla está inicialmente situada en un punto A sobre el borde de una rueda de esmeril que gira alrededor de un eje horizontal. La masilla se desprende del punto A cuando el diámetro que pasa por A es horizontal. Entonces sube verticalmente y regresa a A en el instante en que la rueda completa una revolución. (a) Encuentre la rapidez de un punto sobre el borde de la rueda en términos de la aceleración debida a la gravedad y el radio R de la rueda. (b) Si la masa de la masilla es m, ¿cuál es la magnitud de la fuerza que la mantiene unida a la rueda?

Figura P6.63

65. Un juego mecánico de un parque de diversiones consta de un gran cilindro vertical, que gira alrededor de su eje con rapidez suficiente para que cualquier persona en su interior se mantenga contra la pared cuando el piso se deja caer (figura P6.65). El coeficiente de fricción estática entre una persona y la pared es μ_s y el radio del cilindro es R. (a) Demuestre que el periodo máximo de revolución necesario para evitar que una persona caiga es $T = (4\pi^2 R\mu_s/g)^{1/2}$. (b) Obtenga un valor numérico para T si $R = 4.00$ m y $\mu_s = 0.400$. ¿Cuántas revoluciones por minuto hace el cilindro?

Figura P6.65

Materiał chroniony prawem autorskim

66. *Un ejemplo del efecto Coriolis.* Suponga que la resistencia del aire es insignificante para una pelota de golf. Un golfista golpea la pelota en una tee desde un lugar precisamente a $\phi_i = 35.0°$ latitud norte. El golfista golpea la pelota en dirección al sur, con alcance de 285 m. La velocidad inicial de la pelota está a 48.0° sobre la horizontal. (a) ¿Durante cuánto tiempo está la pelota en el aire? El hoyo está hacia el sur de la ubicación del golfista, y él haría un hoyo en uno si la Tierra no girara. La rotación de la Tierra hace que la tee se mueva en un círculo de radio $R_E \cos \phi_i = (6.37 \times 10^6 \text{ m}) \cos 35.0°$, como se ve en la figura P6.66. La tee completa una revolución cada día. (b) Encuentre la rapidez de la tee al este, con respecto a las estrellas. El agujero también se mueve al este, pero está a 285 m más al sur, y por lo tanto a una latitud ligeramente menor ϕ_f. Como el agujero se mueve en un círculo ligeramente mayor, su rapidez debe ser mayor que la de la tee. (c) ¿En cuánto excede la rapidez del agujero a la de la tee? Durante el tiempo que la pelota está en el aire, se mueve hacia arriba y hacia abajo, así como al sur, con el movimiento de proyectiles que estudiamos en el capítulo 4, pero también se mueve al este con la rapidez que el estudiante encontró en la parte (b). El agujero se mueve al este a mayor rapidez; sin embargo, tirando de la pelota con la rapidez relativa encontrada en la parte (c). (d) ¿A qué distancia al oeste del agujero cae la pelota?

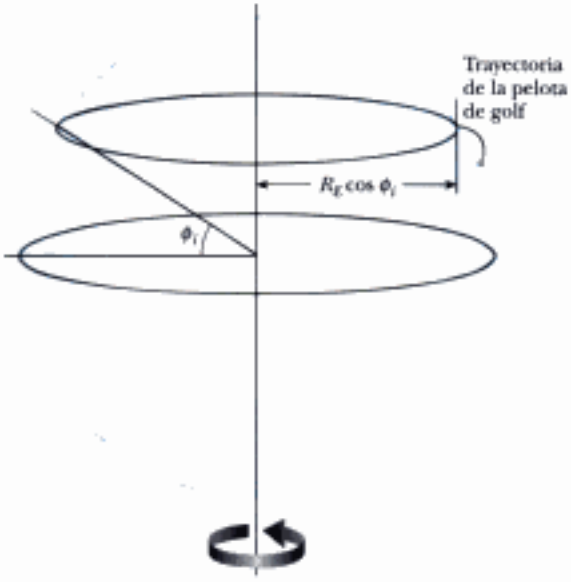


Figura P6.66

67. Un auto toma una curva peraltada, como se ve en la figura 6.6. El radio de curvatura del camino es R, el ángulo de peralte es θ, y el coeficiente de fricción estática es μ_s. (a) Determine el rango de rapidez que el auto puede tener sin derrapar hacia arriba o abajo del camino. (b) Encuentre el valor mínimo para μ_s tal que la rapidez mínima sea cero. (c) ¿Cuál es el rango de rapidez posible si $R = 100$ m, $\theta = 10.0°$ y $\mu_s = 0.100$ (condiciones de pavimento resbaloso)?

68. Una cuenta (pequeña esfera) puede deslizarse con fricción despreciable sobre un alambre que está doblado en una espira circular de radio 15.0 cm, como se ve en la figura P6.68. El círculo está siempre en un plano vertical y gira continuamente alrededor de su diámetro vertical con (a) un periodo de 0.450 s. La posición de la cuenta está descrita por el ángulo θ que la línea radial, desde el centro de la espira hasta la cuenta, forma con la vertical. ¿A qué ángulo hacia arriba desde la parte inferior del círculo puede estar la cuenta sin movimiento con respecto al círculo de giro? (b) **¿Qué pasaría si?** Repita el problema si el periodo de la rotación del círculo es 0.850 s.

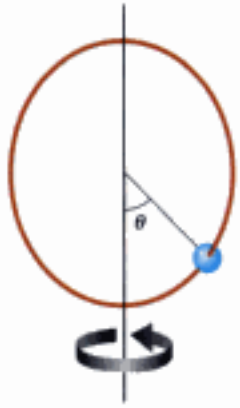


Figura P6.68

69. La expresión $F = arv + bv^2v^2$ da la magnitud de la fuerza resistiva (en newtons) ejercida sobre una esfera de radio r (en metros) por una corriente de aire que se mueve a una rapidez v (en metros por segundo), donde a y b son constantes con unidades apropiadas del SI. Sus valores numéricos son $a = 3.10 \times 10^{-4}$ y $b = 0.870$. Usando esta expresión, encuentre la rapidez terminal para gotitas de agua que caigan bajo su propio peso en aire, tomando los siguientes valores para los radios de la gota: (a) 10.0 μm, (b) 100 μm, (c) 1.00 mm. Nótese que para (a) y (c) se pueden obtener respuestas precisas sin resolver una ecuación cuadrática, considerando cuál de las dos aportaciones a la resistencia del aire es dominante y haciendo caso omiso de la aportación menor.

70. Un objeto de 9.00 kg que inicia desde el reposo cae en un medio viscoso y experimenta una fuerza resistiva $\mathbf{R} = -b\mathbf{v}$, donde $\mathbf{v}$ es la velocidad del objeto. Si el objeto alcanza la mitad de su rapidez terminal en 5.54 s, (a) determine la rapidez terminal. (b) ¿En qué tiempo es la rapidez del objeto ? de la rapidez terminal? (c) ¿Qué distancia ha recorrido el objeto en los primeros 5.54 s del movimiento?

71. Un avión de juguete, de masa 0.750 kg, vuela en un círculo horizontal al extremo de un alambre de control de 60.0 m, con una rapidez de 35.0 m/s. Calcule la tensión del alambre si forma un ángulo constante de 20.0° con la horizontal. Las fuerzas ejercidas sobre el avión son la tensión del alambre de control, la fuerza gravitacional, una sustentación aerodinámica que actúa a 20.0° hacia dentro desde la vertical como se ve en la figura P6.71.

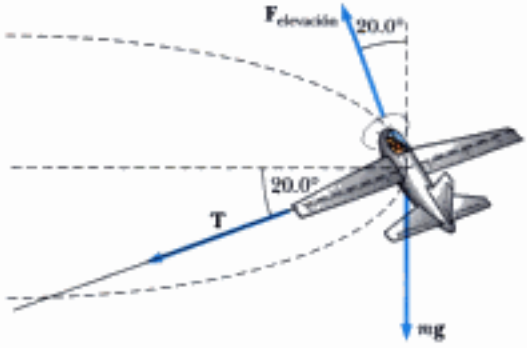


Figura P6.71

Materiał chroniony prawem autorskim

72. A los miembros de un club de paracaidismo se les dan los siguientes datos para usar en la planeación de sus saltos: En la tabla, d es la distancia de caída desde el reposo por un paracaidista en "caída libre, posición extendida estable" contra el tiempo de caída t. (a) Convierta las distancias en pies a metros. (b) Grafique d (en metros) contra t. (c) Determine el valor de la rapidez terminal v_T al hallar la pendiente de la parte recta de la curva. Use un ajuste de mínimos cuadrados para determinar esta pendiente.

t (s)	d (pie)	t (s)	d (pie)
1	16	11	1 309
2	62	12	1 483
3	138	13	1 657
4	242	14	1 831
5	366	15	2 005
6	504	16	2 179
7	652	17	2 353
8	808	18	2 527
9	971	19	2 701
10	1 138	20	2 875

73. Si una sola fuerza constante actúa sobre un objeto que se mueve en línea recta, la velocidad del objeto es una función lineal del tiempo. La ecuación $v = v_i + at$ da su velocidad v como función del tiempo, donde a es su aceleración constante. **¿Qué pasaría si** la velocidad está como una función lineal de posición? Suponga que cuando un objeto particular se mueve en un medio resistivo, su rapidez decrece como se describe en la ecuación $v = v_i - kx$, donde k es un coeficiente constante y x es la posición del objeto. Encuentre la ley que describa la fuerza total que actúa sobre este objeto.

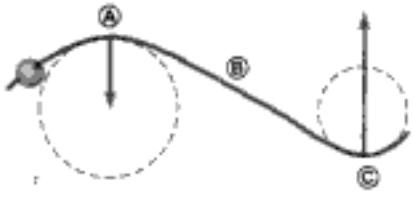
Respuestas a las *preguntas rápidas*

6.1 (b), (d). La aceleración centrípeta es siempre hacia el centro de la trayectoria circular.

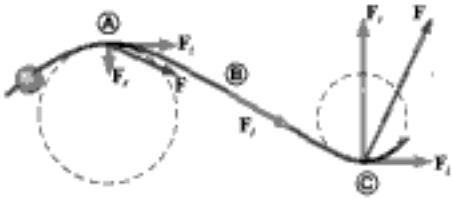
6.2 (a), (d). La fuerza normal es siempre perpendicular a la superficie que aplica la fuerza. Como su carro mantiene su orientación en todos los puntos del paseo, la fuerza normal es siempre hacia arriba.

6.3 (a). Si el carro se mueve en una trayectoria circular, debe tener aceleración centrípeta dada por la ecuación 4.15.

6.4 Como la rapidez es constante, la única dirección que la fuerza puede tener es la de la aceleración centrípeta. La fuerza es mayor en Ⓒ que en Ⓐ porque el radio en Ⓒ es menor. No hay fuerza en Ⓑ porque el alambre es recto.



6.5 Además de las fuerzas en la dirección centrípeta en la pregunta rápida 6.4, ahora hay fuerzas tangenciales para obtener aceleración tangencial. La fuerza tangencial es la misma en los tres puntos porque la aceleración tangencial es constante.



6.6 (c). Las únicas fuerzas que actúan sobre el pasajero son la fuerza constante con la puerta y la fuerza de fricción desde el asiento. Ambas son fuerzas reales y ambas actúan a la izquierda en la figura 6.11. Las fuerzas ficticias nunca deben dibujarse en un diagrama de fuerza.

6.7 (a). El balón de básquetbol, por tener mayor área de sección transversal, tendrá más fuerza debida a la resistencia del aire que la pelota de béisbol. Esto resultará en una menor fuerza neta en la dirección hacia abajo y una menor aceleración hacia abajo.

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 7

Energía y transferencia de energía

▲ *En una zona de captación de energía eólica, el aire en movimiento realiza trabajo sobre las aspas de los molinos de viento, haciendo que las aspas y el rotor de un generador eléctrico giren. Por medio de electricidad se transfiere energía fuera del sistema del molino de viento. (Billy Hustace/Getty Images)*

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

7.1 Sistemas y entornos

7.2 Trabajo realizado por una fuerza constante

7.3 Producto escalar de dos vectores

7.4 Trabajo realizado por una fuerza variable

7.5 Energía cinética y el teorema del trabajo y la energía cinética

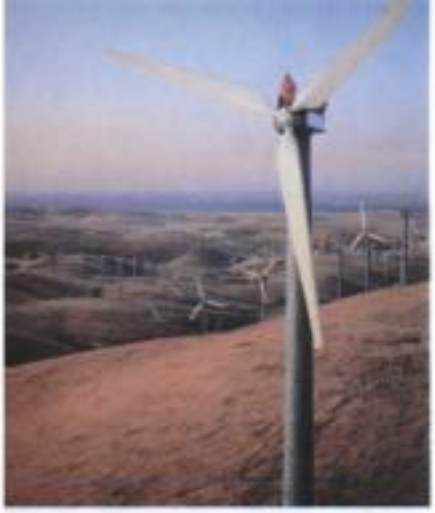
7.6 El sistema no aislado: conservación de la energía

7.7 Situaciones que involucran fricción cinética

7.8 Potencia

7.9 La energía y el automóvil

Materiał chroniony prawem autorskim



El concepto de energía es uno de los temas más importantes en ciencias e ingeniería. En la vida diaria, consideramos la energía en términos de combustible para transporte y calefacción, electricidad para alumbrado y aparatos domésticos y alimentos para consumo, pero estas ideas en realidad no definen la energía y sólo nos dicen que los combustibles se necesitan para realizar un trabajo y que nos dan algo que llamamos energía.

Las definiciones de cantidades como posición, velocidad, aceleración y fuerza, así como los principios asociados como la segunda ley de Newton, nos han permitido resolver varios problemas. Algunos de ellos podrían resolverse teóricamente con las leyes de Newton; sin embargo, son muy difíciles en la práctica. Estos problemas se pueden hacer mucho más sencillos con un método diferente. En este capítulo y en el siguiente, investigaremos este nuevo método, que incluirá definiciones de cantidades que pueden no ser familiares para el estudiante. Otras cantidades pueden sonar más conocidas, pero pueden tener significados más específicos en física que en la vida diaria. Comenzamos este análisis explorando la noción de energía.

La energía está presente en el universo en varias formas. *Todo* proceso físico que ocurra en el universo comprende energía y transformaciones de energía. Desafortunadamente, a pesar de su enorme importancia, no es fácil definirla. Las variables que vimos en capítulos anteriores fueron relativamente concretas; tenemos experiencia cotidiana con velocidades y fuerzas, por ejemplo. La noción de energía es más abstracta, aun cuando no tenemos *experiencia* con la misma, por ejemplo que se nos acabe la gasolina o nos falte servicio de electricidad si olvidamos pagar la cuenta de la compañía de luz.

El concepto de energía puede aplicarse a la dinámica de un sistema mecánico sin recurrir a las leyes de Newton. Este "método de energía" para describir el movimiento es especialmente útil cuando la fuerza que actúa sobre una partícula no es constante; en tal caso, la aceleración no es constante y no podemos aplicar las ecuaciones de aceleración constante que creamos en el capítulo 2. Las partículas en la naturaleza están sujetas a veces a fuerzas que varían con las posiciones de las partículas. Estas fuerzas incluyen fuerzas gravitacionales y la fuerza ejercida sobre un objeto unido a un resorte. Describiremos técnicas para tratar estas situaciones con ayuda de un concepto importante llamado *conservación de la energía*. Este método se extiende mucho más allá de la física, y se puede aplicar a organismos biológicos, sistemas tecnológicos y situaciones de ingeniería.

Nuestras técnicas para solución de problemas presentadas en capítulos anteriores estuvieron basadas en el movimiento de una partícula o un objeto que podría modelarse como partícula. Esto se llamó *modelado de partícula*. Comenzamos nuestro nuevo método al concentrar nuestra atención en un *sistema* y crear técnicas a usar en un *modelado de sistema*.

7.1 Sistemas y entornos

En el modelado de sistema citado anteriormente, concentramos nuestra atención en una pequeña porción del universo —el **sistema**—, y pasamos por alto detalles del resto del universo fuera del sistema. Una habilidad esencial para aplicar el modelado de sistema a problemas es *identificar el sistema*.

Materiał chroniony prawem autorskim

Un sistema válido puede

- ser un solo objeto o partícula
- ser un conjunto de objetos o partículas
- ser una región del espacio (por ejemplo, el interior de un cilindro de motor de combustión interna de un automóvil)
- variar en tamaño y forma (por ejemplo, una pelota de hule, que se deforma al chocar contra una pared)

Identificar la *necesidad* para aproximar un sistema para resolver un problema (en oposición a la aproximación de partícula) es parte del paso de "clasificar" en la estrategia general para la solución de problemas señalado en el capítulo 2. Identificar el sistema particular y su naturaleza es parte del paso de "analizar".

Sin importar cuál sea el sistema particular en un problema dado, hay una **frontera de sistema,** una superficie imaginaria (que no necesariamente coincide con una superficie física) que divide el universo en el sistema y el **entorno** que rodea al sistema.

Como ejemplo, imagine una fuerza aplicada a un objeto en el espacio vacío. Podemos definir el objeto como el sistema. La fuerza aplicada a él es una influencia sobre el sistema desde el entorno que actúa por la frontera del sistema. Veremos cómo analizar esta situación desde una aproximación de sistema en una sección subsiguiente de este capítulo.

Otro caso se ve en el ejemplo 5.10 (página 130). Aquí el sistema se puede definir como la combinación de la pelota, el cubo y la cuerda. La influencia desde el entorno incluye las fuerzas gravitacionales sobre la pelota y el cubo, las fuerzas normales y de fricción sobre el cubo, y la fuerza ejercida por la polea sobre la cuerda. Las fuerzas ejercidas por la cuerda sobre la pelota y el cubo son internas al sistema y, por lo tanto, no están incluidas como influencia desde el entorno.

Hallaremos que hay varios mecanismos por los cuales un sistema puede recibir influencia desde el entorno. El primero de éstos que estudiaremos será el *trabajo*.

¡ADVERTENCIA!

7.1 Identificar el sistema

El paso más importante para resolver un problema con el uso del método de energía es identificar el sistema de interés apropiado. Asegúrese que éste sea el *primer* paso que dé al resolver un problema.

7.2 Trabajo realizado por una fuerza constante

Casi todos los términos que hemos usado hasta este punto (velocidad, aceleración, fuerza, etcétera), llevan un significado semejante en física al que tienen en la vida diaria. Ahora, sin embargo, encontramos un término cuyo significado en física es notoriamente diferente de su significado en la vida diaria: *trabajo*.

Para comprender lo que significa trabajo para un físico, considere la situación ilustrada en la figura 7.1. Se aplica una fuerza al borrador de un pizarrón, y éste se desliza a lo largo del riel. Si deseamos saber qué tan eficiente es la fuerza para mover el borrador, debemos considerar no sólo la magnitud de la fuerza, sino también su dirección. Si se supone que la

Figura 7.1 Borrador siendo empujado a lo largo del riel de un pizarrón.

Materiał chroniony prawem autorskim

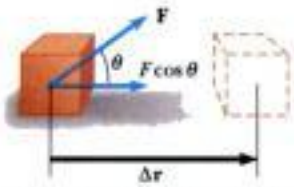


Figura 7.2 Si un objeto experimenta un desplazamiento $\Delta \mathbf{r}$ bajo la acción de una fuerza $\mathbf{F}$ constante, el trabajo realizado por la fuerza es $F\Delta r \cos\theta$.

magnitud de la fuerza aplicada es la misma en las tres fotografías, el empuje aplicado en la figura 7.1b mueve más al borrador que el empuje de la figura 7.1a. Por otra parte, la figura 7.1c muestra una situación en la que la fuerza aplicada no mueve al borrador en absoluto, no importa la fuerza con que se empuje. (A menos, por supuesto, que apliquemos una fuerza tan grande que se rompa el riel del pizarrón). Por lo tanto, al analizar fuerzas para determinar el trabajo que realizan, debemos considerar la naturaleza vectorial de fuerzas. También debemos conocer la distancia que recorre el borrador a lo largo del riel si es que deseamos determinar el trabajo asociado con ese desplazamiento. Mover el borrador 3 m requiere más trabajo que moverlo 2 cm.

Examinemos la situación de la figura 7.2, donde un objeto experimenta un desplazamiento a lo largo de una recta mientras recibe la acción de una fuerza $\mathbf{F}$ constante que forma un ángulo θ con la dirección del desplazamiento.

Trabajo realizado por una fuerza constante

El **trabajo** W realizado sobre un sistema por un agente que ejerce una fuerza constante sobre el sistema es el producto de la magnitud F de la fuerza, la magnitud Δr del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y $\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores fuerza y desplazamiento:

$$W = F\,\Delta r \cos\theta \tag{7.1}$$

¡ADVERTENCIA!

7.2 ¿Qué es lo desplazado?

El desplazamiento en la ecuación 7.1 es el del *punto de aplicación de la fuerza*. Si ésta se aplica a una partícula en un sistema no deformable y no giratorio, este desplazamiento es el mismo que el de la partícula o sistema. Para sistemas deformables, sin embargo, es frecuente que estos dos desplazamientos no sean iguales.

Como ejemplo de la distinción entre esta definición de trabajo y nuestra comprensión diaria de la palabra, considere el estudiante sostener una pesada silla a la longitud del brazo durante 3 minutos. Al final de este intervalo de tiempo, sus cansados brazos pueden llevarle a pensar que usted ha realizado una cantidad considerable de trabajo sobre la silla. De acuerdo con nuestra definición, sin embargo, no ha realizado trabajo en absoluto.[1] Usted ejerce una fuerza para sostener la silla, pero no la mueve. Esto se puede ver al observar que si $\Delta r = 0$, la ecuación 7.1 da $W = 0$, situación descrita en la figura 7.1c.

De la ecuación 7.1 también observe que el trabajo realizado por una fuerza sobre un objeto en movimiento es cero cuando la fuerza aplicada es perpendicular al desplazamiento

¡ADVERTENCIA!

7.3 El trabajado es realizado por. . . sobre. . .

El estudiante no sólo debe identificar el sistema, sino también identificar la interacción del sistema con el entorno. Cuando analice el trabajo, siempre use la frase "el trabajo es realizado por . . . sobre . . ." Después de "por", inserte la parte del entorno que interactúe directamente con el sistema. Después de "sobre", inserte el sistema. Por ejemplo, "el trabajo realizado por el martillo sobre el clavo", identifica el clavo como el sistema y la fuerza del martillo representa la interacción con el entorno. Esto es semejante a nuestro uso en el capítulo 5 de "la fuerza ejercida por . . . sobre . . ."

Gerard Vandystadt/Photo Researchers, Inc.

El levantador de pesas no trabaja sobre las pesas cuando las sostiene sobre sus hombros. (Si él pudiera apoyar la barra sobre sus hombros y no mover sus rodillas, podría sostener las pesas por algún tiempo.) ¿Realizó algún trabajo cuando levantó las pesas a esta altura?

[1] En realidad, usted realiza trabajo mientras sostiene la silla a la longitud del brazo porque sus músculos están continuamente contrayéndose y relajándose; esto significa que están ejerciendo fuerzas internas sobre su brazo. Entonces, trabajo esta siendo hecho por su cuerpo, pero internamente sobre sí mismo en lugar de sobre la silla.

Materiał chroniony prawem autorskim

de su punto de aplicación. Esto es, si $\theta = 90°$, entonces $W = 0$ porque $\cos 90° = 0$. Por ejemplo, en la figura 7.3, el trabajo realizado por la fuerza normal sobre el objeto y el trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre el objeto son cero ambos, porque ambas fuerzas son perpendiculares al desplazamiento y tienen componentes cero a lo largo de un eje en la dirección de $\Delta\mathbf{r}$.

El signo del trabajo también depende de la dirección de $\mathbf{F}$ con respecto a $\Delta\mathbf{r}$. El trabajo realizado por la fuerza aplicada es positivo cuando la proyección de $\mathbf{F}$ sobre $\Delta\mathbf{r}$ sea en la misma dirección que el desplazamiento. Por ejemplo, cuando un objeto es levantado, el trabajo realizado por la fuerza aplicada es positivo porque la dirección de esa fuerza es hacia arriba, en la misma dirección que el desplazamiento de su punto de aplicación. Cuando la proyección de $\mathbf{F}$ sobre $\Delta\mathbf{r}$ sea en la dirección opuesta al desplazamiento, W es negativo. Por ejemplo, cuando un objeto es levantado, el trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre el objeto es negativo. El factor $\cos\theta$ en la definición de W (ecuación 7.1) automáticamente toma en cuenta el signo.

Si una fuerza aplicada $\mathbf{F}$ actúa en la misma dirección que el desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$, entonces $\theta = 0$ y $\cos 0 = 1$. En este caso, la ecuación 7.1 da

$$W = F\Delta r$$

El trabajo es una cantidad escalar y sus unidades son de fuerza multiplicada por longitud. Por lo tanto, la unidad del SI de trabajo es el **newton · metro** (N · m). Esta combinación de unidades se usa con tanta frecuencia, que se le asignó un nombre propio: el **joule** (J).

Una consideración importante para una aproximación de sistema a problemas, es observar que el **trabajo es una transferencia de energía.** Si W es el trabajo realizado sobre un sistema y W es positivo, se transfiere energía *al* sistema; si W es negativo, se transfiere energía *desde* el sistema. Entonces, si un sistema interactúa con su entorno, esta interacción puede describirse como una transferencia de energía por la frontera del sistema. Esto resultará en un cambio en la energía almacenada en el sistema. En la sección 7.5 aprenderemos acerca del primer tipo de almacenamiento de energía, después que investiguemos más aspectos del trabajo.

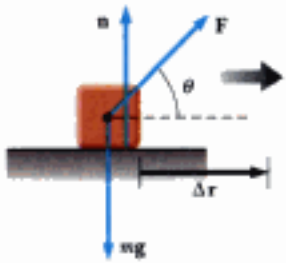


Figura 7.3 Cuando un objeto es desplazado sobre una superficie horizontal, sin fricción, la fuerza normal $\mathbf{n}$ y la fuerza gravitacional $m\mathbf{g}$ no trabajan sobre el objeto. En la situación mostrada aquí, $\mathbf{F}$ es la única fuerza que realiza trabajo sobre el objeto.

¡ADVERTENCIA!

7.4 Causa del desplazamiento

Podemos calcular el trabajo realizado por una fuerza sobre un objeto, pero esa fuerza *no es* necesariamente la causa del desplazamiento del objeto. Por ejemplo, si levantamos un objeto, la fuerza gravitacional realiza trabajo, aun cuando la gravedad no es la causa de que el objeto se mueva hacia arriba.

Pregunta rápida 7.1 La fuerza gravitacional ejercida por el Sol sobre la Tierra mantiene a ésta en órbita alrededor de aquél. Supongamos que la órbita es perfectamente circular. El trabajo realizado por esta fuerza gravitacional durante un corto intervalo de tiempo en el que la Tierra se desplaza en su trayectoria orbital es (a) cero (b) positivo (c) negativo (d) imposible de determinar.

Pregunta rápida 7.2 La figura 7.4 muestra cuatro situaciones en las que una fuerza se aplica a un objeto. En los cuatro casos, la fuerza tiene la misma magnitud y el desplazamiento del objeto es a la derecha y de la misma magnitud. Clasifique las situaciones en el orden del trabajo realizado por la fuerza sobre el objeto, del más positivo al más negativo.

Figura 7.4 (Pregunta rápida 7.2).

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 7.1 Señor Limpieza

Un hombre que limpia el piso jala una aspiradora con una fuerza de magnitud $F = 50.0$ N a un ángulo de 30.0° con la horizontal (figura 7.5a). Calcule el trabajo realizado por la fuerza sobre la aspiradora cuando ésta se desplaza 3.00 m a la derecha.

Solución La figura 7.5a ayuda a conceptualizar la situación. Nos dan una fuerza, un desplazamiento y el ángulo entre los dos vectores, de modo que podemos clasificar éste como un problema simple que necesitará de análisis mínimo. Para analizar la situación, identificamos la aspiradora como el sistema y trazamos un diagrama de cuerpo libre, como se muestra en la figura 7.5b. Con el uso de la definición de trabajo (ecuación 7.1),

$$W = F\,\Delta r\cos\theta = (50.0\text{ N})(3.00\text{ m})(\cos 30.0°)$$

$$= 130\text{ N}\cdot\text{m} = \mathbf{130\ J}$$

Para finalizar este problema, nótese en esta situación que la fuerza normal **n** y la gravitacional $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$ no realizan trabajo sobre la aspiradora porque estas fuerzas son perpendiculares a su desplazamiento.

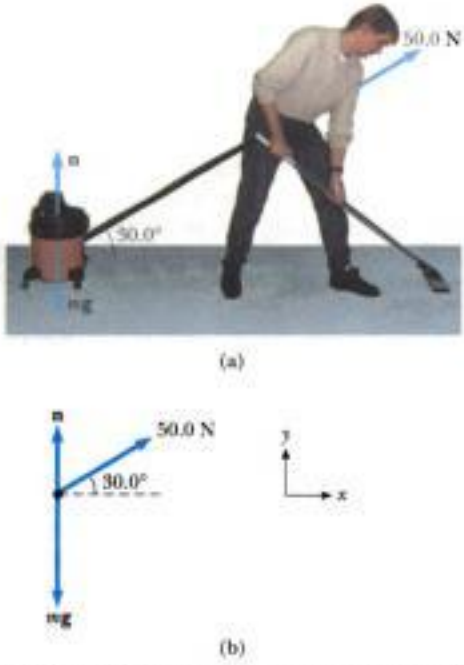


Figura 7.5 (Ejemplo 7.1) (a) Aspiradora siendo jalada a un ángulo de 30.0° con la horizontal. (b) Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que actúan sobre la aspiradora.

7.3 Producto escalar de dos vectores

Debido a la forma en que se combinan los vectores de fuerza y desplazamiento en la ecuación 7.1, es útil usar una herramienta matemática conveniente llamada **producto escalar** de dos vectores. Escribimos este producto escalar de los vectores **A** y **B** como **A · B.** (Debido al símbolo punto, el producto escalar recibe el nombre de **producto punto**).

En general, el producto escalar de cualesquier dos vectores **A** y **B** es una cantidad escalar igual al producto de las magnitudes de los dos vectores y el coseno del ángulo θ entre ellos:

Producto escalar de dos vectores A y B cualesquiera

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \equiv AB\cos\theta \tag{7.2}$$

Nótese que **A** y **B** no necesitan tener las mismas unidades, como es el caso con cualquier multiplicación.

Al comparar esta definición con la ecuación 7.1, vemos que podemos expresar la ecuación 7.1 como producto escalar:

$$W = F\,\Delta r\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} \tag{7.3}$$

En otras palabras, $\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}$ (léase "**F** punto Δ**r**") es una notación breve de $F\,\Delta r\cos\theta$.

Antes de continuar con nuestro análisis de trabajo, investiguemos algunas propiedades del producto punto. La figura 7.6 muestra dos vectores **A** y **B** y el ángulo θ entre ellos que se usa en la definición del producto punto. En la figura 7.6, $B\cos\theta$ es la proyección de **B** sobre **A**. Por lo tanto, la ecuación 7.2 significa que **A · B** es el producto de la magnitud de **A** y la proyección de **B** sobre **A.**[2]

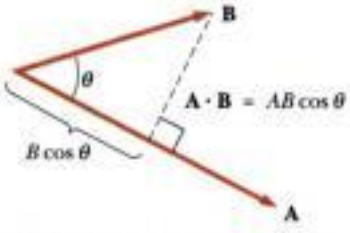


Figura 7.6 El producto escalar **A · B** es igual a la magnitud de **A** multiplicada por $B\cos\theta$, que es la proyección de **B** sobre **A.**

[2] Esto es equivalente a expresar que **A · B** es igual al producto de la magnitud de **B** y la proyección de **A** sobre **B.**

Materiał chroniony prawem autorskim

Del lado derecho de la ecuación 7.2 también vemos que el producto escalar es **conmutativo.**[3] Esto es,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

Finalmente, el producto escalar obedece la **ley distributiva de la multiplicación,** de modo que

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

El producto punto es sencillo de evaluar a partir de la ecuación 7.2 cuando **A** es perpendicular o paralela a **B.** Si **A** es perpendicular a **B** ($\theta = 90°$), entonces $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$. (La igualdad $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ también se cumple en el caso más trivial en el que **A** o **B** es cero). Si el vector **A** es paralelo al vector **B** y los dos apuntan en la misma dirección ($\theta = 0$), entonces $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB$. Si el vector **A** es paralelo al vector **B** pero los dos apuntan en direcciones opuestas ($\theta = 180°$), entonces $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -AB$. El producto escalar es negativo cuando $90° \leq \theta < 180°$.

El vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$, que definimos en el capítulo 3, está en las direcciones positivas x, y y z, respectivamente, de un sistema de coordenadas de mano derecha. Por lo tanto, se deduce de la definición de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ que los productos escalares de estos vectores unitarios son

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1 \tag{7.4}$$

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \tag{7.5}$$

Productos punto de vectores unitarios

Las ecuaciones 3.18 y 3.19 expresan que dos vectores **A** y **B** se pueden expresar en forma de vectores componentes como

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

El uso de la información dada en las ecuaciones 7.4 y 7.5 muestra que el producto escalar de **A** y **B** se reduce a

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{7.6}$$

(Los detalles de la derivación se dejan al estudiante en el problema 6). En el caso especial en el que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, vemos que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2$$

Pregunta rápida 7.3 ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero acerca de la relación entre $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ y $(-\mathbf{A}) \cdot (-\mathbf{B})$? (a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -[(-\mathbf{A}) \cdot (-\mathbf{B})]$; (b) Si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$, entonces $(-\mathbf{A}) \cdot (-\mathbf{B}) = AB \cos (\theta + 180°)$; (c) Tanto (a) como (b) son verdaderos. (d) Ni (a) ni (b) verdaderos.

Pregunta rápida 7.4 ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero acerca de la relación entre el producto punto de dos vectores y el producto de las magnitudes de los vectores? (a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ es mayor que AB; (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ es menor que AB; (c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ podría ser mayor o menor que AB, dependiendo del ángulo entre los vectores; (d) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ podría ser igual a AB.

¡ADVERTENCIA!

7.5 El trabajo es un escalar

Aun cuando la ecuación 7.3 define el trabajo en términos de dos vectores, *el trabajo es un escalar,* —no hay dirección asociada con él. *Todos* los tipos de energía y transferencia de energía son escalares. Ésta es una ventaja importante del método de energía, —no necesitamos cálculos vectoriales.

[3] Esto puede parecer obvio, pero en el capítulo 11 se verá otra forma de combinar vectores que resulta útil en física y no es conmutativa.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 7.2 El producto escalar

Los vectores **A** y **B** están dados por $\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$.

(A) Determine el producto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

Solución Sustituyendo las expresiones vectoriales específicas para **A** y **B**, encontramos

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})\cdot(-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})\\ &= -2\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{i}}\cdot 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}\cdot 2\hat{\mathbf{j}}\\ &= -2(1) + 4(0) - 3(0) + 6(1)\\ &= -2 + 6 = \mathbf{4}\end{aligned}$$

donde hemos empleado el hecho de que $\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = 1$ y $\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = 0$. El mismo resultado se obtiene cuando usamos la ecuación 7.6 directamente, donde $A_x = 2$, $A_y = 3$, $B_x = -1$ y $B_y = 2$.

(B) Encuentre el ángulo θ entre **A** y **B**.

Solución Las magnitudes de **A** y **B** son

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

Usando la ecuación 7.2 y el resultado de la parte (a) encontramos que

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{4}{8.06} = \mathbf{60.2°}$$

Ejemplo 7.3 Trabajo realizado por una fuerza constante

Una partícula que se mueve en el plano xy experimenta un desplazamiento $\Delta\mathbf{r} = (2.0\hat{\mathbf{i}} + 3.0\hat{\mathbf{j}})$ m cuando una fuerza constante $\mathbf{F} = (5.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})$ N actúa sobre la partícula.

(A) Calcule las magnitudes del desplazamiento y la fuerza.

Solución Usamos el teorema de Pitágoras:

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(2.0)^2 + (3.0)^2} = \mathbf{3.6\ m}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5.0)^2 + (2.0)^2} = \mathbf{5.4\ N}$$

(B) Encuentre el trabajo realizado por **F**.

Solución Sustituyendo las expresiones para **F** y $\Delta\mathbf{r}$ en la ecuación 7.3 y usando las ecuaciones 7.4 y 7.5, obtenemos

$$\begin{aligned}W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} &= [(5.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})\,\mathrm{N}]\cdot[(2.0\hat{\mathbf{i}} + 3.0\hat{\mathbf{j}})\,\mathrm{m}]\\ &= (5.0\hat{\mathbf{i}}\cdot 2.0\hat{\mathbf{i}} + 5.0\hat{\mathbf{i}}\cdot 3.0\hat{\mathbf{j}} + 2.0\hat{\mathbf{j}}\cdot 2.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}}\cdot 3.0\hat{\mathbf{j}})\,\mathrm{N\cdot m}\\ &= [10 + 0 + 0 + 6]\,\mathrm{N\cdot m} = \mathbf{16\ J}\end{aligned}$$

7.4 Trabajo realizado por una fuerza variable

Considere una partícula que se desplaza a lo largo del eje x bajo la acción de una fuerza que varía con la posición. La partícula es desplazada en la dirección de la x creciente de $x = x_i$ a $x = x_f$. En tal situación, no podemos usar $W = F\,\Delta r\cos\theta$ para calcular el trabajo realizado por la fuerza porque esta relación aplica sólo cuando **F** es constante en magnitud y dirección. Sin embargo, si imaginamos que la partícula experimenta un desplazamiento muy pequeño Δx, mostrado en la figura 7.7a, el componente x de la fuerza F_x es aproximadamente constante sobre este pequeño intervalo; para este pequeño desplazamiento, podemos aproximar el trabajo realizado por la fuerza como

$$W \approx F_x\,\Delta x$$

Ésta es precisamente el área del rectángulo sombreado de la figura 7.7a. Si imaginamos que la curva F_x contra x se divide en un gran número de estos intervalos, el trabajo total realizado por el desplazamiento de x_i a x_f es aproximadamente igual a la suma de un gran número de estos términos:

$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x\,\Delta x$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Si se deja que el tamaño de los desplazamientos se aproxime a cero, aumenta sin límite el número de términos de la suma, pero el valor de la suma se aproxima a un valor definido igual al área limitada por la curva F_x y el eje x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Por lo tanto, podemos expresar el trabajo realizado por F_x cuando la partícula se mueve de x_i a x_f como

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx \tag{7.7}$$

Esta ecuación se reduce a la ecuación 7.1 cuando la componente $F_x = F\cos\theta$ es constante.

Si más de una fuerza actúa sobre un sistema y *el sistema se puede modelar como una partícula*, el trabajo total realizado sobre el sistema es precisamente el trabajo realizado por la fuerza neta. Si expresamos la fuerza neta en la dirección x como ΣF_x, entonces el trabajo total, o *trabajo neto*, realizado cuando la partícula se mueve de x_i a x_f es

$$\sum W = W_{\text{neto}} = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum F_x\right) dx \tag{7.8}$$

Si el sistema no se puede modelar como una partícula (por ejemplo, si el sistema está formado por múltiples partículas que se pueden mover unas con respecto de otras), no podemos usar la ecuación 7.8. Esto es porque fuerzas diferentes sobre el sistema se pueden mover por diferentes desplazamientos. En este caso, debemos evaluar el trabajo realizado por cada fuerza separadamente y luego sumar los trabajos en forma algebraica.

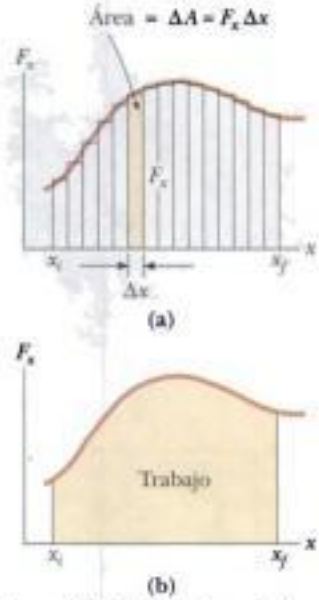


Figura 7.7 (a) El trabajo realizado por el componente de fuerza F_x para el pequeño desplazamiento Δx es $F_x \Delta x$, que es igual al área del rectángulo sombreado. El trabajo total realizado por el desplazamiento de x_i a x_f es aproximadamente igual a la suma de las áreas de todos los rectángulos. (b) El trabajo realizado por el componente F_x de la fuerza variable cuando la partícula se mueve de x_i a x_f es *exactamente* igual al área bajo esta curva.

Ejemplo 7.4 Cálculo del trabajo total realizado a partir de una gráfica

Una fuerza que actúa sobre una partícula varía con x, como se muestra en la figura 7.8. Calcule el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se mueve de $x = 0$ a $x = 6.0$ m.

Solución El trabajo realizado por la fuerza es igual al área bajo la curva de $x_A = 0$ a $x_C = 6.0$ m. Esta área es igual al área de la sección rectangular de Ⓐ a Ⓑ más el área de la sección triangular de Ⓑ a Ⓒ. El área del rectángulo es $(5.0\text{ N})(4.0\text{ m}) = 20$ J, y el área del triángulo es $\frac{1}{2}(5.0\text{ N})(2.0\text{ m}) = 5.0$ J. Por lo tanto, el trabajo total realizado por la fuerza sobre la partícula es **25 J**.

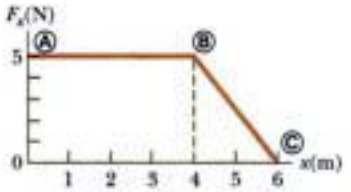


Figura 7.8 (Ejemplo 7.4) La fuerza que actúa sobre una partícula es constante durante los primeros 4.0 m de movimiento y luego decrece en forma lineal con x de $x_B = 4.0$ m a $x_C = 6.0$ m. El trabajo neto realizado por esta fuerza es el área bajo la curva.

Ejemplo 7.5 Trabajo realizado por el Sol sobre una sonda

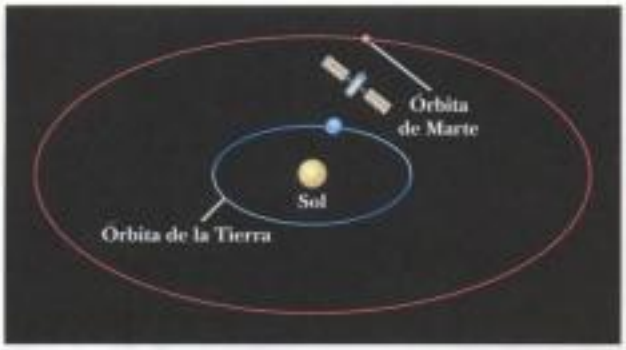
La sonda interplanetaria que se ilustra en la figura 7.9a es atraída al Sol por una fuerza dada por

$$F = -\frac{1.3 \times 10^{22}}{x^2}$$

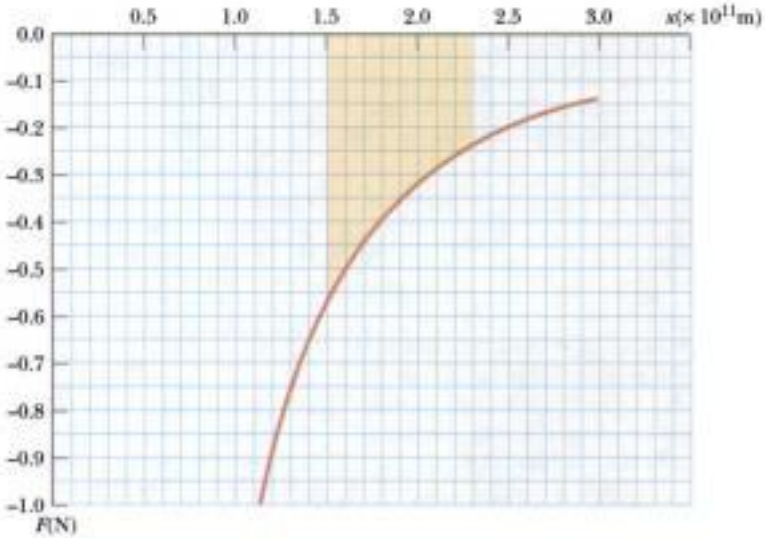
en unidades del SI, donde x es la distancia de separación entre el Sol y la sonda. Gráfica y analíticamente determine cuánto trabajo es realizado por el Sol sobre la sonda cuando la separación entre la sonda y el Sol cambia de 1.5×10^{11} m a 2.3×10^{11} m.

Solución gráfica El signo negativo de la ecuación para la fuerza indica que la sonda es atraída al Sol. Como la sonda se aleja del Sol, esperamos obtener un valor negativo para el trabajo realizado sobre ella. Una hoja de cálculo u otro medio numérico se puede usar para generar una gráfica como la de la figura 7.9b. Cada pequeño cuadrado de la retícula corresponde a un área de $(0.05\text{ N})(0.1 \times 10^{11}\text{ m}) = 5 \times 10^8$ J. El trabajo realizado es igual al área sombreada en la figura 7.9b. Como hay aproximadamente 60 cuadros sombreados, el área total (que es negativa porque la curva está abajo del eje x) es alrededor de

Materiał chroniony prawem autorskim



(a)



(b)

-3×10^{10} J. Éste es el trabajo realizado por el Sol sobre la sonda.

Solución analítica Podemos usar la ecuación 7.7 para calcular un valor más preciso para el trabajo realizado por el Sol sobre la sonda. Para resolver esta integral, hacemos uso de la integral $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$ con $n = -2$:

$$W = \int_{1.5\times10^{11}}^{2.3\times10^{11}} \left(\frac{-1.3\times10^{22}}{x^2}\right) dx$$

$$= (-1.3\times10^{22}) \int_{1.5\times10^{11}}^{2.3\times10^{11}} x^{-2} dx$$

$$= (-1.3\times10^{22}) \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_{1.5\times10^{11}}^{2.3\times10^{11}}$$

$$= (-1.3\times10^{22}) \left(\frac{-1}{2.3\times10^{11}} - \frac{-1}{1.5\times10^{11}}\right)$$

$$= \mathbf{-3.0\times10^{10}\ J}$$

Figura 7.9 (Ejemplo 7.5) (a) Una sonda interplanetaria se mueve de una posición cerca de la órbita terrestre radialmente hacia fuera desde el Sol, terminando cerca de la órbita de Marte. (b) Fuerza de atracción contra distancia para la sonda interplanetaria.

Trabajo realizado por un resorte

En la figura 7.10 se muestra un modelo de sistema físico común para el cual la fuerza varía con la posición. Un bloque sobre una superficie horizontal sin fricción está conectado a un resorte. Si éste se estira o comprime una pequeña distancia desde su configuración no deformada (de equilibrio), ejerce sobre el bloque una fuerza que se puede expresar como

Fuerza de resorte

$$F_x = -kx \tag{7.9}$$

donde x es la posición del bloque con respecto a su posición de equilibrio ($x = 0$) y k es una constante positiva llamada **constante de fuerza** o **constante del resorte** del resorte. En otras palabras, la fuerza requerida para estirar o comprimir un resorte es proporcional a la cantidad de estiramiento o compresión x. Esta ley de fuerza para resortes se conoce como **ley de Hooke.** El valor de k es una medida de la *rigidez* del resorte. Los resortes rígidos tienen elevados valores de k; los resortes suaves, pequeños valores de k. Como se ve en la ecuación 7.9, las unidades de k son N/m.

El signo negativo de la ecuación 7.9 significa que la fuerza ejercida por el resorte está siempre dirigida en sentido *opuesto* al desplazamiento desde el equilibrio. Cuando $x > 0$, como en la figura 7.10a, de modo que el bloque está a la derecha de la posición de equilibrio, la fuerza del resorte está dirigida a la izquierda, en la dirección x negativa. Cuando $x < 0$, como en la figura 7.10c, el bloque está a la izquierda del equilibrio y la fuerza del resorte está dirigida a la derecha, en la dirección x positiva. Cuando $x = 0$, como en la figura 7.10b, el resorte no está estirado y $F_x = 0$. Debido a que la fuerza del resorte actúa siempre

Materiał chroniony prawem autorskim

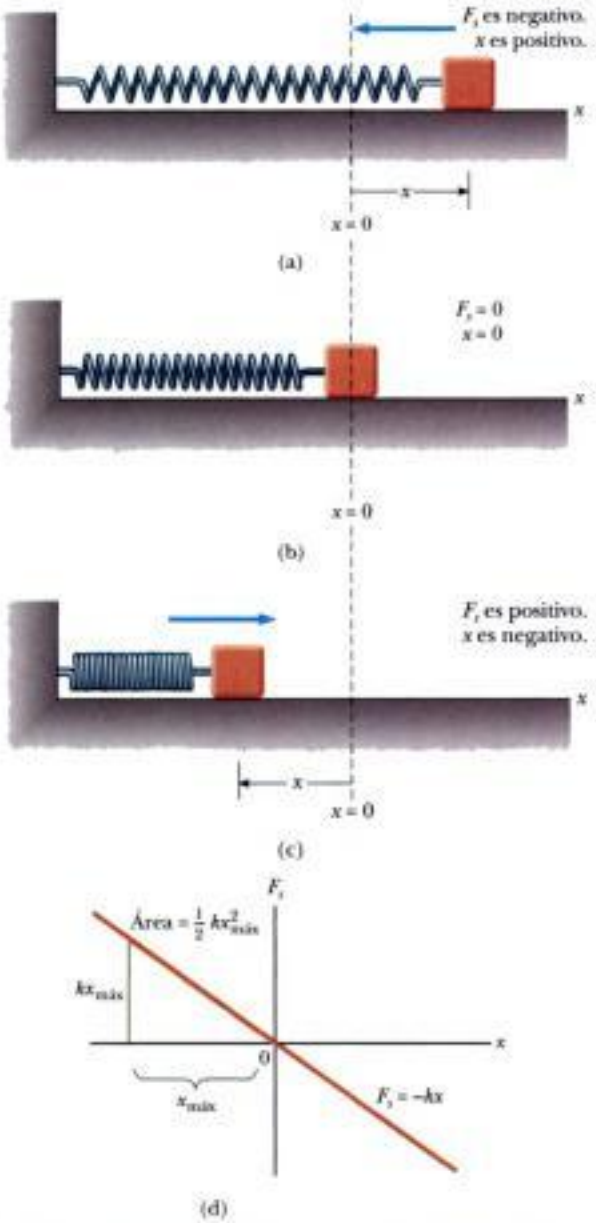


Figura activa 7.10 La fuerza ejercida por un resorte sobre un bloque varía con la posición x del bloque con respecto a la posición de equilibrio $x = 0$. (a) Cuando x es positiva (resorte estirado), la fuerza del resorte está dirigida a la izquierda. (b) Cuando x es cero (longitud natural del resorte), la fuerza del resorte es cero. (c) Cuando x es negativa (resorte comprimido), la fuerza del resorte está dirigida a la derecha. (d) Gráfica de F_s contra x para el sistema bloque-resorte. El trabajo realizado por la fuerza del resorte cuando el bloque se mueve de $-x_{máx}$ a 0 es el área del triángulo sombreado $\frac{1}{2}kx_{máx}^2$.

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, usted podrá observar el movimiento del bloque para varios desplazamientos máximos y constantes de resorte.

hacia la posición de equilibrio ($x = 0$), a veces se denomina *fuerza restauradora*. Si el resorte se comprime hasta que el bloque se encuentre en el punto $-x_{máx}$ y luego se suelta, el bloque se mueve de $-x_{máx}$, pasa por cero y llega a $+x_{máx}$. Si el resorte se estira hasta que el bloque se encuentre en el punto $+x_{máx}$ y luego se suelta, el bloque se mueve de $+x_{máx}$, pasa por cero y llega a $-x_{máx}$. Entonces invierte su dirección, regresa a $+x_{máx}$ y continúa oscilando hacia atrás y hacia delante.

Suponga que el bloque se empuja hacia la izquierda a una posición $-x_{máx}$ y luego se suelta. Identifiquemos el bloque como nuestro sistema y calculemos el trabajo W_s realizado por la fuerza del resorte sobre el bloque cuando éste se mueve de $x_i = -x_{máx}$ a $x_f = 0$. Al

Materiał chroniony prawem autorskim

aplicar la ecuación 7.7 y suponer que el bloque puede ser tratado como una partícula, obtenemos

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s dx = \int_{-x_{máx}}^{0} (-kx)\, dx = \tfrac{1}{2} k x_{máx}^2 \tag{7.10}$$

donde hemos usado la integral $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$ con $n = 1$. El trabajo realizado por la fuerza del resorte es positivo porque la fuerza está en la misma dirección que el desplazamiento del bloque (ambos están a la derecha). Debido a que el bloque llega en $x = 0$ con alguna rapidez, continuará moviéndose hasta que alcance una posición $+x_{máx}$. Cuando consideramos el trabajo realizado por la fuerza del resorte hasta que el bloque se mueve de $x_i = 0$ a $x_f = x_{máx}$, encontramos que $W_s = -\frac{1}{2}kx_{máx}^2$ porque para esta parte del movimiento el desplazamiento es a la derecha y la fuerza del resorte es a la izquierda. Por lo tanto, el trabajo *neto* realizado por la fuerza del resorte cuando el bloque se mueve de $x_i = -x_{máx}$ a $x_f = x_{máx}$ es *cero*.

La figura 7.10d es una gráfica de F_s contra x. El trabajo calculado en la ecuación 7.10 es el área del triángulo sombreado, correspondiente al desplazamiento de $-x_{máx}$ a 0. Debido a que el triángulo tiene base $x_{máx}$ y altura $kx_{máx}$, su área es $\frac{1}{2}kx_{máx}^2$, el trabajo realizado por el resorte dado por la ecuación 7.10.

Si el bloque experimenta un desplazamiento arbitrario de $x = x_i$ a $x = x_f$, el trabajo realizado por la fuerza del resorte sobre el bloque es

Trabajo realizado por un resorte

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\, dx = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2 \tag{7.11}$$

Por ejemplo, si el resorte tiene una constante de fuerza de 80 N/m y se comprime 3.0 cm desde el equilibrio, el trabajo realizado por la fuerza del resorte cuando el bloque se mueve de $x_i = -3.0$ cm a su posición no deformada de $x_f = 0$ es 3.6×10^{-2} J. De la ecuación 7.11 también vemos que el trabajo realizado por la fuerza del resorte es cero para cualquier movimiento que termine donde empezó ($x_i = x_f$). Haremos uso de este importante resultado en el capítulo 8, en el que describimos el movimiento de este sistema con mayor detalle.

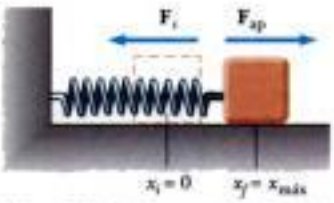


Figura 7.11 Un bloque siendo jalado de $x_i = 0$ a $x_f = x_{máx}$ sobre una superficie sin fricción por una fuerza $\mathbf{F}_{ap}$. Si el proceso se efectúa muy lentamente, la fuerza aplicada es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza de resorte en todo momento.

Las ecuaciones 7.10 y 7.11 describen el trabajo realizado por el resorte sobre el bloque. Ahora consideremos el trabajo realizado sobre el resorte por un *agente externo* que estira el resorte muy lentamente de $x_i = 0$ a $x_f = x_{máx}$, como se ve en la figura 7.11. Podemos calcular este trabajo al observar que en cualquier valor de la posición, la *fuerza aplicada* $\mathbf{F}_{ap}$ es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza del resorte $\mathbf{F}_s$, de modo que $F_{ap} = -(-kx) = kx$. Por lo tanto, el trabajo realizado por esta fuerza aplicada (el agente externo) sobre el sistema bloque-resorte es

$$W_{F_{ap}} = \int_0^{x_{máx}} F_{ap}\, dx = \int_0^{x_{máx}} kx\, dx = \tfrac{1}{2}kx_{máx}^2$$

Este trabajo es igual al negativo del trabajo realizado por la fuerza del resorte para este desplazamiento.

El trabajo realizado por una fuerza aplicada sobre un sistema bloque-resorte entre posiciones arbitrarias del bloque es

$$W_{F_{ap}} = \int_{x_i}^{x_f} F_{ap}\, dx = \int_{x_i}^{x_f} kx\, dx = \tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2 \tag{7.12}$$

Nótese que éste es el negativo del trabajo realizado por el resorte como lo expresa la ecuación 7.11. Esto es consistente con el hecho de que la fuerza del resorte y la fuerza aplicada son de igual magnitud pero en direcciones opuestas.

Pregunta rápida 7.5 Un dardo se coloca en una ballesta de juguete, de carga por resorte, al empujar el resorte una distancia d. Para la siguiente carga, el resorte se comprime una distancia $2d$. ¿Cuánto trabajo se requiere para cargar el segundo dardo en comparación con el requerido para cargar el primero? (a) cuatro veces (b) dos veces (c) el mismo (d) la mitad (e) un cuarto del trabajo.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 7.6 Medición de *k* para un resorte

Una técnica común que se emplea para medir la constante de fuerza de un resorte se describe en la figura 7.12. El resorte está colgado verticalmente y un objeto de masa m está unido a su extremo inferior. Bajo la acción de la "carga" $m\mathbf{g}$, el resorte se estira una distancia d desde su posición de equilibrio.

(A) Si un resorte es estirado 2.0 cm por un objeto suspendido que tiene una masa de 0.55 kg, ¿cuál es la fuerza constante del resorte?

Solución Debido a que el objeto (el sistema) está en reposo, la fuerza de resorte hacia arriba equilibra la fuerza $m\mathbf{g}$ gravitacional hacia abajo. En este caso, aplicamos la ley de Hooke para dar $|\mathbf{F}_s| = kd = mg$, o bien

$$k = \frac{mg}{d} = \frac{(0.55\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)}{2.0 \times 10^{-2}\ \text{m}} = \mathbf{2.7 \times 10^2\ N/m}$$

(B) ¿Cuánto trabajo es realizado por el resorte cuando se estira toda esta distancia?

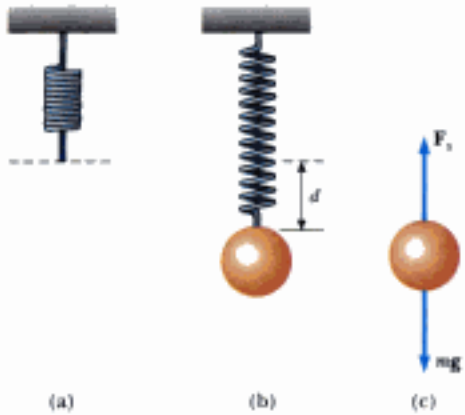


Figura 7.12 (Ejemplo 7.6) Determinación de la constante de fuerza k de un resorte. El alargamiento d es causado por el objeto unido, que tiene un peso $m\mathbf{g}$. Como la fuerza de resorte equilibra la fuerza gravitacional, se deduce que $k = mg/d$.

Solución Con el uso de la ecuación 7.11,

$$W_s = 0 - \tfrac{1}{2}kd^2 = -\tfrac{1}{2}(2.7 \times 10^2\ \text{N/m})(2.0 \times 10^{-2}\ \text{m})^2$$

$$= \mathbf{-5.4 \times 10^{-2}\ J}$$

¿Qué pasaría si? Supongamos que esta medición se hace en un elevador con una aceleración a vertical hacia arriba. ¿La desprevenida experimentadora obtendrá el mismo valor de la constante de resorte?

Respuesta La fuerza $\mathbf{F}_s$ de la figura 7.12 debe ser mayor que $m\mathbf{g}$ para producir una aceleración hacia arriba del objeto. Debido a que $\mathbf{F}_s$ debe aumentar en magnitud, y $|\mathbf{F}_s| = kd$, el resorte debe extenderse más. La experimentadora ve un alargamiento mayor para el mismo peso colgante y, por lo tanto, mide que la constante de resorte es menor que el valor hallado en la parte (A) para $\mathbf{a} = 0$.

La segunda ley de Newton, aplicada al objeto colgante, da

$$\sum F_y = |\mathbf{F}_s| - mg = ma_y$$

$$kd - mg = ma_y$$

$$d = \frac{m(g + a_y)}{k}$$

donde k es la constante del resorte *real*. Ahora, la experimentadora no está consciente de la aceleración, de modo que ella dice que $|\mathbf{F}_s| = k'd = mg$ donde k' es la constante de resorte medida por la experimentadora. Entonces,

$$k' = \frac{mg}{d} = \frac{mg}{\left(\dfrac{m(g + a_y)}{k}\right)} = \frac{g}{g + a_y}k$$

Si la aceleración del elevador es hacia arriba, de modo que a_y es positiva, este resultado muestra que la constante medida de resorte será menor, consistente con nuestro argumento conceptual.

7.5 Energía cinética y el teorema del trabajo y la energía cinética

Hemos investigado el trabajo y lo hemos identificado como un mecanismo para transferir energía hacia un sistema. Uno de los posibles resultados de realizar trabajo sobre un sistema es que éste cambia su rapidez. En esta sección investigamos esta situación e introducimos nuestro primer tipo de energía que un sistema puede poseer, llamado *energía cinética*.

Considere un sistema formado por un solo objeto. La figura 7.13 muestra un bloque de masa m que se mueve con un desplazamiento dirigido a la derecha bajo la acción de una fuerza neta $\Sigma\mathbf{F}$, también dirigida a la derecha. De la segunda ley de Newton sabemos que el bloque se mueve con una aceleración $\mathbf{a}$. Si el bloque se mueve un desplazamiento $\Delta\mathbf{r} = \Delta x\hat{\mathbf{i}} = (x_f - x_i)\hat{\mathbf{i}}$, el trabajo realizado por la fuerza neta $\Sigma\mathbf{F}$ es

$$\sum W = \int_{x_i}^{x_f} \sum F dx \tag{7.13}$$

Si usamos la segunda ley de Newton, podemos sustituir la magnitud de la fuerza neta $\Sigma F = ma$ y luego efectuar las siguientes manipulaciones de la regla de la cadena en el integrando:

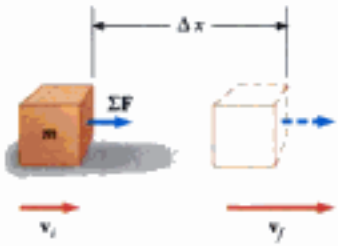


Figura 7.13 Objeto que experimenta un desplazamiento $\Delta\mathbf{r} = \Delta x\hat{\mathbf{i}}$ y un cambio en velocidad bajo la acción de una fuerza neta constante $\Sigma\mathbf{F}$.

Materiał chroniony prawem autorskim

$$\sum W = \int_{x_i}^{x_f} ma\,dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dt}\,dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}\,dx = \int_{v_i}^{v_f} mv\,dv$$

$$\sum W = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \tag{7.14}$$

donde v_i es la rapidez del bloque cuando está en $x = x_i$ y v_f es su velocidad en x_f.

Esta ecuación fue generada por la situación específica de movimiento unidimensional, pero es un resultado general. Nos dice que el trabajo realizado por la fuerza neta sobre una partícula de masa m es igual a la diferencia entre los valores inicial y final de una cantidad $\frac{1}{2}mv^2$. La cantidad $\frac{1}{2}mv^2$ representa la energía asociada con el movimiento de la partícula. Esta cantidad es tan importante, que se le ha dado un nombre especial: **energía cinética.** La ecuación 7.14 expresa que el trabajo neto realizado sobre una partícula por una fuerza neta $\Sigma\mathbf{F}$ que actúa sobre ella es igual al cambio en energía cinética de la partícula.

En general, la energía cinética K de una partícula de masa m que se mueve con una rapidez v se define como

Energía cinética

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{7.15}$$

La energía cinética es una cantidad escalar y tiene las mismas unidades que el trabajo. Por ejemplo, un objeto de 2.0 kg que se mueve con una rapidez de 4.0 m/s tiene una energía cinética de 16 J. La tabla 7.1 es una lista de energías cinéticas para varios objetos.

A veces es conveniente escribir la ecuación 7.14 en la forma de

Teorema del trabajo y la energía cinética

$$\sum W = K_f - K_i = \Delta K \tag{7.16}$$

Otra forma de escribir esto es $K_f = K_i + \Sigma W$, que nos dice que la energía cinética es igual a la energía cinética inicial, más el cambio debido al trabajo realizado.

La ecuación 7.16 es un importante resultado conocido como **teorema del trabajo y la energía cinética:**

> En el caso en que se realice trabajo sobre un sistema, y el único cambio del sistema sea en su rapidez, el trabajo realizado por la fuerza neta es igual al cambio en energía cinética del sistema.

El teorema del trabajo y la energía cinética indica que la rapidez de una partícula *aumentará* si el trabajo neto realizado sobre ella sea *positivo*, porque la energía cinética final será mayor que la energía cinética inicial. La rapidez *disminuirá* si el trabajo neto es *negativo*, porque la energía cinética final será menor que la energía cinética inicial.

¡ADVERTENCIA!

7.6 Condiciones para el teorema del trabajo y la energía cinética

El teorema del trabajo y la energía cinética es importante, pero limitado en su aplicación; no es un principio general. Hay muchas situaciones en las que otros cambios en el sistema ocurren además de su rapidez, y hay otras interacciones con el entorno además del trabajo. Un principio más general que comprende la energía es la conservación de energía en la sección 7.6.

Tabla 7.1

Energías cinéticas para varios objetos

Objeto	Masa (kg)	Rapidez (m/s)	Energía cinética (J)
Tierra orbitando al Sol	5.98×10^{24}	2.98×10^{4}	2.65×10^{33}
Luna orbitando a la Tierra	7.35×10^{22}	1.02×10^{3}	3.82×10^{28}
Cohete moviéndose a rapidez de escape*	500	1.12×10^{4}	3.14×10^{10}
Automóvil a 65 mi/h	2 000	29	8.4×10^{5}
Atleta corriendo	70	10	3 500
Piedra que cae desde 10 m	1.0	14	98
Pelota de golf a rapidez terminal	0.046	44	45
Gota de lluvia a rapidez terminal	3.5×10^{-5}	9.0	1.4×10^{-3}
Molécula de oxígeno en aire	5.3×10^{-26}	500	6.6×10^{-21}

* Rapidez de escape es la rapidez mínima que debe alcanzar un objeto cerca de la superficie de la Tierra para alejarse infinitamente de ésta.

Materiał chroniony prawem autorskim

Debido a que hasta aquí sólo hemos investigado el movimiento de traslación por el espacio, llegamos al teorema del trabajo y la energía cinética al analizar situaciones que comprenden movimiento de traslación. Otro tipo de movimiento es el *rotacional*, en el que un objeto gira alrededor de un eje. Estudiaremos este tipo de movimiento en el capítulo 10. El teorema del trabajo y la energía cinética también es válido para sistemas que experimentan un cambio en la rapidez rotacional debido al trabajo realizado sobre el sistema. El molino de viento de la fotografía con que inicia este capítulo es un ejemplo de trabajo que causa un movimiento rotacional.

El teorema del trabajo y la energía cinética nos va a aclarar un resultado que hemos visto antes en este capítulo y que puede parecer extraño. En la sección 7.4 llegamos a un resultado de cero trabajo neto realizado cuando hicimos que un resorte empujara un bloque $x_i = -x_{máx}$ a $x_f = x_{máx}$. Nótese que la rapidez del bloque está cambiando continuamente durante este proceso, de modo que puede parecer complicado analizar este proceso. La cantidad ΔK del teorema del trabajo y la energía cinética, sin embargo, sólo se refiere a los puntos inicial y final para las cantidades de rapidez, no depende de detalles de la trayectoria seguida entre estos puntos. Por lo tanto, debido a que la rapidez es cero en los puntos inicial y final del movimiento, el trabajo neto realizado sobre el bloque es cero. Con frecuencia veremos este concepto de independencia de trayectoria en planteamientos similares de problemas.

Ya antes, indicamos que el trabajo se puede considerar como un mecanismo para transferir energía en un sistema. La ecuación 7.16 es un enunciado matemático de este concepto. Realizamos trabajo ΣW sobre un sistema y el resultado es una transferencia de energía al otro lado de la frontera del sistema. El resultado sobre el sistema, en el caso de la ecuación 7.16, es un cambio ΔK en energía cinética. En la siguiente sección exploraremos con más detalle esta idea.

¡ADVERTENCIA!

7.7 El teorema del trabajo y la energía cinética: rapidez, no velocidad

El teorema del trabajo y la energía cinética relaciona el trabajo con un cambio en la *rapidez* de un objeto, no un cambio en su velocidad. Por ejemplo, si un objeto está en movimiento circular uniforme, la rapidez es constante. Aun cuando la velocidad está cambiando, ningún trabajo es realizado por la fuerza que ocasiona el movimiento circular.

Pregunta rápida 7.6 Un dardo se coloca en una ballesta de juguete, de carga por resorte, al empujar el resorte una distancia d. Para la siguiente carga, el resorte se comprime una distancia $2d$. ¿Qué tanto más rápido sale de la ballesta el segundo dardo en comparación con el primero? (a) cuatro veces más rápido (b) dos veces más rápido (c) igual (d) la mitad de rápido (e) un cuarto de rápido.

Ejemplo 7.7 Un bloque que se jala sobre una superficie sin fricción

Un bloque de 6.0 kg, inicialmente en reposo, es jalado a la derecha a lo largo de una superficie horizontal sin fricción por una fuerza de 12 N. Encuentre la rapidez del bloque después que se ha movido 3.0 m.

Solución Hemos hecho un dibujo de esta situación en la figura 7.14. Podríamos aplicar las ecuaciones de cinemática para determinar la respuesta, pero practiquemos el planteamiento de energía. El bloque es el sistema y hay tres fuerzas externas que actúan sobre él. La fuerza normal equilibra la fuerza gravitacional sobre el bloque, y ninguna de estas fuerzas que actúan verticalmente realiza trabajo sobre el bloque porque sus puntos de aplicación están desplazados horizontalmente. Por lo tanto, la fuerza externa neta que actúa sobre el bloque es la fuerza de 12 N. El trabajo realizado por esta fuerza es

$$W = F\Delta x = (12\,\text{N})(3.0\,\text{m}) = 36\,\text{J}$$

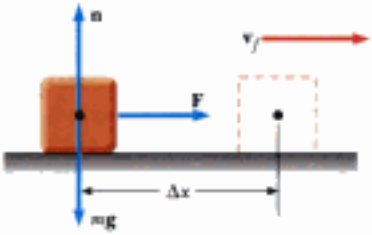


Figura 7.14 (Ejemplo 7.7) Un bloque jalado a la derecha, sobre una superficie sin fricción, por una fuerza horizontal constante.

Usando el teorema del trabajo y la energía y observando que la energía cinética inicial es cero, obtenemos

$$W = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - 0$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(36\,\text{J})}{6.0\,\text{kg}}} = \mathbf{3.5\,m/s}$$

¿Qué pasaría si? **Suponga que la magnitud de la fuerza en este ejemplo se duplica a $F' = 2F$. El bloque de 6.0 kg acelera a 3.5 m/s debido a esta fuerza aplicada mientras se mueve un desplazamiento $\Delta x'$. (A) ¿Cómo se compara el desplazamiento $\Delta x'$ con el desplazamiento original Δx? (B) ¿Cómo es que el intervalo de tiempo $\Delta t'$ para que el bloque acelere desde el reposo a 3.5 m/s, se compare con el intervalo original Δt?**

Respuesta (A) Si jalamos con más fuerza, el bloque debe acelerar a una rapidez más alta en una distancia más corta, de modo que esperamos que $\Delta x' < \Delta x$. Matemáticamente, del teorema del trabajo y la energía cinética, $W = \Delta K$, encontramos

$$F'\Delta x' = \Delta K = F\Delta x$$

$$\Delta x' = \frac{F}{F'}\Delta x = \frac{F}{2F}\Delta x = \tfrac{1}{2}\Delta x$$

y la distancia es más corta, como lo sugiere nuestro argumento conceptual.

Materiał chroniony prawem autorskim

(B) Si jalamos con más fuerza, el bloque debe acelerar a una rapidez más alta en un intervalo de tiempo más corto, de modo que esperamos que $\Delta t' < \Delta t$. Matemáticamente, de la definición de velocidad promedio,

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta x}{\bar{v}}$$

Debido a que la fuerza original y la fuerza duplicada producen el mismo cambio en velocidad, la velocidad promedio $\bar{v}$ es la misma en ambos casos. Por lo tanto,

$$\Delta t' = \frac{\Delta x'}{\bar{v}} = \frac{\frac{1}{2}\Delta x}{\bar{v}} = \frac{1}{2}\Delta t$$

y el intervalo de tiempo es más corto, consistente con nuestro argumento conceptual.

Ejemplo conceptual 7.8 ¿La rampa reduce el trabajo necesario?

Un hombre desea cargar un refrigerador sobre un camión, usando para ello una rampa, como se muestra en la figura 7.15. Él dice que sería necesario menos trabajo para cargar el camión si aumenta la longitud L de la rampa. ¿Es válida su afirmación?

Solución No. Suponga que el refrigerador es subido por la rampa a rapidez constante en un "diablito". Entonces, $\Delta K = 0$. La fuerza normal ejercida por la rampa sobre el refrigerador está dirigida a 90° respecto al desplazamiento y no realiza trabajo sobre el refrigerador. Como $\Delta K = 0$, el teorema del trabajo y la energía da

$$W_{\text{neto}} = W_{\text{por el hombre}} + W_{\text{por la gravedad}} = 0$$

El trabajo realizado por la fuerza gravitacional es igual al producto del peso mg del refrigerador, la altura h por la que es desplazado, y cos 180°, o sea $W_{\text{por la gravedad}} = -mgh$. (El signo negativo surge porque la fuerza gravitacional hacia abajo es opuesta al desplazamiento). En consecuencia, el hombre debe realizar la misma cantidad de trabajo mgh sobre el refrigerador, *cualquiera que sea* la longitud de la rampa. Aun cuando se necesite menos fuerza con una rampa más larga, esa fuerza debe actuar sobre una mayor distancia.

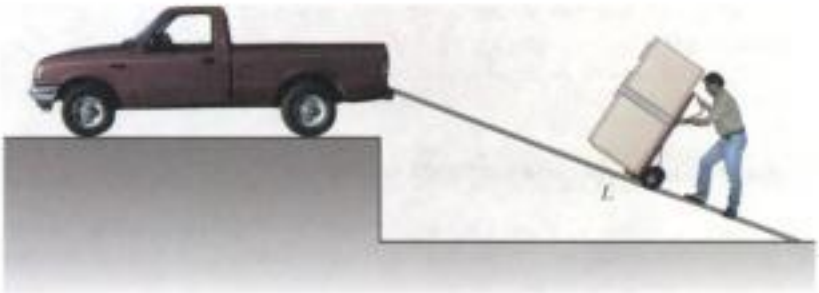


Figura 7.15 (Ejemplo conceptual 7.8) Un refrigerador sujeto a un "diablito" sin fricción sube por una rampa con rapidez constante.

Figura 7.16 Un libro que se desliza a la derecha sobre una superficie horizontal, reduce su velocidad en presencia de una fuerza de fricción cinética que actúa a la izquierda. La velocidad inicial del libro es $\mathbf{v}_i$, y su velocidad final es $\mathbf{v}_f$. La fuerza normal y la fuerza de gravedad no se incluyen en el diagrama porque son perpendiculares a la dirección de movimiento y, por lo tanto, no influyen en la rapidez del libro.

7.6 El sistema no aislado; conservación de la energía

Hemos visto ejemplos en los que un objeto, modelado como una partícula, es sometido a varias fuerzas que resultan en un cambio en la energía cinética del sistema. Esta situación tan simple es el primer ejemplo del **sistema no aislado,** situación común en problemas de física. Los problemas físicos para los cuales esta situación es apropiada, comprenden sistemas que interactúan con su entorno o son influidos por éste, lo cual produce una clase de cambio en el sistema. Si un sistema no interactúa con su entorno, es un **sistema aislado,** que estudiaremos en el capítulo 8.

El teorema del trabajo y la energía cinética es nuestro primer ejemplo de una ecuación de energía apropiada para un sistema no aislado. En el caso del teorema del trabajo y la energía cinética, la interacción es el trabajo realizado por la fuerza externa, y la cantidad del sistema que cambia es la energía cinética.

Materiał chroniony prawem autorskim

Además de energía cinética, ahora presentamos un segundo tipo de energía que puede poseer un sistema. Imaginemos que el libro de la figura 7.16 se desliza a la derecha sobre la superficie de una mesa pesada y reduce su velocidad debido a la fuerza de fricción. Supongamos que la *superficie* es el sistema. Entonces la fuerza de fricción desde el libro que se desliza realiza trabajo sobre la superficie. La fuerza sobre la superficie es a la derecha y el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza es a la derecha; el trabajo es positivo. Pero la superficie no se mueve después de que el libro se ha detenido. Se ha realizado trabajo positivo sobre ésta, pero no hay aumento en su energía cinética. ¿Es ésta una violación del teorema del trabajo y la energía?

No es realmente una violación, porque esta situación no se ajusta a la descripción de las condiciones dadas para el teorema del trabajo y la energía cinética. Se realiza trabajo sobre el sistema de la superficie, pero el resultado de ese trabajo *no es* un aumento en energía cinética. De la experiencia diaria de deslizar superficies con fricción, es probable que el lector sepa que la superficie estará *más caliente* después que el libro se haya deslizado sobre ella. (Frótese las manos rápidamente para comprobar esto). Por lo tanto, el trabajo que fue realizado sobre la superficie, ha calentado la superficie en lugar de aumentar su rapidez. A la energía asociada con la temperatura de un cuerpo la llamamos **energía interna,** simbolizada por E_{int}. (En el capítulo 20 definiremos la energía interna en una forma más general). En este caso, el trabajo realizado sobre la superficie representa energía transferida hacia el sistema, pero aparece en el sistema como energía interna en lugar de energía cinética.

Ahora hemos visto dos métodos de almacenar energía en un sistema: energía cinética relacionada con el movimiento del sistema, y energía interna relacionada con su temperatura. Un tercer método, que veremos en el capítulo 8, es *energía potencial.* Esta energía está relacionada a la configuración de un sistema en el que sus componentes interactúan por fuerzas. Por ejemplo, cuando se estira un resorte, *energía potencial elástica* está almacenada en el resorte debido a la fuerza de interacción entre las espiras del resorte. Otros tipos de energía potencial incluyen la gravitacional y la eléctrica.

Hasta ahora hemos visto sólo una forma de transferir energía hacia un sistema, y es el trabajo. A continuación mencionamos otras formas de transferir energía hacia o desde un sistema. Los detalles de estos procesos se estudiarán en otras secciones de este libro. Ilustramos éstas en la figura 7.17 y las resumimos como sigue:

El **trabajo,** como hemos visto en este capítulo, es un método de transferir energía a un sistema al aplicarle una fuerza y causar un desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza (figura 7.17a).

Las **ondas mecánicas** (capítulos 16-18) son un medio de transferir energía al permitir que una perturbación se propague por el aire u otro medio. Éste es el método por el cual la energía (que detectamos como sonido) sale de un radio reloj por el altavoz y entra en nuestros oídos para estimular el proceso de escucha (figura 7.17b). Otros ejemplos de ondas mecánicas son ondas sísmicas y ondas oceánicas.

El **calor** (capítulo 20) es un mecanismo de transferencia de energía que es impulsado por una diferencia de temperatura entre dos regiones en el espacio. Un ejemplo claro es la conducción térmica, un mecanismo de transferencia de energía por colisiones microscópicas. Por ejemplo, una cuchara metálica en una taza de café, se calienta porque electrones y átomos de rápido movimiento en la parte sumergida de la cuchara chocan con otros más lentos en la parte cerca del mango de la cuchara (figura 7.17c). Estas partículas se mueven más rápido por las colisiones y chocan con el siguiente grupo de partículas lentas. Por lo tanto, la energía interna del mango de la cuchara se eleva por transferencia de energía debido a este proceso de choques.[4]

La **transferencia de materia** (capítulo 20) comprende situaciones en las que la materia cruza físicamente la frontera de un sistema, llevando energía con ella. Ejemplos incluyen llenar de gasolina el tanque de un coche (figura 7.17d), y llevar energía a los cuartos de una casa por aire caliente circulante desde un horno, proceso llamado *convección.*

¡ADVERTENCIA!

7.8 El calor no es una forma de energía

La palabra *calor* es una de las más mal empleadas en nuestro lenguaje popular. En este texto, el calor es un método de *transferir* energía, *no es* una forma de almacenar energía. Por lo tanto, frases como "contenido calórico," "el calor del verano," y "el calor escapó", representan usos de esta palabra que son inconsistentes con nuestra definición física. Vea el capítulo 20.

[4] El proceso que llamamos calor también puede proceder por convección y radiación, así como por conducción. La convección y radiación, descritas en el capítulo 20, se traslapan con otros tipos de transferencia de energía en nuestra lista de seis.

Materiał chroniony prawem autorskim

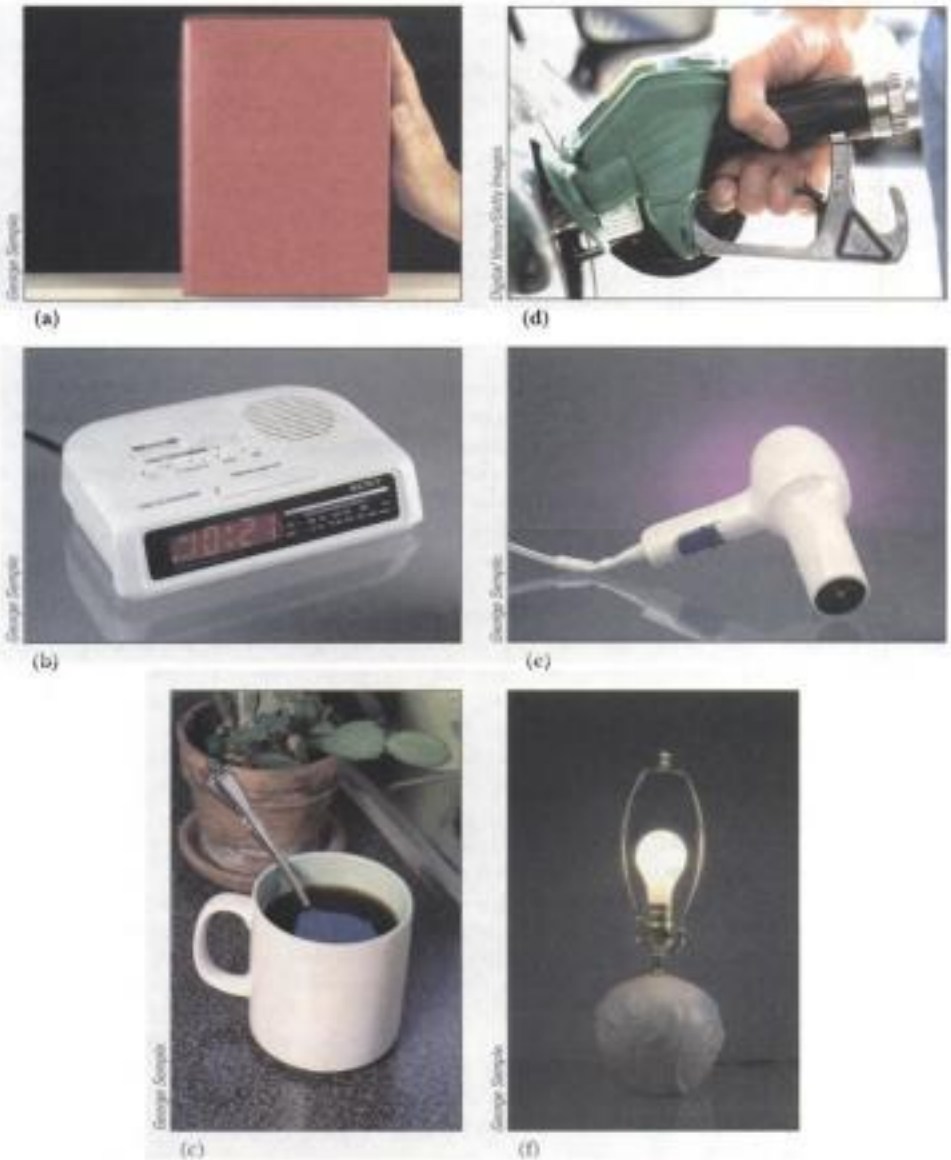


Figura 7.17 Mecanismos de transferencia de energía. (a) Se transfiere energía al bloque por medio de *trabajo;* (b) sale energía de la radio desde el altavoz por *ondas mecánicas;* (c) se transfiere energía al mango de la cuchara por medio de *calor;* (d) entra energía al tanque de un coche por *transferencia de materia;* (e) entra energía a la secadora de pelo por *transmisión eléctrica;* y *(f)* sale energía de la bombilla eléctrica por *radiación electromagnética.*

La **transmisión eléctrica** (capítulos 5 y 6 del volumen II) comprende transferencia de energía por medio de corrientes eléctricas. Ésta es la forma en que se transfiere energía en una secadora de pelo (figura 7.17e), sistema estéreo, o cualquier otro dispositivo eléctrico.

La **radiación electromagnética** (capítulo 12 del volumen II) se refiere a ondas electromagnéticas tales como luz, microondas, ondas de radio, etcétera (figura 7.17f). Ejemplos de este método de transferencia incluyen cocinar una papa en un horno de microondas y energía luminosa que se traslada del Sol a la Tierra a través del espacio.[5]

Una de las características centrales del planteamiento de energía, es la noción de que **no podemos crear ni destruir energía; la energía siempre se *conserva*.** Por lo tanto, **si cam-**

[5] La radiación electromagnética y el trabajo realizado por fuerzas de campo son los únicos mecanismos de transferencia de energía que no requieren moléculas del entorno presentes en la frontera de un sistema. En consecuencia, los sistemas rodeados por un vacío (por ejemplo planetas) sólo pueden intercambiar energía con el entorno por medio de estas dos posibilidades.

Materiał chroniony prawem autorskim

bia la cantidad total de energía de un sistema, *sólo* puede deberse al hecho de que la energía ha cruzado la frontera del sistema por un mecanismo de transferencia, como por ejemplo uno de los citados líneas antes. Éste es un enunciado general del principio de **conservación de energía.** Podemos describir matemáticamente esta idea como sigue:

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \sum T \tag{7.17}$$

Conservación de la energía

donde E_{sistema} es la energía total del sistema, incluyendo todos los métodos de almacenamiento de energía (cinética, interna y potencial, como se explica en el capítulo 8) y T es la cantidad de energía transferida al otro lado de la frontera del sistema por medio de algún mecanismo. Dos de nuestros mecanismos de transferencia tienen notaciones simbólicas bien establecidas. Para el trabajo, $T_{\text{trabajo}} = W$, como hemos visto en el capítulo actual, y para calor, $T_{\text{calor}} = Q$, como se define en el capítulo 20. Los otros cuatro miembros de nuestra lista no tienen símbolos establecidos.

Esto no es más complicado en teoría de lo que es balancear un estado de cuenta de cheques. Si la cuenta del autor es el sistema, el cambio en el saldo para un mes dado es la suma de todas las transferencias, depósitos, retiros, comisiones, intereses y cheques expedidos. Puede ser útil para el lector considerar la energía como la *¡moneda de la naturaleza!*

Suponga que se aplica una fuerza a un sistema no aislado y el punto de aplicación de la fuerza se mueve determinado desplazamiento. Suponga además que el único efecto sobre el sistema es cambiar su rapidez. Entonces el único mecanismo de transferencia es el trabajo (así que ΣT en la ecuación 7.17 se reduce a sólo W) y la única clase de energía del sistema que cambia es la energía cinética (así que $\Delta E_{\text{sistema}}$ se reduce a sólo ΔK). La ecuación 7.17 se convierte entonces en

$$\Delta K = W$$

que es el teorema del trabajo y la energía cinética. El teorema del trabajo y la energía cinética es un caso especial del principio más general de conservación de energía. Veremos varios casos especiales más en capítulos posteriores.

Pregunta rápida 7.7 ¿Por cuáles mecanismos de transferencia entra y sale energía (a) de un televisor; (b) de una podadora de césped con motor de gasolina; (c) un sacapuntas accionado a mano?

Pregunta rápida 7.8 Considere un bloque que se desliza sobre una superficie horizontal con fricción. Haga caso omiso de cualquier sonido que pudiera hacer el deslizamiento. Si consideramos que el sistema es el *bloque*, este sistema es (a) aislado (b) no aislado (c) imposible de determinar.

Pregunta rápida 7.9 Si consideramos que el sistema de la Pregunta rápida 7.8 es la *superficie*, este sistema es (a) aislado (b) no aislado (c) imposible de determinar.

Pregunta rápida 7.10 Si consideramos que los sistemas de la Pregunta rápida 7.8 son *el bloque y la superficie*, este sistema es (a) aislado (b) no aislado (c) imposible de determinar.

7.7 Situaciones que involucran fricción cinética

Considere de nuevo el libro de la figura 7.16 que se desliza a la derecha sobre la superficie de una mesa pesada y reduce su velocidad debido a la fuerza de fricción. Ésta última realiza trabajo porque hay una fuerza y un desplazamiento. Recuerde, sin embargo, que nuestras ecuaciones para trabajo comprenden el desplazamiento *del punto de aplicación de la fuerza*. La

Materiał chroniony prawem autorskim

fuerza de fricción se extiende sobre toda el área de contacto de un objeto que se desliza sobre una superficie, de modo que la fuerza no está localizada en un punto. Además, las magnitudes de las fuerzas de fricción en varios puntos están cambiando constantemente a medida que se presentan soldaduras por puntos, la superficie y el bloque se deforman localmente, etcétera. Los puntos de aplicación de la fuerza de fricción sobre el libro están saltando en toda la cara del libro que esté en contacto con la superficie. Esto significa que el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza de fricción (suponiendo que pudiéramos calcularla) no es el mismo que el desplazamiento del libro.

El teorema del trabajo y la energía cinética es válido para una partícula o cuerpo que se pueda modelar como partícula. Cuando un cuerpo no pueda ser tratado como partícula, sin embargo, las cosas se complican más. Para estas clases de situaciones, la segunda ley de Newton todavía es válida para el sistema, aun cuando el teorema del trabajo y la energía cinética no lo sea. En el caso de un objeto no deformable, como nuestro libro que se desliza sobre la superficie,[6] podemos manejar esto en una forma relativamente sencilla.

Si iniciamos desde una situación en la que una fuerza constante se aplica al libro, podemos seguir un procedimiento similar al del desarrollo de la ecuación 7.14. Comenzamos por multiplicar cada lado de la segunda ley de Newton (sólo componente x) por un desplazamiento Δx del libro:

$$\left(\sum F_x\right)\Delta x = (ma_x)\Delta x \tag{7.18}$$

Para una partícula bajo aceleración constante, sabemos que las siguientes relaciones (ecuaciones 2.9 y 2.11) son válidas.

$$a_x = \frac{v_f - v_i}{t} \qquad \Delta x = \tfrac{1}{2}(v_i + v_f)t$$

donde v_i es la rapidez en $t = 0$ y v_f es la rapidez en el tiempo t. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 7.18 tendremos

$$\left(\sum F_x\right)\Delta x = m\left(\frac{v_f - v_i}{t}\right)\tfrac{1}{2}(v_i + v_f)t$$

$$\left(\sum F_x\right)\Delta x = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$

Esto *se ve* como el teorema del trabajo y la energía cinética, pero *el lado izquierdo no se ha llamado trabajo*. La cantidad Δx es el desplazamiento del libro, *no es* el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza de fricción.

Ahora apliquemos esta ecuación a un libro que se ha proyectado por una superficie. Imaginemos que el libro tiene una rapidez inicial que se reduce debido a la fricción, la única fuerza en la dirección horizontal. La fuerza neta sobre el libro es la fuerza de fricción cinética $\mathbf{f}_k$, que está dirigida en sentido opuesto al desplazamiento Δx. Por lo tanto,

$$\left(\sum F_x\right)\Delta x = -f_k\Delta x = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 = \Delta K$$

$$-f_k\Delta x = \Delta K \tag{7.19}$$

que matemáticamente describe la disminución en energía cinética debida a la fuerza de fricción.

Hemos generado estos resultados al suponer que un libro se mueve a lo largo de una recta. Un cuerpo también podría deslizarse sobre una superficie con fricción y seguir una trayectoria curva. En este caso, la ecuación 7.19 debe generalizarse como:

Cambio en energía cinética debido a la fricción

$$-f_k d = \Delta K \tag{7.20}$$

donde d es la longitud de la trayectoria seguida por un objeto.

Si hay otras fuerzas además de la fricción que actúen sobre un cuerpo, el cambio en energía cinética es la suma del debido a las otras fuerzas del teorema del trabajo y la energía cinética, y debido a la fricción:

[6] La forma general del libro permanece igual, por eso decimos que no es deformable, pero a nivel microscópico hay deformación en la cara del libro cuando se desliza sobre la superficie.

Materiał chroniony prawem autorskim

$$\Delta K = -f_k d + \sum W_{\text{otras fuerzas}} \tag{7.21a}$$

o bien

$$K_f = K_i - f_k d + \sum W_{\text{otras fuerzas}} \tag{7.21b}$$

Ahora considere el sistema más grande del libro y la superficie cuando el libro se desliza bajo la influencia de sólo una fuerza de fricción. No hay trabajo realizado al otro lado de la frontera de este sistema, el sistema no interactúa con el entorno. No hay otros tipos de transferencia de energía que ocurran al otro lado de la frontera del sistema, suponiendo que hagamos caso omiso del inevitable sonido que hace el libro al deslizarse. En este caso, la ecuación 7.17 se convierte en

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

El cambio en energía cinética de este sistema del libro, más la superficie, es el mismo que el cambio en energía cinética del libro sólo en la ecuación 7.20, porque el libro es la única parte del sistema libro-superficie que se mueve. Entonces,

$$-f_k d + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

$$\Delta E_{\text{int}} = f_k d \tag{7.22}$$

Cambio en energía interna debido a la fricción

Por lo tanto, el aumento en energía interna del sistema es igual al producto de la fuerza de fricción y el desplazamiento del libro.

La conclusión de este análisis es que **el resultado de una fuerza de fricción es transformar la energía cinética en energía interna, y el aumento en energía interna es igual a la disminución en energía cinética.**

Pregunta rápida 7.11 Una persona viaja por una autopista a 65 mi/h. Su coche tiene energía cinética. De pronto patina el coche hasta detenerse debido a un congestionamiento de tránsito. ¿En dónde está la energía cinética que su coche tenía? (a) Toda está en energía interna en el camino. (b) Toda está en energía interna en las llantas. (c) Parte de ella se ha transformado a energía interna y parte se ha transferido por ondas mecánicas. (d) Toda ha sido transferida por su coche por medio de varios mecanismos.

Ejemplo 7.9 Un bloque que se jala sobre una superficie rugosa

Un bloque de 6.0 kg, inicialmente en reposo, es jalado a la derecha a lo largo de una superficie horizontal por una fuerza horizontal constante de 12 N.

(A) Encuentre la rapidez del bloque después que se ha movido 3.0 m si las superficies en contacto tienen un coeficiente de fricción cinética de 0.15. (Este es el ejemplo 7.7, modificado para que la superficie ya no sea sin fricción).

Solución *Conceptualice* este problema al observar que la superficie rugosa va a aplicar una fuerza de fricción opuesta a la fuerza aplicada. Como consecuencia de esto, esperamos que la rapidez sea menor que la hallada en el ejemplo 7.7. La superficie es rugosa y nos dan fuerzas y una distancia, de modo que clasificamos ésta como una situación que comprende fricción cinética que debe ser manejada por medio de la ecuación 7.21. Para analizar el problema, hemos hecho un dibujo de esta situación en la figura 7.18a. Identificamos el bloque como el sistema, y hay cuatro fuerzas externas que interactúan con el sistema. La fuerza normal equilibra la fuerza gravitacional sobre el bloque, y ninguna de estas fuerzas que actúan verticalmente realiza trabajo sobre el bloque porque sus puntos de aplicación están desplazados horizontalmente. La fuerza aplicada realiza trabajo igual que en el ejemplo 7.7:

$$W = F\Delta x = (12\ \text{N})(3.0\ \text{m}) = 36\ \text{J}$$

En este caso, debemos usar la ecuación 7.21a para calcular el cambio de energía cinética debido a la fricción, $\Delta K_{\text{fricción}}$. Debido a que el bloque está en equilibrio en la dirección vertical, la fuerza normal $\mathbf{n}$ contrabalancea la fuerza gravitacional $m\mathbf{g}$, de modo que tenemos $n = mg$. Por lo tanto, la magnitud de la fuerza de fricción es

$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg = (0.15)(6.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 8.82\ \text{N}$$

El cambio en energía cinética del bloque debido a la fricción es

$$\Delta K_{\text{fricción}} = -f_k d = -(8.82\text{N})(3.0\text{m}) = -26.5\ \text{J}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

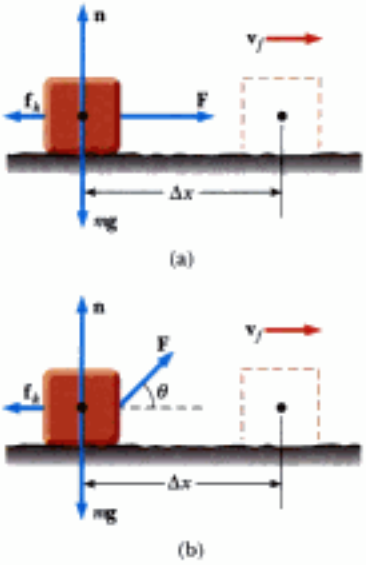


Figura 7.18 (Ejemplo 7.9) (a) Bloque jalado a la derecha sobre una superficie rugosa por una fuerza horizontal constante. (b) La fuerza aplicada está a un ángulo θ con respecto a la horizontal.

La rapidez final del bloque se sigue de la ecuación 7.21b:

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 = \tfrac{1}{2}mv_i^2 - f_k d + \sum W_{\text{otras fuerzas}}$$

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + \frac{2}{m}\left(-f_k d + \sum W_{\text{otras fuerzas}}\right)}$$

$$= \sqrt{0 + \frac{2}{6.0\,\text{kg}}(-26.5\,\text{J} + 36\,\text{J})}$$

$$= \mathbf{1.8\,m/s}$$

Para finalizar este problema nótese que, después de cubrir la misma distancia sobre una superficie sin fricción (vea el ejemplo 7.7), la rapidez del bloque fue de 3.5 m/s.

(B) Suponga que la fuerza **F** se aplica a un ángulo θ, como se muestra en la figura 7.18b. ¿A qué ángulo debe aplicarse la fuerza para lograr la máxima rapidez posible después que el bloque se ha movido 3.0 m a la derecha?

Solución El trabajo realizado por la fuerza aplicada es ahora

$$W = F\Delta x\cos\theta = Fd\cos\theta$$

donde $\Delta x = d$ porque la trayectoria seguida por el bloque es una recta. El bloque está en equilibrio en la dirección vertical, por lo que

$$\sum F_y = n + F\,\text{sen}\,\theta - mg = 0$$

y

$$n = mg - F\,\text{sen}\,\theta$$

Debido a que $K_i = 0$, la ecuación 7.21b se puede escribir

$$\begin{aligned} K_f &= -f_k d + \sum W_{\text{otras fuerzas}} \\ &= -\mu_k n d + Fd\cos\theta \\ &= -\mu_k(mg - F\,\text{sen}\,\theta)d + Fd\cos\theta \end{aligned}$$

Maximizar la rapidez es equivalente a maximizar la energía cinética final. En consecuencia, derivamos K_f con respecto a θ e igualamos el resultado a cero:

$$\frac{d(K_f)}{d\theta} = -\mu_k(0 - F\cos\theta)d - Fd\,\text{sen}\,\theta = 0$$

$$\mu_k\cos\theta - \text{sen}\,\theta = 0$$

$$\tan\theta = \mu_k$$

Para $\mu_k = 0.15$, tenemos

$$\theta = \tan^{-1}(\mu_k) = \tan^{-1}(0.15) = \mathbf{8.5°}$$

Ejemplo conceptual 7.10 Física útil para conducir con más seguridad

Un coche que corre a una rapidez inicial v patina una distancia d hasta detenerse después de aplicar fuertemente los frenos. Si se supone que su rapidez inicial es ahora de $2v$ en el momento de aplicar fuertemente los frenos, estime la distancia que patina.

Solución Supongamos que la fuerza de fricción cinética entre el coche y la superficie del pavimento es una constante e igual para ambas magnitudes de rapidez. Según la ecuación 7.20, la fuerza de fricción multiplicada por la distancia d es igual a la energía cinética inicial del coche (porque $K_f = 0$). Si la rapidez se duplica, como en este ejemplo, la energía cinética se cuadruplica. Para una fuerza de fricción dada, la distancia recorrida es cuatro veces más grande cuando la rapidez inicial se duplica, y por lo tanto la distancia estimada que el coche se desliza es $4d$.

Ejemplo 7.11 Un sistema de bloque-resorte

Un bloque de masa 1.6 kg se sujeta a un resorte horizontal que tiene una constante de fuerza de 1.0×10^3 N/m, como se ve en la figura 7.10. El resorte se comprime 2.0 cm y luego se suelta desde el reposo.

(A) Calcule la rapidez del bloque cuando pasa por la posición de equilibrio $x = 0$ si la superficie es sin fricción.

Solución En esta situación, el bloque inicia con $v_i = 0$ en $x_i = -2.0$ cm, y deseamos hallar v_f en $x_f = 0$. Usamos la ecuación 7.10 para hallar el trabajo realizado por el resorte con $x_{\text{máx}} = x_i = -2.0\,\text{cm} = -2.0 \times 10^{-2}$ m:

$$W_s = \tfrac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2 = \tfrac{1}{2}(1.0 \times 10^3\,\text{N/m})(-2.0 \times 10^{-2}\,\text{m})^2 = 0.20\,\text{J}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Con el uso del teorema del trabajo y la energía cinética con $v_i = 0$, hacemos que el cambio en energía cinética del bloque sea igual al trabajo realizado sobre él por el resorte:

$$W_s = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + \frac{2}{m}W_s}$$

$$= \sqrt{0 + \frac{2}{1.6\,\text{kg}}(0.20\,\text{J})}$$

$$= \mathbf{.50\,m/s}$$

(B) Calcule la rapidez del bloque cuando pase por la posición de equilibrio si una fuerza de fricción constante de 4.0 N retarda su movimiento desde el momento en que es soltado.

Solución Ciertamente, la respuesta tiene que ser menor que lo que encontramos en la parte (A) porque la fuerza de fricción retarda el movimiento. Usamos la ecuación 7.20 para calcular la energía cinética perdida debido a la fricción y sumamos este valor negativo a la energía cinética que calculamos en ausencia de fricción. La energía cinética perdida debido a fricción es

$$\Delta K = -f_k d = -(4.0\,\text{N})(2.0 \times 10^{-2}\,\text{m}) = -0.080\,\text{J}$$

En la parte (A), se encontró que el trabajo realizado por el resorte fue 0.20 J. Por lo tanto, la energía cinética final en presencia de fricción es

$$K_f = 0.20\,\text{J} - 0.080\,\text{J} = 0.12\,\text{J} = \tfrac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2(0.12\,\text{J})}{1.6\,\text{kg}}} = \mathbf{0.39\,m/s}$$

Como se esperaba, este valor es un poco menor que los 0.50 m/s que hallamos en la parte (A). Si la fuerza de fricción fuera mayor, entonces el valor que obtuvimos como nuestra respuesta hubiera sido incluso más pequeño.

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si la fuerza de fricción se aumentara a 10.0 N? ¿Cuál es la rapidez del bloque en $x = 0$?

Respuesta En este caso, la pérdida de energía cinética cuando el bloque se mueve a $x = 0$ es

$$\Delta K = -f_k d = -(10.0\,\text{N})(2.0 \times 10^{-2}\,\text{m}) = -0.20\,\text{J}$$

que es igual en magnitud a la energía cinética en $x = 0$ sin la pérdida debida a la fricción. Entonces, toda la energía cinética ha sido transformada por la fricción cuando el bloque llega a $x = 0$ y su rapidez en este punto es $v = 0$.

En esta situación, así como en la de la parte (B), la rapidez del bloque alcanza un máximo en alguna posición que no es la de $x = 0$. El problema 70 pide al estudiante localizar estas posiciones.

7.8 Potencia

Considere de nuevo el ejemplo conceptual 7.8, que trata sobre un refrigerador que sube por una rampa a un camión. Suponga que el hombre no está convencido por nuestro argumento de que el trabajo es el mismo, cualquiera que sea la longitud de la rampa y monta una rampa larga con un declive suave. Aun cuando realizara la misma cantidad de trabajo que alguien que use una rampa más corta, tomará más tiempo para realizar el trabajo simplemente porque tiene que mover el refrigerador una distancia mayor. Si bien el trabajo realizado en ambas rampas es el mismo, hay *algo* diferente acerca de las tareas: el *intervalo de tiempo* durante el cual se ejecuta el trabajo.

La rapidez de transferencia de energía se denomina **potencia.** Nos concentraremos en el trabajo como el método de transferencia de energía en este análisis, pero recuerde que la noción de potencia es válida para *cualquier* medio de transferencia de energía. Si una fuerza externa se aplica a un cuerpo (que suponemos actúa como partícula), y si el trabajo realizado por esta fuerza en el intervalo de tiempo Δt es W, entonces la **potencia promedio** durante este intervalo se define como

$$\overline{\mathcal{P}} = \frac{W}{\Delta t}$$

Por lo tanto, mientras que el mismo trabajo se realiza al rodar el refrigerador por ambas rampas, se necesita de menos potencia para una rampa más larga.

De un modo semejante a la forma en que abordamos la definición de velocidad y aceleración, definimos la **potencia instantánea** $\mathcal{P}$ como el valor límite de la potencia promedio a medida que Δt se aproxima a cero:

$$\mathcal{P} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

donde hemos representado por dW el valor infinitesimal del trabajo realizado. Encontramos de la ecuación 7.3 que $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Por lo tanto, la potencia instantánea se puede escribir como

Potencia instantánea

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{7.23}$$

donde usamos el hecho de que $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$.

En general, la potencia se define para cualquier tipo de transferencia de energía. Por lo tanto, la expresión más general de potencia es

$$\mathcal{P} = \frac{dE}{dt} \tag{7.24}$$

donde dE/dt es la rapidez con la que la energía cruza la frontera del sistema por medio de un mecanismo de transferencia dado.

La unidad del SI de potencia es joules por segundo (J/s), también llamada **watt** (W) (en honor a James Watt):

El watt

$$1\ \text{W} = 1\ \text{J/s} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$$

Una unidad de potencia en el sistema inglés de ingeniería es el **caballo de potencia** (hp):

$$1\ \text{hp} = 746\ \text{W}$$

¡ADVERTENCIA!

7.9 W, *W* y watts

No debe confundirse el símbolo W del watt con el símbolo en cursivas *W* de trabajo. Igualmente, recuerde que el watt ya representa una rapidez de transferencia de energía, de modo que "watts por segundo" no tiene sentido. Un watt *es lo mismo* que un joule por segundo.

Una unidad de energía (o trabajo) se puede definir ahora en términos de la unidad de potencia. Un **kilowatt-hora** (kWh) es la energía transferida en 1 h a una rapidez constante de 1 kW = 1 000 J/s. La cantidad de energía representada por 1 kWh es

$$1\ \text{kWh} = (10^3\ \text{W})(3\ 600\ \text{s}) = 3.60 \times 10^6\ \text{J}$$

Nótese que un kilowatt-hora es una unidad de energía, no potencia. Cuando pagamos nuestra cuenta de consumo de electricidad compramos energía, y la cantidad de energía transferida por transmisión eléctrica hacia una casa durante el periodo representado por la cuenta de consumo, se expresa por lo general en kilowatts-hora. Por ejemplo, una cuenta de consumo puede indicar que consumimos 900 kWh de energía durante un mes, y nos cobran a razón de 10 centavos por kWh. Nuestro pago es entonces de $90 por esta cantidad de energía. Como otro ejemplo, suponga que una bombilla eléctrica es de 100 W. En 1.00 hora de operación, se le habrá transferido por transmisión eléctrica por una cantidad de $(0.100\ \text{kW})(1.00\ \text{h}) = 0.100\ \text{kWh} = 3.60 \times 10^5\ \text{J}$.

Pregunta rápida 7.12 Un coche de modelo ya pasado acelera desde el reposo hasta una rapidez v en 10 segundos. Un coche más nuevo y más potente acelera desde el reposo hasta una rapidez $2v$ en el mismo periodo de tiempo. ¿Cuál es la razón de potencia entre el coche más nuevo y la del más viejo? (a) 0.25 (b) 0.5 (c) 1 (d) 2 (e) 4

Ejemplo 7.12 Potencia entregada por el motor de un elevador

Un elevador tiene una masa de 1 600 kg y transporta pasajeros que tienen una masa combinada de 200 kg. Una fuerza de fricción constante de 4 000 N retarda su movimiento hacia arriba, como se ve en la figura 7.19a.

(A) ¿Qué potencia suministrada por el motor se requiere para levantar el elevador a una rapidez constante de 3.00 m/s?

Solución El motor debe proporcionar la fuerza de magnitud T que jala el elevador hacia arriba. El problema indica que la rapidez es constante, lo cual da la sugerencia de que $a = 0$. Por lo tanto, sabemos, de la segunda ley de Newton, que $\Sigma F_y = 0$. El diagrama de cuerpo libre de la figura 7.19b especifica la dirección hacia arriba como positiva. De la segunda ley de Newton obtenemos

$$\sum F_y = T - f - Mg = 0$$

donde M es la masa *total* del sistema (elevador más pasajeros), igual a 1 800 kg. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T &= f + Mg \\ &= 4.00 \times 10^3\ \text{N} + (1.80 \times 10^3\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) \\ &= 2.16 \times 10^4\ \text{N} \end{aligned}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

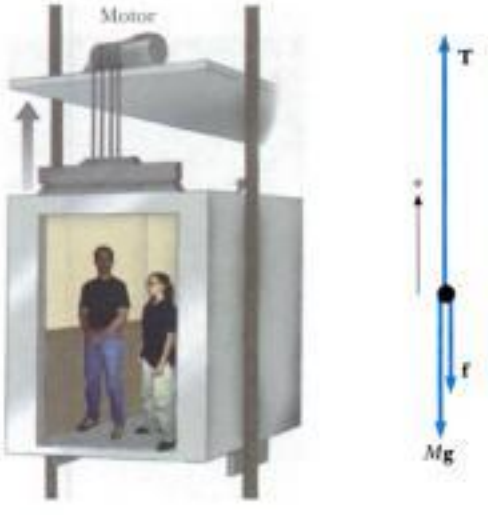


Figura 7.19 (Ejemplo 7.12) (a) El motor ejerce una fuerza **T** hacia arriba sobre el elevador. La magnitud de esta fuerza es la tensión T del cable que conecta el elevador y motor. Las fuerzas hacia abajo que actúan sobre el elevador son una fuerza **f** de fricción y la fuerza gravitacional $\mathbf{F}_g = M\mathbf{g}$. (b) Diagrama de cuerpo libre para el elevador.

Con el uso de la ecuación 7.23, y el hecho de que **T** está en la misma dirección que **v**, encontramos que

$$\mathcal{P} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} = Tv$$
$$= (2.16 \times 10^4\,\text{N})(3.00\,\text{m/s}) = \mathbf{6.48 \times 10^4\,W}$$

(B) ¿Qué potencia debe suministrar el motor en el instante en que la rapidez del elevador sea v, si el motor está diseñado para dar al elevador una aceleración hacia arriba de $1.00\,\text{m/s}^2$?

Solución Esperamos obtener un valor mayor que el obtenido en la parte (A), donde la rapidez fue constante, porque el motor ahora debe realizar la tarea adicional de acelerar el elevador. El único cambio en el planteamiento del problema es que en este caso $a > 0$. Si se aplica la segunda ley de Newton al elevador tendremos

$$\sum F_y = T - f - Mg = Ma$$
$$T = M(a + g) + f$$
$$= (1.80 \times 10^3\,\text{kg})(1.00\,\text{m/s}^2 + 9.80\,\text{m/s}^2) + 4.00 \times 10^3\,\text{N}$$
$$= 2.34 \times 10^4\,\text{N}$$

Por lo tanto, con la ecuación 7.23 obtenemos la potencia pedida

$$\mathcal{P} = Tv = \mathbf{(2.34 \times 10^4\,N)}v$$

donde v es la rapidez instantánea del elevador en metros por segundo. Para comparar la parte (A), sea $v = 3.00$ m/s, lo que da una potencia de

$$\mathcal{P} = (2.34 \times 10^4\,\text{N})(3.00\,\text{m/s}) = 7.02 \times 10^4\,\text{W}$$

Esto es más que la potencia hallada en la parte (A), como esperábamos.

7.9 La energía y el automóvil

Los automóviles impulsados por motores de gasolina son máquinas muy ineficientes. Aun bajo condiciones ideales, menos del 15% de la energía química del combustible se usa para mover el vehículo. La situación es mucho peor que esto en la ciudad, donde hay que detenerse y avanzar a cada momento. En esa sección, usamos los conceptos de energía, potencia y fricción para analizar el consumo de combustible para automóviles.

Muchos mecanismos contribuyen a la pérdida de energía en un automóvil. Alrededor del 67% de la energía del combustible se pierde en el motor pues termina en la atmósfera en parte por el sistema de escape y en parte por el sistema de enfriamiento. (Como se explica en el capítulo 22, la pérdida de energía por los sistemas de escape y enfriamiento es necesaria debido a una ley fundamental de termodinámica). Cerca del 10% de la energía se pierde por fricción en la transmisión, árbol de transmisión, cojinetes de ruedas y ejes, y en el diferencial. En otras partes móviles la fricción transforma aproximadamente 6% de la energía en energía interna, y 4% de la misma se usa para operar bombas de combustible y aceite, y accesorios como dirección de potencia y aire acondicionado. Esto deja apenas un 13% de la energía para impulsar el automóvil. Esta energía se usa principalmente para equilibrar la pérdida de energía debida a la flexibilidad de las llantas y la fricción causada por el aire, que se conoce más comúnmente como *resistencia del aire*.

Examinemos la potencia necesaria para proporcionar una fuerza en la dirección de avance que equilibre la combinación de las dos fuerzas de fricción. El coeficiente μ de la fricción de rodamiento entre las llantas y el pavimento es alrededor de 0.016. Para un coche de 1 450 kg, el peso es 1 4200 N y en un camino horizontal la fuerza de fricción de rodamiento tiene una magnitud de $\mu n = \mu mg = 227$ N. Cuando aumenta la rapidez del coche, se presenta una pequeña reducción en la fuerza normal, como resultado de una me-

Materiał chroniony prawem autorskim

Tabla 7.2

Fuerzas de fricción y requerimiento de potencia para un coche típico[a]

v(mi/h)	v(m/s)	n(N)	f_r(N)	f_a(N)	f_t(N)	$\mathcal{P} = f_t v$(kW)
0	0	14 200	227	0	227	0
20	8.9	14 100	226	48	274	2.4
40	17.9	13 900	222	192	414	7.4
60	26.8	13 600	218	431	649	17.4
80	35.8	13 200	211	767	978	35.0
100	44.7	12 600	202	1 199	1 400	62.6

[a] En esta tabla, n es la fuerza normal, f_r es la fricción de rodamiento, f_a es la fricción del aire, f_t es la fricción total y $\mathcal{P}$ es la potencia entregada a las ruedas.

nor presión cuando circula aire sobre el techo del mismo. (Este fenómeno se estudia en el capítulo 14). Esta reducción en la fuerza normal produce otra en la fuerza de fricción de rodamiento f_r al aumentar la rapidez, como indica la tabla 7.2.

Consideremos ahora el efecto de la fuerza resistiva que resulta del movimiento de aire alrededor del coche. Para objetos grandes, la fuerza resistiva f_a asociada con la fricción del aire es proporcional al cuadrado de la rapidez (vea la sección 6.4) y está dada por la ecuación 6.6:

$$f_a = \tfrac{1}{2} D \rho A v^2$$

donde D es el coeficiente de resistencia al avance, ρ es la densidad del aire y A es el área de sección transversal del objeto en movimiento. Podemos usar esta expresión para calcular valores de f_a en la tabla 7.2, usando $D = 0.50$, $\rho = 1.20\ \text{kg/m}^3$, y $A \approx 2\ \text{m}^2$.

La magnitud de la fuerza total de fricción f_t, es la suma de la fuerza de fricción de rodamiento y la fuerza resistiva del aire:

$$f_t = f_r + f_a$$

A bajas velocidades, la fricción de rodamiento es la fuerza resistiva predominante pero a altas velocidades, la resistencia del aire predomina, como muestra la tabla 7.2. La fricción de rodamiento puede reducir si se reduce la flexibilidad de las llantas (por ejemplo al aumentar ligeramente la presión del aire por arriba de los valores recomendados) y por el uso de llantas radiales. La resistencia del aire también se puede reducir si se usa una menor área de sección transversal y al construir coches aerodinámicos. Aun cuando conducir uno con las ventanillas abiertas aumenta la resistencia del aire y resulta en una disminución del 3% en rendimiento de combustible, llevar las ventanillas cerradas y el aire acondicionado funcionando resulta en una disminución del 12% en rendimiento de combustible.

La potencia total necesaria para mantener una rapidez constante v es $f_t v$ y ésta es la potencia que debe ser entregada a las ruedas. Por ejemplo, de la tabla 7.2 vemos que a $v = 26.8$ m/s (60 mi/h), la potencia necesaria es

$$\mathcal{P} = f_t v = (649\ \text{N})(26.8\ \text{m/s}) = 17.4\ \text{kW}$$

Esta potencia se puede descomponer en dos partes: (1) la potencia $f_r v$ necesaria para compensar la fricción de rodamiento, y (2) la potencia $f_a v$ necesaria para compensar la resistencia del aire. A $v = 26.8$ m/s, obtenemos los siguientes valores

$$\mathcal{P}_r = f_r v = (218\ \text{N})(26.8\ \text{m/s}) = 5.84\ \text{kW}$$

$$\mathcal{P}_a = f_a v = (431\ \text{N})(26.8\ \text{m/s}) = 11.6\ \text{kW}$$

Nótese que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_r + \mathcal{P}_a$ y 67% de la potencia se usa para compensar la resistencia del aire.

Por otra parte, a $v = 44.7$ m/s(100 mi/h), $\mathcal{P}_r = 9.03$ kW, $\mathcal{P}_a = 53.6$ kW, $\mathcal{P} = 62.6$ kW y 86% de la potencia está asociada con la resistencia del aire. Esto demuestra la importancia de la resistencia del aire a altas velocidades.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 7.13 Gas consumido por un coche compacto

Un coche compacto tiene una masa de 800 kg y su eficiencia está cercana al 18%. (Esto es, 18% de la energía del combustible se entrega a las ruedas). Encuentre la cantidad de gasolina empleada para acelerarlo desde el reposo a 27 m/s (60 mi/h). Use el hecho de que la energía equivalente a 1 galón de gasolina es 1.3×10^8 J.

Solución La energía necesaria para acelerar el coche desde el reposo a una rapidez v es igual a su energía cinética final, $\frac{1}{2}mv^2$:

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(800\text{ kg})(27\text{ m/s})^2 = 2.9 \times 10^5\text{ J}$$

Si el motor fuera 100% eficiente, cada galón de gasolina suministraría 1.3×10^8 J de energía. Como el motor es sólo 18% eficiente, cada galón entrega una energía de sólo $(0.18)(1.3 \times 10^8\text{ J}) = 2.7 \times 10^7$ J. Por lo tanto, el número de galones empleados para acelerar el coche es

$$\text{Número de galones} = \frac{2.9 \times 10^5\text{ J}}{2.3 \times 10^7\text{ J/gal}} = \mathbf{0.013\ gal}$$

Estimemos que tarda 10 s en alcanzar la rapidez indicada. La distancia recorrida durante esta aceleración es

$$\Delta x = \bar{v}\Delta t = \frac{v_{xf} + v_{xi}}{2}(\Delta t) = \frac{27\text{ m/s} + 0}{2}(10\text{ s})$$
$$= 135\text{ m} \approx 0.08\text{ mi}$$

A una rapidez constante de crucero, 0.013 galones de gasolina es suficiente para impulsar el auto casi 0.5 milla, más de seis veces más distancia. Esto demuestra la necesidad extrema de energía de arranques y paradas continuas.

Ejemplo 7.14 Potencia entregada a las ruedas

Suponga que el coche compacto del ejemplo 7.13 tiene un rendimiento de combustible de 35 millas/galón a 60 mi/h. ¿Cuánta potencia es entregada a las ruedas?

Solución Encontramos la cantidad de consumo de gasolina al dividir la rapidez entre el rendimiento de gasolina:

$$\frac{60\text{ mi/h}}{35\text{ mi/gal}} = 1.7\text{ gal/h}$$

Si usamos el hecho de que cada galón es equivalente a 1.3×10^8 J, encontramos que la potencia total empleada es

$$\mathcal{P} = (1.7\text{ gal/h})(1.3 \times 10^8\text{ J/gal})\left(\frac{1\text{ h}}{3.6 \times 10^3\text{ s}}\right)$$
$$= 62\text{ kW}$$

Debido a que se usa 18% de la potencia para impulsar el coche, la potencia entregada a las ruedas es $(0.18)(62\text{ kW}) =$ **11 kW.** Esto es 37% menos que el valor de 17.4 kW obtenido para el coche de 1 450 kg estudiado en el texto. La masa vehicular es claramente un importante factor en mecanismos que pierden potencia.

Ejemplo 7.15 Coche que acelera al subir una cuesta

Considere un coche de masa m que está acelerando al subir una cuesta, como se ve en la figura 7.20. Un ingeniero de automotores mide la magnitud de la fuerza resistiva total, que es

$$f_t = (218 + 0.70v^2)\text{ N}$$

donde v es la rapidez en metros por segundo. Determine la potencia que el motor debe entregar a las ruedas como función de la rapidez.

Solución Las fuerzas sobre el coche se muestran en la figura 7.20, en donde F es la fuerza de fricción desde el camino y que impulsa al aire; las fuerzas restantes tienen su significado usual. Si se aplica la segunda ley de Newton al movimiento a lo largo del pavimento, encontramos que

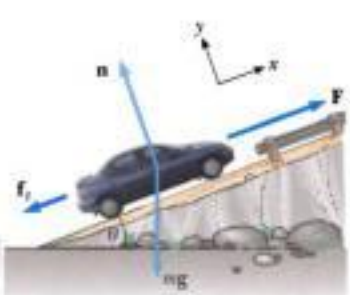


Figura 7.20 (Ejemplo 7.15) Un coche sube por una colina.

$$\sum F_x = F - f_t - mg\,\text{sen}\,\theta = ma$$
$$F = ma + mg\,\text{sen}\,\theta + f_t$$
$$= ma + mg\,\text{sen}\,\theta + (218 + 0.70v^2)$$

Por lo tanto, la potencia necesaria para mover el coche hacia delante es

$$\mathcal{P} = Fv = mva + mvg\,\text{sen}\,\theta + 218v + 0.70v^3$$

El término mva representa la potencia que el motor debe entregar para acelerar el coche. Si éste se mueve a rapidez constante, este término es cero y se reduce la necesidad de potencia total. El término $mvg\,\text{sen}\,\theta$ es la potencia que se requiere suministrar a la fuerza para equilibrar un componente de la fuerza gravitacional cuando el coche sube por la cuesta. Este término debería ser cero para movimiento en una superficie horizontal. El término $218v$ es la potencia necesaria para suministrar una fuerza que equilibre la fuerza de rodamiento, y el término $0.70v^3$ es la potencia necesaria contra la resistencia del aire.

Si tomamos $m = 1\,450$ kg, $v = 27$ m/s (= 60 mi/h), $a = 1.0\text{ m/s}^2$, y $\theta = 10°$, entonces los varios términos en $\mathcal{P}$ se calculan y resultan ser

$$mva = (1\,450\text{ kg})(27\text{ m/s})(1.0\text{ m/s}^2)$$
$$= 39\text{ kW} = 52\text{ hp}$$

$$mvg\,\text{sen}\,\theta = (1\,450\text{ kg})(27\text{ m/s})(9.80\text{ m/s}^2)(\text{sen }10°)$$

Materiał chroniony prawem autorskim

$$= 67 \text{ kW} = 89 \text{ hp}$$

$$218v = 218(27 \text{ m/s}) = 5.9 \text{ kW} = 7.9 \text{ hp}$$

$$0.70v^3 = 0.70(27 \text{ m/s})^3 = 14 \text{ kW} = 18 \text{ hp}$$

Por lo tanto, la potencia total necesaria es 126 kW o **167 hp.**

Nótese que los requerimientos de potencia para viajar a rapidez constante en una superficie horizontal son de sólo 20 kW o 27 hp (la suma de los dos últimos términos). Además, si la masa se reduce a la mitad (como en el caso de un coche compacto), entonces la potencia necesaria también se reduce en casi el mismo factor.

RESUMEN

Un **sistema** es a veces una sola partícula, un conjunto de partículas o una región del espacio. La **frontera del sistema** separa un sistema de su **entorno.** Numerosos problemas de física se pueden resolver al considerar la interacción de un sistema con su entorno.

El **trabajo** W realizado sobre un sistema por un agente que ejerce una fuerza constante $\mathbf{F}$ sobre el sistema es el producto de la magnitud Δr del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y el componente $F\cos\theta$ de la fuerza a lo largo de la dirección del desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$:

$$W = F\,\Delta r\cos\theta \tag{7.1}$$

El **producto escalar** (producto punto) de dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ está definido por la relación

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta \tag{7.2}$$

donde el resultado es una cantidad escalar y θ es el ángulo entre los dos vectores. El producto escalar obedece las leyes conmutativa y distributiva.

Si una fuerza variable realiza trabajo sobre una partícula cuando ésta se mueve a lo largo del eje x de x_i a x_f, el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula está dado por

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx \tag{7.7}$$

donde F_x es el componente de fuerza en la dirección x.

La **energía cinética** de una partícula de masa m que se mueve con rapidez v es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{7.15}$$

El **teorema del trabajo y la energía cinética** expresa que si un trabajo es realizado sobre un sistema por fuerzas externas y el único cambio en el sistema es en su rapidez, entonces

$$\sum W = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv_f^{\,2} - \tfrac{1}{2}mv_i^{\,2} \tag{7.14, 7.16}$$

Para un sistema no aislado, podemos igualar el cambio entre la energía total almacenada en el sistema y la suma de todas las transferencias de energía al otro lado de la frontera del sistema. Para un sistema aislado, la energía total es constante; éste es un enunciado de **conservación de la energía.**

Si actúa una fuerza de fricción, la energía cinética del sistema se reduce y la ecuación apropiada a aplicar es

$$\Delta K = -f_k d + \sum W_{\text{otras fuerzas}} \tag{7.21a}$$

o bien,

$$K_f = K_i - f_k d + \sum W_{\text{otras fuerzas}} \tag{7.21b}$$

La **potencia instantánea** $\mathcal{P}$ se define como la rapidez de transferencia de energía. Si un agente aplica una fuerza $\mathbf{F}$ a un cuerpo que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$, la potencia entregada por ese agente es

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \tag{7.23}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

PREGUNTAS

1. Cuando una partícula gira en un círculo genera una fuerza dirigida hacia el centro de rotación. ¿Por qué esta fuerza no realiza trabajo sobre la partícula?
2. Analice si cualquier trabajo es realizado por cada uno de los siguientes agentes y, si es así, diga si el trabajo es positivo o negativo: (a) un pollo que rasca el suelo, (b) una persona que estudia, (c) una grúa que levanta una cubeta de concreto, (d) la fuerza gravitacional sobre la cubeta de la parte (c), (e) los músculos de una pierna de una persona al sentarse.
3. Cuando un jugador patea un balón de fútbol, ¿realiza algún trabajo sobre éste cuando su pie está en contacto con el balón? ¿Realiza algún trabajo sobre el mismo después que pierde contacto con su pie? ¿Algunas fuerzas realizan trabajo sobre el balón cuando está en el aire?
4. Cite dos ejemplos en los que se ejerce una fuerza sobre un objeto sin realizar trabajo alguno sobre el mismo.
5. Cuando un péndulo simple oscila en un sentido y en otro, las fuerzas que actúan sobre el objeto suspendido son la fuerza gravitacional, la tensión en la cuerda de sostén y la resistencia del aire. (a) ¿Cuál de estas fuerzas, si la hay, no realiza trabajo sobre el péndulo? (b) ¿Cuál de estas fuerzas realiza trabajo negativo en todo tiempo durante su movimiento? (c) Describa al trabajo realizado por la fuerza gravitacional cuando el péndulo está oscilando.
6. Si el producto punto de dos vectores es positivo, ¿implica esto que los vectores deben tener componentes rectangulares positivos?
7. ¿Para qué valores de θ es el producto escalar (a) positivo y (b) negativo?
8. Cuando se aumenta la carga sobre un resorte en espiral que cuelga verticalmente, no es de esperarse que la línea de una gráfica de F_s contra x permanezca recta, como se ve en la figura 7.10d. Explique cualitativamente el estudiante qué esperaría para la forma de esta gráfica cuando se aumente la carga sobre el resorte.
9. Cierto resorte uniforme tiene una constante de resorte k. Ahora el resorte se corta a la mitad. ¿Cuál es la relación entre k y la constante de resorte k' de cada resorte más pequeño que resulta? Explique su razonamiento.
10. ¿Puede la energía cinética ser negativa? Explique.
11. Analice el trabajo realizado por un *pitcher* que lanza una pelota de béisbol. ¿Cuál es la distancia aproximada en la que la fuerza actúa cuando se lanza la pelota?
12. Una bala tiene el doble de masa de una segunda bala. Si ambas son disparadas de modo que tienen la misma rapidez, ¿cuál tiene más energía cinética? ¿Cuál es la razón entre las energías cinéticas de ambas?
13. Dos francotiradores disparan fusiles de calibre 0.30 con balas idénticas. Una fuerza ejercida por gases en expansión en los cañones acelera las balas. El del fusil A mide 2.00 cm más que el cañón del fusil B. ¿Cuál de ellos tiene más rapidez en la boca del cañón?
14. (a) Si se duplica la rapidez de una partícula, ¿qué ocurre a su energía cinética? (b) ¿Qué se puede decir acerca de la rapidez de una partícula si el trabajo neto realizado sobre ella es cero?
15. Un vendedor de coches dice que un motor modificado de 300 hp es una opción necesaria en un coche compacto, en lugar del motor convencional de 130 hp. Supongamos que el estudiante conduce el coche dentro de los límites de rapidez ($\leq$ 65 mi/h) en terreno plano. ¿Cómo puede ir en contra de esta charlatanería?
16. ¿Cómo es que la potencia promedio en un intervalo de tiempo puede ser igual a la potencia instantánea en un instante dentro del intervalo? Explique.
17. En el ejemplo 7.15, ¿aumenta o disminuye la potencia necesaria cuando la fuerza de fricción se reduce?
18. La energía cinética de un objeto depende del marco de referencia en el que se mide su movimiento. Dé un ejemplo para ilustrar este punto.
19. Las palabras a las que se dan definiciones precisas en física se usan a veces en literatura popular en formas interesantes. Por ejemplo, una piedra que cae desde lo alto de un acantilado se dice que "aumenta de fuerza a medida que cae a la playa abajo" ¿Qué significa la frase "aumenta de fuerza" y puede el lector arreglar mejor esta frase?
20. Casi siempre, la fuerza normal que actúa sobre un objeto y la fuerza de fricción estática realizan trabajo cero sobre el objeto. Sin embargo, la razón de que la fuerza sea cero es diferente para los dos casos. Explique por qué cada una realiza trabajo cero.
21. "Una vía de aire a nivel no puede realizar trabajo." Hable a favor o en contra de este enunciado.
22. ¿Quién fue el primero en expresar el teorema del trabajo y la energía cinética? ¿Quién demostró que es útil para resolver numerosos problemas prácticos? Haga alguna investigación para contestar estas preguntas.

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, difícil = solución guiada con sugerencias disponibles en http://www.pse6.com

= use computadora para resolver el problema = problemas numéricos y simbólicos por pares

Sección 7.2 Trabajo realizado por una fuerza constante

1. Un bloque de masa 2.50 kg es empujado 2.20 m a lo largo de una mesa horizontal sin fricción, por una fuerza constante de 16.0 N dirigida a 25.0° abajo de la horizontal. Determine el trabajo realizado sobre el bloque por (a) la fuerza aplicada, (b) la fuerza normal ejercida por la mesa, y (c) la fuerza gravitacional. (d) Determine el trabajo total realizado sobre el bloque.
2. Un comprador en un supermercado empuja un carro con una fuerza de 35.0 N dirigida a un ángulo de 25.0° hacia abajo desde la horizontal. Encuentre el trabajo realizado por el comprador sobre el carro cuando avanza por un pasillo de 50.0 m de largo.
3. Batman, cuya masa es 80.0 kg, está colgando del extremo libre de una cuerda de 12.0 m, y el otro extremo está fijo en una rama de un árbol. Puede poner la cuerda en movimiento como sólo Batman sabe hacerlo, consiguiendo finalmente que oscile lo

Materiał chroniony prawem autorskim

suficiente para que él llegue a una cornisa cuando la cuerda forme un ángulo de 60.0° con la vertical. ¿Cuánto trabajo fue realizado por la fuerza gravitacional sobre Batman en esta maniobra?

4. Una gota de lluvia de masa 3.35×10^{-5} kg cae verticalmente con una rapidez constante bajo la influencia de la gravedad y la resistencia del aire. Modele la gota como una partícula. Cuando cae 100 m, ¿cuál es el trabajo realizado sobre la gota (a) por la fuerza gravitacional y (b) por la resistencia del aire?

Sección 7.3 Producto escalar de dos vectores

5. El vector **A** tiene una magnitud de 5.00 unidades, y **B** tiene una magnitud de 9.00 unidades. Los dos vectores forman un ángulo de 50.0° entre ellos. Encuentre $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

6. Para cualesquier dos vectores **A** y **B**, demuestre que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$. (*Sugerencia:* Escriba **A** y **B** en forma de vector unitario y use las ecuaciones 7.4 y 7.5).

> *Nota:* En los problemas del 7 al 10, calcule respuestas numéricas a tres cifras significativas, como es usual.

7. Una fuerza $\mathbf{F} = (6\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}})$ N actúa sobre una partícula que experimenta un desplazamiento $\Delta\mathbf{r} = (3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$ m. Encuentre (a) el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula y (b) el ángulo entre **F** y $\Delta\mathbf{r}$.

8. Hállese el producto escalar de los vectores de la figura P7.8.

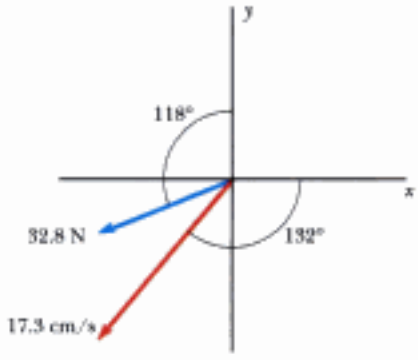


Figura P7.8

9. Usando la definición del producto escalar, encuentre los ángulos entre (a) $\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{B} = 4\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}$; (b) $\mathbf{A} = -2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{B} = 3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$; (c) $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{B} = 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$.

10. Para $\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$, y $\mathbf{C} = 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$, encuentre $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

Sección 7.4 Trabajo realizado por una fuerza variable

11. La fuerza que actúa sobre una partícula varía como en la figura P7.11. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula cuando se mueve (a) de $x = 0$ a x 8.00 m, (b) de $x = 8.00$ m a $x = 10.0$ m, y (c) de $x = 0$ a $x = 10.0$ m.

12. La fuerza que actúa sobre una partícula es $F_x = (8x - 16)$ N, donde x es en metros. (a) Haga una gráfica de esta fuerza contra x de $x = 0$ a $x = 3.00$ m. (b) Con su gráfica, encuentre el trabajo neto realizado por esta fuerza sobre la partícula cuando ésta se mueva de $x = 0$ a $x = 3.00$ m.

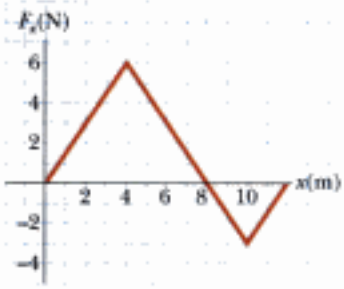


Figura P7.11

13. Una partícula está sometida a una fuerza F_x que varía con la posición, como se ve en la figura P7.13. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula cuando se mueva (a) de $x = 0$ a $x = 5.00$ m, (b) de $x = 5.00$ m a $x = 10.00$ m, y (c) de $x = 10.0$ m a $x = 15.0$ m. (d) ¿Cuál es el trabajo total realizado por la fuerza sobre la distancia $x = 0$ a $x = 15.0$ m?

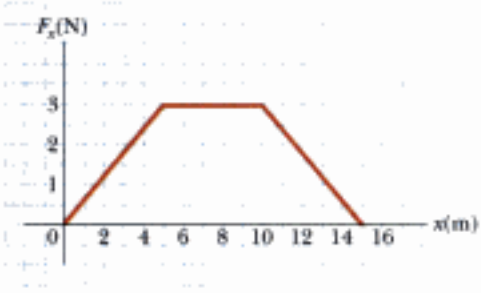


Figura P7.13 Problemas 13 y 28.

14. Una fuerza $\mathbf{F} = (4x\hat{\mathbf{i}} + 3y\hat{\mathbf{j}})$ actúa sobre un objeto cuando éste se mueve en la dirección x del origen a $x = 5.00$ m. Encuentre el trabajo $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ realizado sobre el objeto por la fuerza.

15. Cuando un cuerpo de 4.00 kg se cuelga verticalmente de cierto resorte ligero que obedece la ley de Hooke, el resorte se estira 2.50 cm. Si el cuerpo de 4.00 kg se retira, (a) ¿cuánto se estira el resorte si de él se cuelga un bloque de 1.50 kg, y (b) cuánto trabajo debe realizar un agente externo para estirar el mismo resorte 4.00 cm desde su posición no estirada?

16. Un arquero tira de la cuerda de su arco 0.400 m al ejercer una fuerza que aumenta uniformemente de cero a 230 N. (a) ¿Cuál es la constante del resorte equivalente del arco? (b) ¿Cuánto trabajo realiza el arquero al tirar de la cuerda?

17. A veces las suspensiones de camiones tienen "resortes auxiliares" que entran en operación con cargas elevadas. Uno de estos montajes es un resorte de hojas con un resorte auxiliar de espiras montado sobre el eje, como se ve en la figura P7.17. El resorte auxiliar entra en operación cuando el resorte principal de hojas se comprime una distancia y_0, y entonces ayuda a sostener cualquier carga adicional. Considere una constante del resorte de hojas de 5.25×10^5 N/m, la constante del resorte auxiliar es de 3.60×10^5 N/m, y $y_0 = 0.500$ m. (a) ¿Cuál es la compresión del resorte de hojas para una carga de 5.00×10^5 N? (b) ¿Cuánto trabajo se realiza al comprimir los resortes?

Materiał chroniony prawem autorskim

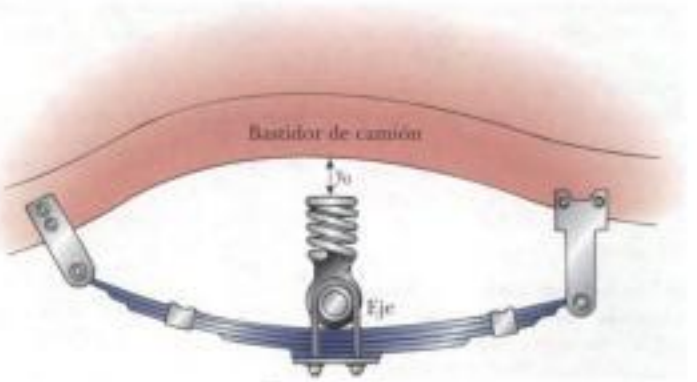


Figura P7.17

18. Una bala de 100 g es disparada desde un rifle que tiene un cañón de 0.600 m de largo. Si se supone que el origen se pone donde la bala empieza a moverse, la fuerza (en newtons) ejercida por el gas en expansión sobre la bala es $15\,000 + 10\,000x - 25\,000x^2$, donde x está en metros. (a) Determine el trabajo realizado por el gas sobre la bala cuando ésta recorre la longitud del cañón. (b) **¿Qué pasaría si?** Si el cañón mide 1.00 m de largo, ¿cuánto trabajo se realiza, y cómo se compara este valor al trabajo calculado en (a)?

19. Si se necesitan 4.00 J de trabajo para estirar 10.0 cm un resorte que obedece a la ley de Hooke, desde su longitud no estirada, determine el trabajo extra necesario para estirarlo otros 10.0 cm.

20. Una pequeña partícula de masa m es jalada a la parte superior de un cuerpo semicilíndrico sin fricción, de radio R, por una cuerda que pasa sobre la parte superior del cilindro, como se ilustra en la figura P7.20. (a) Si la partícula se mueve a rapidez constante, demuestre que $F = mg\cos\theta$. (*Nota:* Si la partícula se mueve a rapidez constante, el componente de su aceleración tangente al cilindro debe ser cero en todo tiempo.) (b) Por integración directa de $W = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, encuentre el trabajo realizado al mover la partícula a rapidez constante desde la parte inferior a la superior del cuerpo semicilíndrico.

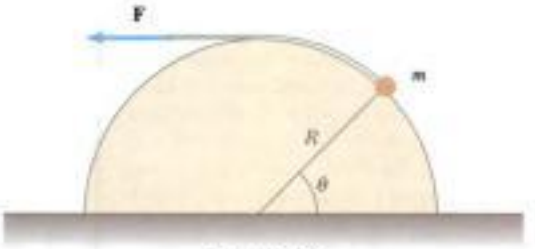


Figura P7.20

21. Un resorte ligero con constante de resorte de 1 200 N/m está colgado de un soporte elevado. De su extremo inferior se cuelga un segundo resorte ligero, que tiene una constante de resorte de 1 800 N/m. Un cuerpo de masa 1.50 kg se cuelga en reposo del extremo inferior del segundo resorte. (a) Hállese la constante del resorte efectiva del par de resortes como sistema. Describimos estos resortes como *en serie*.

22. Un resorte ligero con constante de resorte k_1 se cuelga de un soporte elevado. De su extremo inferior se cuelga un segundo resorte ligero, que tiene una constante de resorte k_2. Un cuerpo de masa m se cuelga en reposo del extremo inferior del segundo resorte. (a) Hállese la distancia total de extensión del par de resortes. (b) Encuentre la constante del resorte efectiva del par de resortes como sistema. Describimos estos resortes como *en serie*.

23. Exprese las unidades de la constante de fuerza de un resorte en unidades fundamentales del SI.

Sección 7.5 Energía cinética y el teorema del trabajo y la energía cinética

Sección 7.6 Sistema no aislado; conservación de la energía

24. Una partícula de 0.600 kg tiene una rapidez de 2.00 m/s en el punto Ⓐ y energía cinética de 7.50 J en el punto Ⓑ. ¿Cuál es (a) su energía cinética en Ⓐ? (b) ¿su rapidez en Ⓑ? (c) ¿el trabajo total realizado sobre la partícula cuando se mueve de Ⓐ a Ⓑ?

25. Una pelota de 0.300 kg tiene una rapidez de 15.00 m/s. (a) ¿Cuál es su energía cinética? (b) ¿Qué pasaría si? Si su rapidez se duplica, ¿cuál sería su energía cinética?

26. Un cuerpo de 3.00 kg tiene una velocidad de $(6.00\hat{\mathbf{i}} - 2.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s. (A) ¿Cuál es su energía cinética en este instante? (b) Encuentre el trabajo total realizado sobre el objeto si su velocidad cambia a $(8.00\hat{\mathbf{i}} + 4.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s. (*Nota:* De la definición del producto punto, $v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$.)

27. Se utiliza un martinete de 2 100 kg para introducir en el suelo una viga I de acero. El martinete cae 5.00 m antes de entrar en contacto con la parte superior de la viga, y mete la viga 12.0 cm más en el suelo antes de llegar al reposo. Utilizando consideraciones de energía, calcule la fuerza promedio que la viga ejerce sobre el martinete cuando éste llega al reposo.

28. Una partícula de 4.00 kg está sujeta a una fuerza total que varía con la posición, como se muestra en la figura P7.13. La partícula inicia desde el reposo en $x = 0$. ¿Cuál es la rapidez en (a) $x = 5.00$ m, (b) $x = 10$ m, (c) $x = 15.0$ m?

29. El lector puede considerar el teorema del trabajo y la energía cinética como una segunda teoría del movimiento, paralela a las leyes de Newton al describir la forma en que influencias externas afectan el movimiento de un cuerpo. En este problema, resuelva

Materiał chroniony prawem autorskim

por separado las partes (a) y (b) de (c) y (d) para comparar los pronósticos de las dos teorías. En un cañón de rifle, una bala de 15.0 g es acelerada desde el reposo a una rapidez de 780 m/s. (a) Hállese el trabajo que se realiza sobre la bala. (b) Si el cañón del rifle es de 72.0 cm de largo, encuentre la magnitud de la fuerza total promedio que actúa sobre él, como $F = W/(\Delta r \cos \theta)$. (c) Encuentre la aceleración constante de una bala que inicia desde el reposo y adquiere una velocidad de 780 m/s en una distancia de 72.0 cm. (d) Si la bala tiene una masa de 15.0 g, encuentre la fuerza total que actúa sobre ella cuando $\Sigma F = ma$.

30. En el cuello del tubo de imágenes de cierto televisor en blanco y negro, un cañón de electrones contiene dos placas metálicas cargadas y separadas 2.80 cm. Una fuerza eléctrica acelera cada electrón del haz electrónico desde el reposo a 9.60% de la velocidad de la luz en esta distancia. (a) Determine la energía cinética del electrón cuando sale del cañón de electrones. Los electrones llevan la energía a un material fosforescente que está en la superficie interior de la pantalla del televisor, haciendo que brille. Para un electrón que pasa entre las placas del cañón de electrones, determine (b) la magnitud de la fuerza eléctrica constante que actúa sobre el electrón, (c) la aceleración, y (d) el tiempo de vuelo.

Sección 7.7 Situaciones que involucran fricción cinética

31. Una caja de 40.0 kg, que inicialmente está en reposo, es empujada 5.00 m a lo largo de un piso rugoso horizontal con una fuerza horizontal constante aplicada de 130 N. Si el coeficiente de fricción entre la caja y el piso es de 0.300, encuentre (a) el trabajo realizado por la fuerza aplicada, (b) el aumento en energía interna del sistema caja-piso debido a la fricción, (c) el trabajo realizado por la fuerza normal, (d) el trabajo realizado por la fuerza gravitacional, (e) el cambio en energía cinética de la caja, y (f) la rapidez final de la caja.

32. Un bloque de 2.00 kg se une a un resorte de constante de fuerza de 500 N/m, como se ve en la figura 7.10. El bloque es jalado 5.00 cm a la derecha del equilibrio y soltado desde el reposo. Encuentre su rapidez cuando pasa por el punto de equilibrio si (a) la superficie horizontal es sin fricción y (b) el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es de 0.350.

33. Una caja de masa 10.0 kg es jalada por un plano inclinado rugoso con una rapidez inicial de 1.50 m/s. La fuerza de tiro es de 100 N paralela al plano, que forma un ángulo de 20.0° con la horizontal. El coeficiente de fricción cinética es 0.400, y la caja es jalada 5.00 m. (a) ¿Cuánto trabajo es realizado por la fuerza gravitacional sobre la caja? (b) Determine el aumento en energía interna del sistema caja-plano debido a la fricción. (c) ¿Cuánto trabajo es realizado por la fuerza de 100 N sobre la caja? (d) ¿Cuál es el cambio de energía cinética de la caja? (e) ¿Cuál es la rapidez de la caja después de ser jalada 5.00 m?

34. Un bloque de 15.0 kg es arrastrado sobre una superficie horizontal rugosa por una fuerza de 70.0 N que actúa a 20.0° arriba de la horizontal. El bloque es desplazado 5.00 m y el coeficiente de fricción cinética es 0.300. Encuentre el trabajo realizado sobre el bloque por (a) la fuerza de 70 N, (b) la fuerza normal, y (c) la fuerza gravitacional. (d) ¿Cuál es el aumento en energía interna del sistema bloque-superficie debido a la fricción? (e) Encuentre el cambio total en la energía cinética del bloque.

35. Un trineo de masa m recibe una patada en una charca congelada. La patada le imparte una rapidez inicial de 2.00 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el trineo y el hielo es 0.100. Use consideraciones de energía para hallar la distancia que el trineo recorre antes de detenerse.

Sección 7.8 Potencia

36. El motor eléctrico de un tren de juguete acelera el tren desde el reposo a 0.620 m/s en 21.0 ms. La masa total del tren es 875 g. Encuentre la potencia promedio entregada al tren durante la aceleración.

37. Un marinero de 700 N en entrenamiento básico sube por una cuerda vertical de 10.0 m a una rapidez constante en 8.00 s. ¿Cuál es la potencia de salida?

38. Haga un estimado del orden de magnitud de la potencia que el motor de un coche aporta para acelerarlo hasta una rapidez permitida en carretera. Para abreviar considere su propio coche si usa uno. En su solución exprese las cantidades físicas que tome como datos y los valores que mida o estime para ellas. La masa del vehículo está dada en el manual del usuario. Si usted no desea hacer estimados del coche, considere un autobús o camión que usted especifique.

39. Un esquiador de masa 70.0 kg es jalado en una pendiente por un cable accionado por motor. (a) ¿Cuánto trabajo se requiere para tirar del esquiador una distancia de 60.0 m para que suba por una pendiente de 30.0° (que se supone sin fricción) a una rapidez constante de 2.00 m/s? (b) ¿Un motor qué potencia requiere para realizar este trabajo?

40. Un elevador de 650 kg inicia desde el reposo. Sube durante 3.00 s con aceleración constante hasta que alcanza su rapidez de crucero de 1.75 m/s. (a) ¿Cuál es la potencia promedio del motor del elevador durante este periodo? (b) ¿Cómo se compara esta potencia con la del motor cuando el elevador se mueve a su rapidez de crucero?

41. Una bombilla eléctrica, eficiente en su consumo de energía y toma 28.0 W de potencia, puede producir el mismo nivel de brillantez que una bombilla convencional que opera a 100 W. La duración de la bombilla eficiente es 10 000 horas y su precio es de \$17.0, mientras que la bombilla convencional tiene una duración de 750 h y cuesta \$0.420 por bombilla. Determine el ahorro total obtenido con el uso de la bombilla eficiente en el tiempo de su vida útil, en comparación con bombillas convencionales sobre el mismo periodo de tiempo. Suponga un costo de energía de \$0.080 0 por kilowatt-hora.

42. Se mide energía en forma convencional en calorías así como en joules. Una caloría en nutrición es una kilocaloría, definida como 1 kcal = 4 186 J. Metabolizar un gramo de grasa puede liberar 9.00 kcal. Una estudiante decide tratar de perder peso con ejercicio. Ella planea subir y bajar escaleras en un estadio de fútbol tan rápido como pueda y tantas veces como sea necesario. ¿Es esto en sí una forma práctica de perder peso? Para evaluar el programa, suponga que ella sube un tramo de 80 escalones, cada uno de 0.150 m de alto, en 65.0 s. Para mayor sencillez, no haga caso de la energía que ella usa en bajar (que es poca). Suponga que una eficiencia típica para los músculos de nuestro cuerpo es 20.0%, lo cual significa que cuando convertimos 100 J de grasa metabólica, 20 J van a realizar trabajo mecánico (aquí, subir escaleras). El resto entra en energía interna. Suponga que la masa de la estudiante es 50.0 kg. (a) ¿Cuántas veces debe ella subir por la escalera para perder una libra de grasa? (b) ¿Cuál es su potencia de salida promedio, en watts y en caballos de potencia, cuando sube por las escaleras?

43. Para ahorrar energía, andar en bicicleta y caminar son medios mucho más eficientes de transporte que viajar en automóvil. Por ejem-

Materiał chroniony prawem autorskim

plo, cuando viaja a 10.0 mi/h, un ciclista usa energía de los alimentos a razón de unas 400 kcal/h arriba de lo que usaría si sólo va sentado. (En fisiología de ejercicios, la potencia se mide en kcal/h en lugar de watts. Aquí 1 kcal = 1 Caloría de nutricionista = 4 186 J.) Caminar a 3.00 mi/h requiere unas 220 kcal/h. Es interesante comparar estos valores con el consumo de energía necesaria para viajar en coche. La gasolina rinde unos 1.30×10^8 J/gal. Encuentre la economía de combustible en millas equivalentes por galón para una persona (a) que camina, y (b) que anda en bicicleta.

Sección 7.9 La energía y el automóvil

44. Suponga que el coche vacío descrito en la tabla 7.2 tiene una economía de combustible de 6.40 km/litro (15 mi/gal) cuando viaja a 26.8 m/s (60 mi/h). Si se supone eficiencia constante, determine la economía de combustible si la masa total de pasajeros más conductor es de 350 kg.

45. Un coche compacto de 900 kg de masa tiene una eficiencia total del motor de 15%. (Esto es, 15% de la energía suministrada por el combustible se entrega a las ruedas). (a) Si consumir un galón de gasolina produce 1.34×10^8 J de energía, encuentre la cantidad de gasolina empleada al acelerarlo desde el reposo a 55.0 mi/h. Aquí se puede hacer caso omiso de los efectos de la resistencia del aire y la fricción de rodamiento. (b) ¿Cuántas de estas aceleraciones suministrará un galón? (c) El recorrido en millas dado por el coche es 38.0 mi/gal a 55 mi/h. ¿Qué potencia es entregada a las ruedas (para superar los efectos de fricción) cuando el coche es conducido a esta rapidez?

Problemas adicionales

46. Un jardinero de béisbol lanza una pelota de 0.150 kg a una rapidez de 40 m/s y un ángulo inicial de 30.0°. ¿Cuál es la energía cinética de la pelota en el punto más alto de su trayectoria?

47. Cuando corre, una persona disipa alrededor de 0.600 J de energía mecánica por paso por kilogramo de masa corporal. Si un corredor de 60.0 kg disipa una potencia de 70.0 W durante una carrera, ¿con qué rapidez está corriendo la persona? Suponga que un paso de carrera es de 1.50 m de largo.

48. La dirección de cualquier vector **A** en el espacio tridimensional se puede especificar al dar los ángulos α, β y γ que el vector forma con los ejes x, y, y z, respectivamente. Si $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$, (a) encuentre expresiones para $\cos\alpha$, $\cos\beta$, y $\cos$ (éstos se conocen como *cosenos directores*), y (b) demuestre que estos ángulos satisfacen la relación $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. (*Sugerencia:* Tome el producto escalar de **A** con **i**, **j**, y **k** separadamente).

49. Una partícula de 4.00 kg se mueve a lo largo del eje x. Su posición varía con el tiempo según $x = t + 2.0t^3$, donde x es en metros y t es en segundos. Encuentre (a) la energía cinética en cualquier tiempo t, (b) la aceleración de la partícula y la fuerza que actúa sobre ella en el tiempo t, (c) la potencia que es entregada a la partícula en el tiempo t, y (d) el trabajo realizado sobre la partícula en el intervalo $t = 0$ a $t = 2.00$ s.

50. La constante del resorte de un resorte de suspensión de automóvil aumenta con una carga creciente debido a un resorte helicoidal que es más ancho en el fondo, suavemente cónico a un diámetro menor cerca de la parte superior. El resultado es un viaje más suave sobre superficies normales de camino con espiras más angostas, pero el coche no toca fondo en baches porque cuando las espiras superiores se colapsan, dejan que las espiras más rígidas cerca del fondo absorban la carga. Para un resorte helicoidal cónico que se comprime 12.9 cm con una carga de 1 000 N y 31.5 cm con una carga de 5 000 N, (a) evalúe las constantes de a y b de la ecuación empírica $F = ax^b$ y (b) encuentre el trabajo necesario para comprimir el resorte 25.0 cm.

51. Una cuenta en el fondo de un tazón es un ejemplo de un objeto en posición de equilibrio estable. Cuando un sistema físico es desplazado por una cantidad x desde su equilibrio estable, una fuerza restauradora actúa sobre él, tendiendo a regresar el sistema a su configuración de equilibrio. La magnitud de la fuerza restauradora puede ser una función complicada de x. Por ejemplo, cuando un ión en un cristal es desplazado de su lugar en la malla, la fuerza restauradora puede no ser una función simple de x. En tales casos, generalmente podemos imaginar la función $F(x)$ que se expresa como una serie de potencia en x, como $F(x) = -(k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 + \ldots)$. El primer término aquí es precisamente la ley de Hooke, que describe la fuerza ejercida por un resorte simple para pequeños desplazamientos. Para pequeñas excursiones desde el equilibrio, por lo general despreciamos los términos de orden superior, pero en algunos casos puede ser deseable conservar también el segundo término. Si modelamos la fuerza restauradora como $F = -(k_1x + k_2x^2)$, ¿cuánto trabajo es realizado en desplazar el sistema de $x = 0$ a $x = x_{máx}$ por una fuerza aplicada $-F$?

52. Un pasajero en el aeropuerto toma una escalera eléctrica para subir un piso, como se ve en la figura P7.52. La escalera móvil lo llevaría hacia arriba con componente de velocidad vertical v entre puntos de entrada y salida, separados por una altura h. Sin embargo, cuando la escalera se mueve, el apresurado pasajero sube los escalones de la escalera a razón de n pasos/s. Suponga que la altura de cada paso es h_p. (a) Determine la cantidad de energía química convertida en energía mecánica por los músculos de las piernas del pasajero durante su ascenso por la escalera, dado que su masa es m. (b) Determine el trabajo que el motor de la escalera eléctrica realiza sobre esta persona.

Figura P7.52

53. Un mecánico empuja un coche de masa m, realizando un trabajo W al hacerlo acelerar desde el reposo. Despreciando la fricción entre el coche y el pavimento, (a) ¿cuál es la rapidez final del coche?

Materiał chroniony prawem autorskim

Figura P7.56

Durante este tiempo, el coche se mueve una distancia d. (b) ¿Qué fuerza horizontal constante ejerció el mecánico sobre el coche?

54. Una bola de acero de 5.00 kg se deja caer sobre una placa de cobre desde una altura de 10.0 m. Si la bola deja una abolladura de 3.20 mm de profundidad, ¿cuál es la fuerza promedio ejercida por la placa sobre la bola durante el impacto?

55. Una simple fuerza constante $\mathbf{F}$ actúa sobre una partícula de masa m. La partícula inicia del reposo en $t = 0$. (a) Demuestre que la potencia instantánea entregada por la fuerza en cualquier tiempo t es $\mathcal{P} = (F^2/m)t$. (b) Si $F = 20.0$ N y $m = 5.00$ kg, ¿cuál es la potencia entregada en $t = 3.00$ s?

56. Dos resortes con masa despreciable, uno con constante de resorte k_1 y el otro con constante de resorte k_2, están unidos a los topes de una vía de aire nivelada, como se ve en la figura P7.56. Un deslizador unido a ambos resortes está colocado entre ellos. Cuando el deslizador está en equilibrio, el resorte 1 se estira una extensión x_{i1} a la derecha de su longitud no deformada, y el resorte 2 se comprime x_{i2} a la izquierda. Ahora se aplica una fuerza horizontal $\mathbf{F}_{ap}$ al deslizador para moverlo una distancia x_a a la derecha de su posición de equilibrio. Demuestre que en este proceso (a el trabajo realizado sobre el resorte 1 es $\frac{1}{2}k_1(x_a^2 + 2x_a x_{i1})$, (b) el trabajo realizado sobre el resorte 2 es $\frac{1}{2}k_2(x_a^2 - 2x_a x_{i2})$, (c) x_{i2} está relacionado a x_{i1} por $x_{i2} = k_1 x_{i1}/k_2$, y (d) el trabajo total realizado por la fuerza F_{ap} es $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)x_a^2$.

57. Cuando el conductor pisa el pedal del acelerador, un coche de masa 1 160 kg acelera desde el reposo. Durante los primeros pocos segundos de movimiento, la aceleración del coche aumenta con el tiempo según la expresión

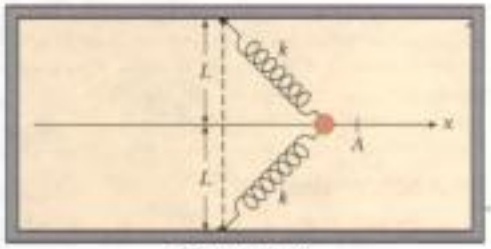
$$a = (1.16\ \mathrm{m/s^3})t - (0.210\ \mathrm{m/s^4})t^2 + (0.240\ \mathrm{m/s^5})t^3$$

(a) ¿Qué trabajo es realizado por las ruedas sobre el coche durante el intervalo de $t = 0$ a $t = 2.50$ s? (b) ¿Cuál es la potencia de salida de las ruedas en el instante $t = 2.50$ s?

58. Una partícula está unida entre dos resortes idénticos sobre una mesa horizontal sin fricción. Ambos resortes tienen constante de resorte k y están inicialmente sin deformar. (a) Si la partícula es jalada una distancia x a lo largo de una dirección perpendicular a la configuración inicial de los resortes, como se ve en la figura P7.58, muestre que la fuerza ejercida por los resortes sobre la partícula es

$$\mathbf{F} = -2kx\left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}}\right)\hat{\mathbf{i}}$$

(b) Determine la cantidad de trabajo realizado por esta fuerza al mover la partícula de $x = A$ a $x = 0$.



Vista superior

Figura P7.58

59. El cuerpo de un cohete de masa M caerá con rapidez terminal v_T después que su combustible se agote. ¿Qué potencia de salida debe producir el motor del cohete si éste debe volar (a) a su rapidez terminal en línea recta hacia arriba; (b) a tres veces la rapidez terminal en línea recta hacia abajo? En ambos casos, suponga que la masa del combustible y el oxidante restantes en el cohete es despreciable en comparación con M. Suponga que la fuerza de la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la rapidez del cohete.

60. **Problema de repaso.** Dos fuerzas constantes actúan sobre un cuerpo de 5.00 kg que se mueve en el plano xy, como se ve en la figura P7.60. La fuerza $\mathbf{F}_1$ es 25.0 N a 35.0°, mientras que $\mathbf{F}_2$ es 42.0 N a 150°. En el tiempo $t = 0$, el cuerpo está en el origen y tiene velocidad $(4.00\hat{\mathbf{i}} + 2.50\hat{\mathbf{j}})$ m/s. (a) Exprese las dos fuerzas en notación de vectores unitarios. Use notación de vectores unitarios para sus otras respuestas. (b) Encuentre la fuerza total sobre el cuerpo. (c) Encuentre la aceleración del cuerpo. Ahora, considerando el instante $t = 3.00$ s, (d) encuentre la velocidad del cuerpo, (e) su localización, (f) su energía cinética a partir de $\frac{1}{2}mv_f^2$, y (g) su energía cinética a partir de $\frac{1}{2}mv_i^2 + \sum \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}$.

61. Un bloque de 200 g está presionado contra un resorte de constante de fuerza 1.40 kN/m hasta que el bloque comprime el resorte 10.0 cm. El resorte descansa en el fondo de una rampa inclinada a 60.0° con la horizontal. Con el uso de consideraciones de energía, determine cuánto sube el bloque por la rampa antes de detenerse (a) si no hay fricción entre el bloque y la rampa y (b) si el coeficiente de fricción cinética es 0.400.

Materiał chroniony prawem autorskim

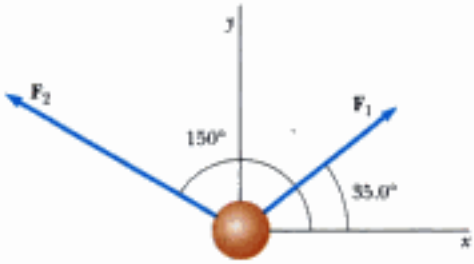


Figura P7.60

62. Cuando diferentes pesos se cuelgan de un resorte, el resorte se estira diferentes longitudes, como se ve en la tabla siguiente. (a) Haga una gráfica de la fuerza aplicada contra la extensión del resorte. Por ajuste de mínimos cuadrados, determine la recta que mejor ajusta los datos. (El estudiante puede no desear usar todos los puntos de datos). (b) De la pendiente de la recta de mejor ajuste, encuentre la constante de resorte k. (c) Si el resorte se extiende a 105 mm, ¿qué fuerza ejerce sobre el peso suspendido?

F (N)	2.0	4.0	6.0	8.0	10	12	14	16	18	20	22
L (mm)	15	32	49	64	79	98	112	126	149	175	190

63. El tirador de bolas de un juego llamado "pinball" está equipado con un resorte que tiene una constante de fuerza de 1.20 N/cm (figura P7.63). La superficie sobre la cual se mueve la bola está inclinada 10.0° con respecto a la horizontal. Si el resorte se comprime inicialmente 5.00 cm, encuentre la rapidez de lanzamiento de una bola de 100 g cuando se suelta el tirador. La fricción y la masa del tirador son insignificantes.

Figura P7.63

64. Una partícula de 0.400 kg se desliza alrededor de una vía horizontal. La vía tiene una pared exterior lisa vertical que forma un círculo con un radio de 1.50 m. La partícula recibe una rapidez inicial de 8.00 m/s. Después de una revolución, su rapidez ha descendido a 6.00 m/s debido a la fricción con el piso rugoso de la vía. (a) Encuentre la energía convertida de mecánica a interna en el sistema debido a fricción en una revolución. (b) Calcule el coeficiente de fricción cinética. (c) ¿Cuál es el número total de revoluciones que la partícula hace antes de detenerse?

65. En moléculas diatómicas, los átomos constitutivos ejercen fuerzas de atracción entre ellos a grandes distancias y fuerzas de repulsión a cortas distancias. Para numerosas moléculas, la ley de Lennard-Jones es una buena aproximación a la magnitud de estas fuerzas:

$$F = F_0\left[2\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{13} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{7}\right]$$

donde r es la distancia de centro a centro entre los átomos de la molécula, es el parámetro de longitud, y F_0 es la fuerza cuando $r = \sigma$. Para una molécula de oxígeno, encontramos que $F_0 = 9.60 \times 10^{-11}$ N y $= 3.50 \times 10^{-10}$ m. Determine el trabajo realizado por esta fuerza si los átomos son separados de $r = 4.00 \times 10^{-10}$ m a $r = 9.00 \times 10^{-10}$ m.

66. Cuando limpia un lote de estacionamiento, un quitanieves empuja frente a sí un montón siempre creciente de nieve. Suponga que un coche que se mueve en aire se modela de manera semejante a un cilindro que empuja un tapón creciente de aire frente a sí. El aire originalmente estacionario se pone en movimiento a una rapidez constante v del cilindro, como se ve en la figura P7.66. En un intervalo de tiempo Δt, un nuevo disco de aire de masa Δm debe ser movido una distancia $v\Delta t$ y por lo tanto debe recibir una energía cinética $\frac{1}{2}(\Delta m)v^2$ Usando este modelo, muestre que la pérdida de potencia del coche debida a la resistencia del aire es $\frac{1}{2}\ Av^3$ y que la fuerza resistiva que actúa sobre el mismo es $\frac{1}{2}\ Av^2$, donde es la densidad del aire. Compare este resultado con la expresión empírica $\frac{1}{2}DAv^2$ para la fuerza resistiva.

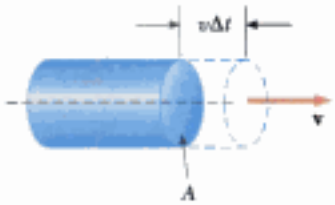


Figura P7.66

67. Una partícula se mueve a lo largo del eje x de $x = 12.8$ m a $x = 23.7$ m bajo la influencia de una fuerza

$$F = \frac{375}{x^3 + 3.75x}$$

donde F es en newtons y x es en metros. Usando integración numérica, determine el trabajo total realizado por esta fuerza sobre la partícula durante este desplazamiento. Su resultado debe ser preciso, con una variación no mayor al 2%.

68. Un molino de viento, como el de la fotografía con que inicia este capítulo, gira en respuesta a una fuerza de resistencia de aire de alta rapidez, $R = \frac{1}{2}D\rho Av^2$. La potencia disponible es $\mathcal{P} = Rv = \frac{1}{2}D\rho\pi r^2v^3$ donde v es la rapidez del viento y hemos supuesto una cara circular para el molino de viento, de radio r. Tome el coeficiente de resistencia al avance como $D = 1.00$ y, de la tabla de datos físicos frecuentemente usados, la densidad del aire. Para un molino de viento de uso doméstico, con $r = 1.50$ m, calcule la potencia disponible si (a) $v = 8.00$ m/s y (b) $v = 24.0$ m/s. La potencia entregada por el generador está limitada por la eficiencia del sistema, que es alrededor de 25%. En comparación, una casa típica necesita unos 3 kW de energía eléctrica.

69. Hace más de 2 300 años que el maestro griego Aristóteles escribió el primer libro llamado *Física*. Dicho en terminología más precisa, este pasaje es del final de su Section Eta:

Sea $\mathcal{P}$ la potencia de un agente que produce movimiento; w, la cosa movida; d, la distancia cubierta; y Δt, el intervalo de tiempo requerido. Entonces (1) una potencia igual a $\mathcal{P}$ en un período de tiempo igual a Δt, moverá $w/2$ una distancia $2d$; o (2) moverá $w/2$ una distancia dada d en el intervalo de tiempo $\Delta t/2$. También, si (3) la potencia dada $\mathcal{P}$ mueve el objeto dado w una distancia $d/2$ en el intervalo de tiempo $\Delta t/2$, entonces (4) $\mathcal{P}/2$ moverá $w/2$ la distancia dada d en el intervalo dado de tiempo Δt.

Demuestre que las proporciones de Aristóteles están incluidas en la ecuación $\mathcal{P}\Delta t = bwd$ donde b es una constante de proporcionalidad. (b) Demuestre que nuestra teoría de movimiento incluye esta parte de la teoría de Aristóteles como un caso especial. En particular, describa una situación en la que es cierto, deduzca la

Materiał chroniony prawem autorskim

ecuación que representa las proporciones de Aristóteles, y determine la constante de proporcionalidad.

70. Considere el sistema del bloque, resorte, superficie de la parte (b) del ejemplo 7.11. (a) ¿En qué posición x del bloque es máxima su rapidez? (b) En la sección **¿Qué pasaría si?** de este ejemplo, exploramos los efectos de una mayor fuerza de fricción de 10.0 N. ¿En qué posición del bloque se presenta su máxima rapidez en esta situación?

Respuestas a las *preguntas rápidas*

7.1 (a). La fuerza no realiza trabajo sobre la Tierra porque la fuerza apunta hacia el centro del círculo y es, por lo tanto, perpendicular a la dirección del desplazamiento.

7.2 c, a, d, b. El trabajo en (c) es positivo y el máximo valor posible debido al ángulo entre la fuerza y el desplazamiento es cero. El trabajo realizado en (a) es cero porque la fuerza es perpendicular al desplazamiento. En (d) y (b), la fuerza aplicada realiza trabajo negativo, porque en ningún caso hay un componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento. La situación (b) es el valor más negativo porque el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento es 180°.

7.3 (d). La respuesta (a) es incorrecta porque el producto escalar $(-\mathbf{A})\cdot(-\mathbf{B})$ es igual a $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. La respuesta (b) es incorrecta porque $AB\cos(\theta + 180°)$ da el negativo del valor correcto.

7.4 (d). Debido al rango de valores de la función coseno, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ tiene valores que van de AB a $-AB$.

7.5 (a). Debido a que el trabajo realizado para comprimir un resorte es proporcional al cuadrado de la distancia x de compresión, duplicar el valor de x hace que el trabajo aumente cuatro veces.

7.6 (b). Como el trabajo es proporcional al cuadrado de la distancia x de compresión y la energía cinética es proporcional al cuadrado de la rapidez v, duplicar la distancia de compresión duplica la rapidez.

7.7 (a). Para el televisor, la energía entra por transmisión eléctrica (por el cable de línea) y radiación electromagnética (la señal de televisión). La energía sale por calor (de las superficies calientes hacia el aire), ondas mecánicas (sonido del altavoz), y radiación electromagnética (de la pantalla). (b) Para la podadora de césped equipada con motor de gasolina, la energía entra por transferencia de materia (gasolina). La energía sale por trabajo (sobre las hojas de paso), ondas mecánicas (sonido), y calor (de las superficies calientes hacia el aire). (c) Para el sacapuntas accionado a mano, la energía entra por trabajo (de la mano que hace girar la manivela). La energía sale por trabajo (ejecutado sobre el lápiz) y ondas mecánicas (sonido).

7.8 (b). La fuerza de fricción representa una interacción con el entorno del bloque.

7.9 (b). La fuerza de fricción representa una interacción con el entorno de la superficie.

7.10 (a). La fuerza de fricción es interna al sistema, de modo que no hay interacciones con el entorno.

7.11 (c). Los frenos y el pavimento están más calientes, por lo cual su energía interna ha aumentado. Además, el sonido del derrape representa transferencia de energía que se aleja por medio de ondas mecánicas.

7.12 (e). Como la rapidez se duplica, la energía cinética es cuatro veces mayor. Esta energía cinética es alcanzada por el coche más nuevo en el mismo intervalo de tiempo que la menor energía cinética para el coche más viejo, de manera que la potencia es cuatro veces mayor.

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 8

Energía potencial

▲ *Fotografía estroboscópica de un atleta en salto de garrocha. Durante este proceso ocurren varios tipos de transformaciones de energía. Los dos tipos de energía potencial que estudiaremos en este capítulo son evidentes en la fotografía. La energía potencial gravitacional está asociada con el cambio en la posición vertical del atleta con respecto a la Tierra. La energía potencial elástica se aprecia en el doblamiento de la garrocha. (© Harold E. Edgerton/Cortesía de Palm Press, Inc.)*

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

8.1 Energía potencial de un sistema

8.2 El sistema aislado: conservación de energía mecánica

8.3 Fuerzas conservativas y no conservativas

8.4 Cambios en la energía mecánica para fuerzas no conservativas

8.5 Relación entre fuerzas conservativas y energía potencial

8.6 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema

Materiał chroniony prawem autorskim

En el capítulo anterior le presentamos los conceptos de energía cinética asociada con el movimiento de los miembros de un sistema y de energía interna asociada con la temperatura de un sistema. En este capítulo introducimos la *energía potencial*, que es la energía asociada con la configuración de un sistema de cuerpos que ejercen fuerzas uno sobre otro.

El concepto de energía potencial se puede usar sólo cuando se hable de una clase especial de fuerzas llamadas *fuerzas conservativas*. Cuando actúan sólo fuerzas conservativas dentro de un sistema aislado, la energía cinética ganada (o perdida) por el sistema, cuando sus miembros cambian sus posiciones relativas, queda equilibrada por igual pérdida (o ganancia) de energía potencial. Este equilibrio de las dos formas de energía se conoce como *principio de conservación de energía mecánica*.

En el Universo está presente energía potencial en varias formas, incluyendo la gravitacional, electromagnética, química y nuclear. Además, una forma de energía en un sistema, se puede convertir en otra. Por ejemplo, cuando un sistema está formado por un motor eléctrico conectado a una batería, la energía química de la batería se convierte en energía cinética cuando gira el eje del motor. La transformación de energía es una parte esencial del estudio de la física, ingeniería, química, biología, geología y astronomía.

8.1 Energía potencial de un sistema

También en el capítulo 7 definimos un sistema en general, pero concentramos nuestra atención básicamente sobre partículas o cuerpos bajo la influencia de una fuerza externa. En este capítulo consideramos sistemas de dos o más partículas u objetos que interactúan por medio de una fuerza que es *interna* del sistema. La energía cinética de un sistema como éste es la suma algebraica de las energías cinéticas de todos los miembros del sistema. Puede haber sistemas, sin embargo, en los que un objeto es tan grande que se puede modelar como estacionario y su energía cinética puede despreciarse. Por ejemplo, si consideramos un sistema formado por la Tierra y una pelota cuando ésta cae al suelo, la energía cinética del sistema se puede considerar como sólo la energía cinética de la pelota. La Tierra se mueve con tal lentitud en este proceso, que podemos pasar por alto su energía cinética. Por el contrario, la energía cinética de un sistema de dos electrones debe incluir las energías cinéticas de ambas partículas.

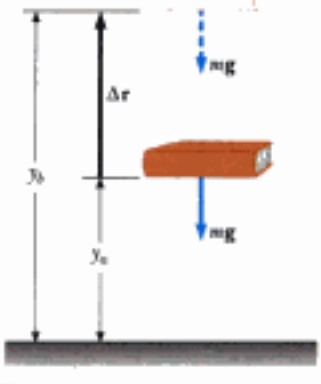


Figura 8.1 El trabajo realizado por un agente externo sobre el sistema del libro y la Tierra, cuando el libro es levantado de una altura y_a a una altura y_b, es igual a $mgy_b - mgy_a$.

Imaginemos un sistema formado por un libro y la Tierra, que interactúa por medio de la fuerza gravitacional. Realizamos algún trabajo sobre el sistema al levantar el libro lentamente a una altura $\Delta y = y_b - y_a$, como en la figura 8.1. Según nuestro análisis de energía y transferencia de energía del capítulo anterior, este trabajo realizado sobre el sistema debe aparecer como aumento de energía del sistema. El libro está en reposo antes que realicemos el trabajo y está en reposo después que lo realizamos. Por lo tanto, no hay cambio en la energía cinética del sistema. No hay razón por la que la temperatura del libro o la de la Tierra cambien, de modo que no hay aumento en la energía interna del sistema.

Debido a que el cambio de energía del sistema no está en la forma de energía cinética o energía interna, debe aparecer como alguna otra forma de almacenamiento de energía. Después de levantar el libro, podríamos soltarlo y dejar que caiga a la posición y_a. Nótese que el libro (y, por lo tanto, el sistema) no tendrá energía cinética, y su fuente está en el trabajo que fue realizado al levantarlo. Mientras que el libro estuvo en su punto más alto, la energía del sistema tenía el *potencial* de convertirse en energía cinética, pero no lo hizo si-

Materiał chroniony prawem autorskim

no hasta que se dejó caer el libro. En consecuencia, el mecanismo de almacenamiento de energía antes de soltar el libro se denomina **energía potencial.** Encontraremos que una energía potencial puede estar asociada sólo con tipos específicos de fuerzas. En este caso particular, estamos analizando la **energía potencial gravitacional.**

Deduzcamos a continuación una expresión para hallar la energía potencial gravitacional asociada con un objeto en un lugar dado sobre la superficie de la Tierra. Considere un agente externo que levanta un objeto de masa m de una altura inicial y_a sobre el suelo a una altura final y_b, como en la figura 8.1. Suponemos que el levantamiento se realiza con lentitud, sin aceleración, de modo que la fuerza elevadora se puede modelar como que es igual en magnitud al peso del objeto; el objeto está en equilibrio y se mueve a velocidad constante. El trabajo realizado por el agente externo sobre el sistema (objeto y Tierra), cuando el objeto experimenta este desplazamiento hacia arriba, está dado por el producto de la fuerza aplicada hacia arriba $\mathbf{F}_{ap}$ y el desplazamiento hacia arriba $\Delta\mathbf{r} = \Delta y\hat{\mathbf{j}}$:

$$W = (\mathbf{F}_{ap}) \cdot \Delta\mathbf{r} = (mg\hat{\mathbf{j}}) \cdot [(y_b - y_a)\hat{\mathbf{j}}] = mgy_b - mgy_a \tag{8.1}$$

Note la similitud de esta ecuación con la 7.14 del capítulo precedente. En cada ecuación, el trabajo realizado sobre un sistema es igual a una diferencia entre los valores final e inicial de una cantidad. En la ecuación 7.14, el trabajo representa una transferencia de energía que entra al sistema, y el aumento en energía del sistema es cinético en su forma. En la ecuación 8.1, el trabajo representa una transferencia de energía hacia el sistema, y la energía del sistema aparece en una forma diferente, que hemos llamado energía potencial gravitacional.

Por lo tanto, podemos identificar la cantidad mgy como la energía potencial gravitacional U_g:

$$U_g = mgy \tag{8.2}$$

Energía potencial gravitacional

Las unidades de energía potencial gravitacional son los joules, igual que las unidades de trabajo y energía cinética. La energía potencial, al igual que el trabajo y la energía cinética, es una cantidad escalar. Nótese que la ecuación 8.2 es válida sólo para objetos cerca de la superficie terrestre, donde g es aproximadamente constante.[1]

Al usar nuestra definición de energía potencial gravitacional, la ecuación 8.1 se puede escribir ahora como

$$W = \Delta U_g \tag{8.3}$$

que matemáticamente describe el hecho de que el trabajo realizado sobre el sistema en esta situación aparece como un cambio en la energía potencial gravitacional del sistema.

La energía potencial gravitacional depende sólo de la altura vertical del objeto sobre la superficie de la Tierra. La misma cantidad de trabajo debe ser realizada sobre un sistema objeto-Tierra si el objeto es levantado verticalmente desde la Tierra, o es empujado iniciando desde el mismo punto hacia arriba por un plano inclinado sin fricción, terminando en la misma altura. Esto se puede demostrar al calcular el trabajo con un desplazamiento que tenga componentes tanto vertical como horizontal:

$$W = (\mathbf{F}_{ap}) \cdot \Delta\mathbf{r} = (mg\hat{\mathbf{j}}) \cdot [(x_b - x_a)\hat{\mathbf{i}} + (y_b - y_a)\hat{\mathbf{j}}] = mgy_b - mgy_a$$

donde no hay término que incluya x en el resultado final porque $\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$.

Al resolver problemas, el lector debe escoger una configuración de referencia para la cual la energía potencial gravitacional se haga igual a algún valor de referencia, que es normalmente cero. La opción de configuración de referencia es por completo arbitraria, porque la cantidad importante es la *diferencia* en energía potencial, y esta diferencia es independiente de la opción de configuración de referencia.

A veces es conveniente escoger, como la configuración de referencia para energía potencial cero, la configuración en la que un objeto está en la superficie de la Tierra, pero esto no es esencial. Con frecuencia, el enunciado del problema sugiere una configuración conveniente a usar.

[1] La suposición de que g es constante es válida mientras el desplazamiento vertical sea pequeño en comparación con el radio de la Tierra.

¡ADVERTENCIA!

8.1 La energía potencial pertenece a un sistema

La energía potencial está siempre asociada con un *sistema* de dos o más objetos que interactúan. Cuando un objeto pequeño se mueve cerca de la superficie de la Tierra bajo la influencia de la gravedad, podemos decir a veces que la energía potencial está "asociada con el objeto", en lugar de la frase más correcta "asociada con el sistema", porque la Tierra no se mueve en forma significativa. Sin embargo, no nos referiremos a la energía potencial "del objeto" porque éste evidentemente soslaya el papel de la Tierra.

Materiał chroniony prawem autorskim

Pregunta rápida 8.1 Escoja la respuesta correcta. La energía potencial gravitacional de un sistema (a) es siempre positiva (b) es siempre negativa (c) puede ser negativa o positiva.

Pregunta rápida 8.2 Un objeto cae de una mesa al piso. Deseamos analizar la situación en términos de energía cipética o potencial. Al discutir la energía cinética del sistema, (a) incluimos la energía cinética del objeto y la Tierra (b) pasamos por alto la energía cinética de la Tierra, porque no es parte del sistema (c) no hacemos caso de la energía cinética de la Tierra porque ésta es demasiado grande con comparación con el objeto.

Pregunta rápida 8.3 Un objeto cae de una mesa al piso. Deseamos analizar la situación en términos de energía cinética y potencial. Al discutir la energía potencial del sistema, identificamos el sistema como (a) el objeto y la Tierra (b) sólo el objeto (c) sólo la Tierra.

Ejemplo 8.1 El jugador de bolos y el dedo adolorido

Una bola de boliche sostenida por un descuidado jugador, cae de las manos de éste y le golpea un pie. Si se escoge el nivel del piso como el punto $y = 0$ de un sistema de coordenadas, estime el cambio en energía potencial gravitacional del sistema bola-Tierra cuando cae la bola. Repita el cálculo, usando la parte superior de la cabeza del jugador como el origen de coordenadas.

Solución Primero, necesitamos estimar unos pocos valores. Una bola de boliche tiene una masa aproximada de 7 kg, y la parte superior del dedo del jugador está a unos 0.03 m sobre el suelo. También, supondremos que la bola cae de una altura de 0.5 m. Si mantenemos insignificantes los dígitos hasta terminar el problema, calculamos que la energía potencial gravitacional del sistema bola-Tierra justo antes que la bola se suelte es $U_i = mgy_i = (7\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(0.5\text{ m}) = 34.3\text{ J}$. Un cálculo similar para cuando la bola llega al pie del jugador da $U_f = mgy_f = (7\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(0.03\text{ m}) = 2.06\text{ J}$. Por lo tanto, el cambio en energía potencial gravitacional del sistema bola-Tierra es $\Delta U_g = U_f - U_i = -32.24\text{ J}$. Es probable que conservemos sólo un dígito debido a lo aproximado de nuestros cálculos; por lo tanto, estimamos que el cambio en energía potencial gravitacional es -30 J. El sistema tenía 30 J de energía potencial gravitacional con respecto a la parte superior del dedo del jugador antes que la bola empezara a caer.

Cuando usamos la cabeza del jugador (que estimamos está a 1.50 m sobre el piso) como nuestro origen de coordenadas, encontramos que $U_i = mgy_i = (7\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(-1\text{ m}) = -68.6\text{ J}$ y $U_f = mgy_f = (7\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(-1.47\text{ m}) = -100.8\text{ J}$. El cambio en energía potencial gravitacional del sistema bola-Tierra es $\Delta U_g = U_f - U_i = -32.24\text{ J} \approx \mathbf{-30\text{ J}}$. Éste es el mismo valor que antes, como debe ser.

Figura 8.2 El trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre el libro, cuando éste cae de y_b a una altura y_a, es igual a $mgy_b - mgy_a$.

8.2 El sistema aislado; conservación de energía mecánica

La introducción de energía potencial nos permite generar un principio poderoso y universalmente aplicable para problemas que son difíciles de resolver con las leyes de Newton. Desarrollemos este nuevo principio pensando de vuelta en el sistema libro-Tierra de la figura 8.1. Una vez que hemos levantado el libro, hay energía potencial gravitacional almacenada en el sistema, que podemos calcular a partir del trabajo realizado por el agente externo sobre el sistema, usando $W = \Delta U_g$.

Cambiemos ahora nuestra atención al trabajo realizado sólo sobre el libro por la fuerza gravitacional (figura 8.2) cuando el libro cae a su altura original. Cuando el libro cae de y_b a y_a, el trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre el libro es

$$W_{\text{sobre libro}} = (m\mathbf{g}) \cdot \Delta\mathbf{r} = (-mg\hat{\mathbf{j}}) \cdot [(y_a - y_b)\hat{\mathbf{j}}] = mgy_b - mgy_a \quad (8.4)$$

Del teorema del trabajo y energía cinética visto en el capítulo 7, el trabajo realizado sobre el libro es igual al cambio en la energía cinética del libro:

$$W_{\text{sobre libro}} = \Delta K_{\text{libro}}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Por lo tanto, si igualamos estas dos expresiones para el trabajo realizado sobre el libro,

$$\Delta K_{\text{libro}} = mgy_b - mgy_a \tag{8.5}$$

Ahora, relacionemos cada lado de esta ecuación al *sistema* del libro y la Tierra. Para el lado derecho,

$$mgy_b - mgy_a = -(mgy_a - mgy_b) = -(U_f - U_i) = -\Delta U_g$$

donde U_g es la energía potencial gravitacional del sistema. Para el lado izquierdo de la ecuación 8.5, debido a que el libro es la única parte del sistema que se mueve, vemos que $\Delta K_{\text{libro}} = \Delta K$, donde K es la energía cinética del sistema. Por lo tanto, con cada lado de la ecuación 8.5 sustituida con su equivalente del sistema, la ecuación se convierte en

$$\Delta K = -\Delta U_g \tag{8.6}$$

¡ADVERTENCIA!

8.2 Condiciones sobre la ecuación 8.6

Ésta se cumple sólo para una de dos categorías de fuerzas, de los cuales se llaman *fuerzas conservativas*, como se ve en la siguiente sección.

Esta ecuación se puede manipular para obtener un resultado general muy importante para resolver problemas. Primero, llevamos el cambio en energía potencial al lado izquierdo de la ecuación:

$$\Delta K + \Delta U_g = 0 \tag{8.7}$$

A la izquierda tenemos una suma de cambios de la energía almacenada en el sistema. La derecha es cero porque no hay transferencias de energía por la frontera del sistema; el sistema libro-Tierra está *aislado* del entorno.

Definimos la suma de energías cinética y potencial como **energía mecánica:**

$$E_{\text{mec}} = K + U_g$$

Más adelante en este texto encontraremos otros tipos de energía potencial, además de la gravitacional, de modo que podemos escribir la forma general de la definición para energía mecánica sin un subíndice en U:

Energía mecánica de un sistema

$$E_{\text{mec}} \equiv K + U \tag{8.8}$$

donde U representa el total de *todos* los tipos de energía potencial.

Escribamos ahora los cambios en energía en la ecuación 8.7 explícitamente:

$$(K_f - K_i) + (U_f - U_i) = 0$$

La energía mecánica de un sistema aislado, libre de fricción, se conserva

$$K_f + U_f = K_i + U_i \tag{8.9}$$

Para la situación gravitacional que hemos descrito, la ecuación 8.9 se puede escribir como

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i$$

A medida que el libro cae a la Tierra, el sistema libro-Tierra pierde energía potencial y gana energía cinética, de forma tal que el total de los dos tipos de energía siempre permanece constante.

La ecuación 8.9 es un enunciado de **conservación de la energía mecánica** para un **sistema aislado.** Un sistema aislado es uno para el cual no hay transferencias de energía por la frontera. La energía en tal sistema se conserva; la suma de las energías cinética y potencial permanece constante. (Este enunciado supone que no actúan *fuerzas no conservativas* dentro del sistema; vea la advertencia 8.2).

¡ADVERTENCIA!

8.3 Energía mecánica en un sistema aislado

La ecuación 8.9 no es el único enunciado que podemos hacer para un sistema aislado. Esto describe conservación de *energía mecánica sólo* para el sistema aislado. En breve estudiaremos la forma de incluir energía interna. En capítulos posteriores, vamos a generar nuevos enunciados de conservación (y ecuaciones asociadas) relacionadas a otras cantidades que se conservan.

Pregunta rápida 8.4 En un sistema aislado, ¿cuál de los siguientes es un enunciado correcto de la cantidad que se conserva? (a) energía cinética (b) energía potencial (c) energía cinética más energía potencial (d) energía cinética y energía potencial.

Materiał chroniony prawem autorskim

Pregunta rápida 8.5 Una piedra de masa m se deja caer al suelo desde una altura h. Una segunda piedra, con masa $2m$, se deja caer desde la misma altura. Cuando la segunda piedra llega al suelo, su energía cinética es (a) el doble de la primera piedra (b) cuatro veces la de la primera piedra (c) la misma de la primera piedra (d) la mitad de la primera piedra (e) imposible de determinar.

Pregunta rápida 8.6 Tres pelotas idénticas se lanzan desde lo alto de un edificio, todas con la misma rapidez inicial. La primera se lanza horizontalmente, la segunda a algún ángulo sobre la horizontal, y la tercera a algún ángulo abajo de la horizontal, como se ve en la figura 8.3. Despreciando la resistencia del aire, ordene las magnitudes de rapidez de las pelotas en el instante en que cada una de ellas llegue al suelo.

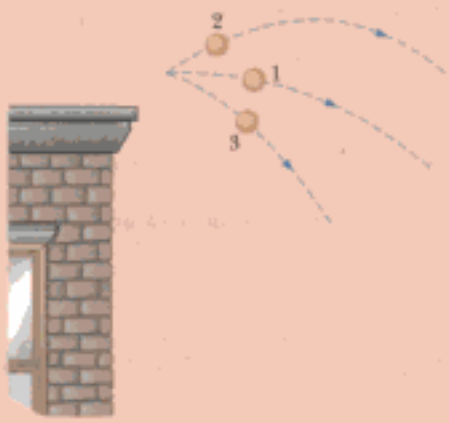


Figura 8.3 (Pregunta rápida 8.6) Tres pelotas idénticas se lanzan con la misma rapidez inicial desde lo alto de un edificio.

Energía potencial elástica

Ahora que ya estamos familiarizados con la energía potencial gravitacional; exploremos un segundo tipo de energía potencial. Considere un sistema formado por un bloque más un resorte, como se ve en la figura 8.4. La fuerza que el resorte ejerce sobre el bloque está dada por $F_s = -kx$. En el capítulo anterior, aprendimos que el trabajo realizado por una fuerza externa aplicada F_{ap}, sobre un sistema formado por un bloque conectado al resorte, está dado por la ecuación 7.12:

$$W_{F_{ap}} = \tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2 \tag{8.10}$$

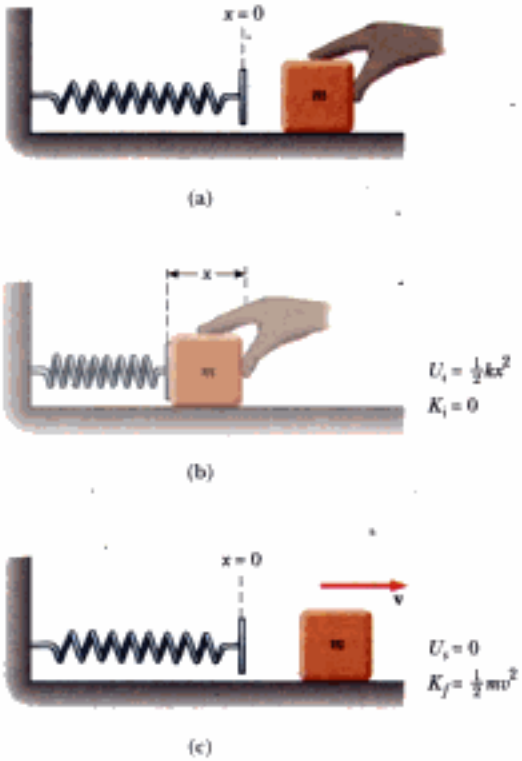
En esta situación, las coordenadas x inicial y final del bloque se miden desde su posición de equilibrio, $x = 0$. De nuevo (al igual que en el caso gravitacional), vemos que el trabajo realizado sobre el sistema es igual a la diferencia entre los valores inicial y final de una expresión relacionada con la configuración del sistema. La función **energía potencial elástica** asociada con el sistema bloque-resorte está definida por

Energía potencial elástica almacenada en un resorte

$$U_s = \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{8.11}$$

La energía potencial elástica del sistema se puede considerar como la energía almacenada en el resorte deformado (ya sea comprimido o estirado desde su posición de equilibrio). Para visualizar esto, considere la figura 8.4, que muestra un resorte sobre una superficie horizontal sin fricción. Cuando un bloque es empujado contra el resorte (figura 8.4b) y el resorte se comprime una distancia x, la energía potencial elástica almacenada en el resorte es $\frac{1}{2}kx^2$. Cuando el bloque se suelta desde el reposo, el resorte ejerce una fuerza

Materiał chroniony prawem autorskim



En el vínculo **Active Figures** *en* **http://www.pse6.com**, *usted puede comprimir el resorte al hacer variar las cantidades y observar el efecto sobre la rapidez del bloque.*

Figura activa 8.4 (a) Resorte no deformado sobre una superficie horizontal sin fricción. (b) Un bloque de masa m es empujado contra el resorte, comprimiéndolo una distancia x. (c) Cuando el bloque se suelta desde el reposo, la energía potencial elástica almacenada en el resorte es transferida al bloque en la forma de energía cinética.

sobre el bloque y regresa a su longitud original. La energía potencial elástica se transforma en energía cinética del bloque (figura 8.4c).

La energía potencial elástica almacenada en un resorte es cero siempre que el resorte no se deforme ($x = 0$). Se almacena energía sólo cuando el resorte se estira o se comprime. Además, la energía potencial elástica es máxima cuando el resorte ha alcanzado su máxima compresión o extensión (esto es, cuando $|x|$ es máxima). Finalmente, debido a que la energía potencial elástica es proporcional a x^2, vemos que U_s siempre es positiva en un resorte deformado.

Pregunta rápida 8.7 Una pelota se conecta a un resorte ligero suspendido verticalmente, como se ve en la figura 8.5. Cuando se desplaza hacia abajo desde su posición de equilibrio y se suelta, la pelota oscila hacia arriba y abajo. En el sistema de *la pelota, el resorte y la Tierra*, ¿qué formas de energía hay durante el movimiento? (a) cinética y potencial elástica (b) cinética y potencial gravitacional (c) cinética, potencial elástica y potencial gravitacional (d) potencial elástica y potencial gravitacional.

Pregunta rápida 8.8 Considere de nuevo la situación de la pregunta rápida 8.7. En el sistema de *la pelota y el resorte*, ¿qué formas de energía hay durante el movimiento? (a) cinética y potencial elástica (b) cinética y potencial gravitacional (c) cinética, potencial elástica, y potencial gravitacional (d) potencial elástica y potencial gravitacional.

Figura 8.5 (Preguntas rápidas 8.7 y 8.8) Pelota conectada a un resorte sin masa suspendido verticalmente. ¿Qué formas de energía potencial están asociadas con el sistema cuando la pelota se desplaza hacia abajo?

Materiał chroniony prawem autorskim

SUGERENCIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Sistemas aislados; conservación de la energía mecánica

Podemos tener numerosos problemas en física con el uso del principio de conservación de la energía mecánica. El estudiante debe incorporar el siguiente procedimiento cuando aplique este principio:

- Definir su sistema aislado, que puede incluir dos o más partículas que interactúan, así como resortes u otras estructuras en las que se puede almacenar energía potencial elástica. Asegúrese de incluir todos los componentes del sistema que ejerzan fuerzas entre ellos. Identifique las configuraciones inicial y final del sistema.
- Identificar configuraciones para energía potencial cero (gravitacional y de resorte). Si hay más de una fuerza que actúa dentro del sistema, escriba una expresión para la energía potencial asociada con cada fuerza.
- Si ésta presenta una fricción o resistencia del aire, no se conserva la energía mecánica y deben emplearse las técnicas de la sección 8.4.
- Si se conserva la energía mecánica del sistema, el estudiante puede escribir la energía total $E_i = K_i + U_i$ para la configuración inicial. A continuación, elabore una expresión para la energía total $E_f = K_f + U_f$ para la configuración final que es de interés. Debido a que se conserva la energía mecánica, el estudiante puede igualar las dos energías totales y despejar la cantidad que sea desconocida.

Ejemplo 8.2 Pelota en caída libre

Una pelota de masa m se deja caer desde una altura h sobre el suelo, como se ve en la figura 8.6.

(A) Despreciando la resistencia del aire, determine la rapidez de la pelota cuando esté a una altura y sobre el suelo.

Solución La figura 8.6 y nuestra experiencia diaria con objetos que caen, nos permiten conceptualizar la situación. Si bien podemos fácilmente resolver este problema con las técnicas del capítulo 2, tomemos un planteamiento de energía y clasifiquemos éste como un problema de energía como práctica. Para analizar el problema, identifiquemos el sistema como la pelota y la Tierra. Como no hay resistencia del aire y el sistema está aislado, aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica al sistema pelota-Tierra.

En el instante en que se suelta la pelota, su energía cinética es $K_i = 0$ y la energía potencial del sistema es $U_i = mgh$. Cuando la pelota está a una distancia y sobre el suelo, su energía cinética es $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ y la energía potencial con respecto al suelo es $U_f = mgy$. Al aplicar la ecuación 8.9 obtenemos

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 + mgy = 0 + mgh$$

$$v_f^2 = 2g(h - y)$$

$$v_f = \sqrt{2g(h - y)}$$

La rapidez es siempre positiva. Si se nos hubiera pedido hallar la velocidad de la pelota, usaríamos el valor negativo de la raíz cuadrada como el componente y para indicar movimiento hacia abajo.

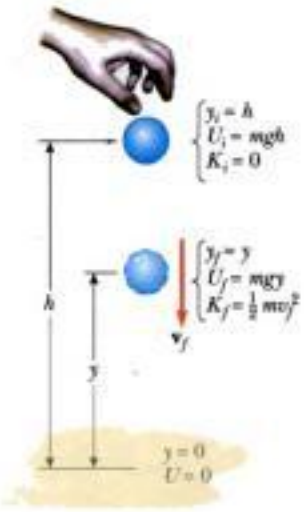


Figura 8.6 (Ejemplo 8.2) Una pelota se deja caer desde una altura h sobre el suelo. Inicialmente, la energía total del sistema pelota-Tierra es energía potencial, igual a mgh con respecto al suelo. En la elevación y, la energía total es la suma de las energías cinética y potencial.

(B) Determine la rapidez de la pelota en y si en el instante de soltarla ya tiene una rapidez inicial v_i hacia arriba en la altura inicial h.

Solución En este caso, la energía inicial incluye energía cinética igual a $\frac{1}{2}mv_i^2$ y la ecuación 8.9 da

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 + mgy = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + mgh$$

Materiał chroniony prawem autorskim

$$v_f^2 = v_i^2 + 2g(h - y)$$

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2g(h - y)}$$

Nótese que este resultado es consistente con la expresión $v_{yf}^2 = v_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$ de cinemática, donde $y_i = h$. Además, este resultado es válido incluso si la velocidad inicial forma un ángulo con respecto a la horizontal (pregunta rápida 8.6) por dos razones: (1) la energía es un escalar, y la energía cinética depende sólo de la magnitud de la velocidad; y (2) el cambio en la energía potencial gravitacional depende sólo del cambio en posición en la dirección vertical.

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si la velocidad inicial v_i de la parte (B) fuera hacia abajo? ¿Cómo afectaría esto la rapidez de la pelota en la posición y?

Respuesta Podríamos estar tentados a decir que lanzarla hacia abajo resultaría en que la pelota tendría una rapidez más alta en y que si la lanzamos hacia arriba. La conservación de la energía mecánica, sin embargo, depende de las energías cinética y potencial, que son escalares. Por lo tanto, la dirección del vector de velocidad inicial no tiene que ver en la rapidez final.

Ejemplo 8.3 El péndulo

Un péndulo está formado por una esfera de masa m unida a una cuerda ligera de longitud L, como se muestra en la figura 8.7. La esfera se suelta desde el reposo en el punto Ⓐ cuando la cuerda forma un ángulo θ_A con la vertical, y el pivote en P es sin fricción.

(A) Encuentre la rapidez de la esfera cuando esté en el punto más bajo Ⓑ.

Solución La única fuerza que realiza trabajo sobre la esfera es la fuerza gravitacional. (La fuerza aplicada por la cuerda es siempre perpendicular a cada elemento del desplazamiento y, por lo tanto, no realiza trabajo.) Debido a que el sistema péndulo-Tierra está aislado, se conserva la energía del sistema. Cuando el péndulo oscila, ocurre una transformación continua entre energía potencial y cinética. En el instante en que se suelta el péndulo, la energía del sistema es enteramente potencial. En el punto Ⓑ el péndulo tiene energía cinética, pero el sistema ha perdido parte de su energía potencial. En Ⓒ el sistema ha vuelto a ganar su energía potencial inicial, y la energía cinética del péndulo vuelve a ser cero.

Si medimos las coordenadas y de la esfera desde el centro de rotación, entonces $y_A = -L\cos\theta_A$ y $y_B = -L$. Por lo tanto, $U_A = -mgL\cos\theta_A$ y $U_B = -mgL$.

Si se aplica el principio de conservación de la energía mecánica al sistema, tendremos

$$K_B + U_B = K_A + U_A$$

$$\tfrac{1}{2}mv_B^2 - mgL = 0 - mgL\cos\theta_A$$

$$(1) \qquad v_B = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta_A)}$$

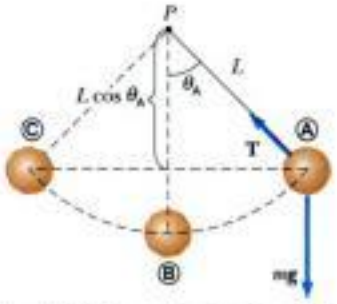


Figura 8.7 (Ejemplo 8.3) Si se suelta la esfera desde el reposo en el ángulo θ_A, nunca se balanceará por encima de esta posición durante el movimiento. Al inicio de éste, cuando la esfera está en la posición Ⓐ, la energía del sistema esfera-Tierra es potencial. Esta energía potencial de inicio se transforma en energía cinética cuando la esfera llega al punto Ⓑ. Si el desplazamiento continúa a lo largo del arco, la energía se transforma totalmente en potencial cuando se alcanza el punto Ⓒ.

(B) ¿Cuál es la tensión T_B en la cuerda en Ⓑ?

Solución Debido a que la fuerza de tensión no realiza trabajo, no entra en una ecuación de energía y no podemos determinar la tensión si usamos el método de energía. Para hallar T_B, podemos aplicar la segunda ley de Newton a la dirección radial. Primero, recordemos que la aceleración centrípeta de una partícula que se mueve en un círculo es igual a v^2/r dirigida hacia el centro de rotación. Como $r = L$ en este ejemplo, la segunda ley de Newton dará

$$(2) \qquad \sum F_r = mg - T_B = ma_r = -m\frac{v_B^2}{L}$$

Sustituyendo la ecuación (1) en la ecuación (2), tendremos la tensión en el punto Ⓑ como función de θ_A:

$$(3) \qquad T_B = mg + 2mg(1 - \cos\theta_A) = mg(3 - 2\cos\theta_A)$$

De la ecuación (2) vemos que la tensión en Ⓑ es mayor que el peso de la esfera. Además, la ecuación (3) da el resultado esperado que $T_B = mg$ cuando el ángulo inicial $\theta_A = 0$. Nótese también que la parte (A) de este ejemplo se clasifica como un problema de energía, mientras que la parte (B) se clasifica como problema de segunda ley de Newton.

Ejemplo 8.4 Una gran entrada

El estudiante está diseñando un aparato para sostener un actor de masa 65 kg que debe "volar" al escenario durante la representación de una obra. Usted une el arnés del actor a un saco de arena de 130 kg, por medio de un cable de acero de peso ligero que pasa suavemente por dos poleas sin fricción, como se ve en la figura 8.8a. Se necesitan 3.0 m de cable entre el arnés y la polea más cercana, para que la polea pueda ocultarse tras una cortina. Para que el aparato funcione bien, el saco de arena

Materiał chroniony prawem autorskim

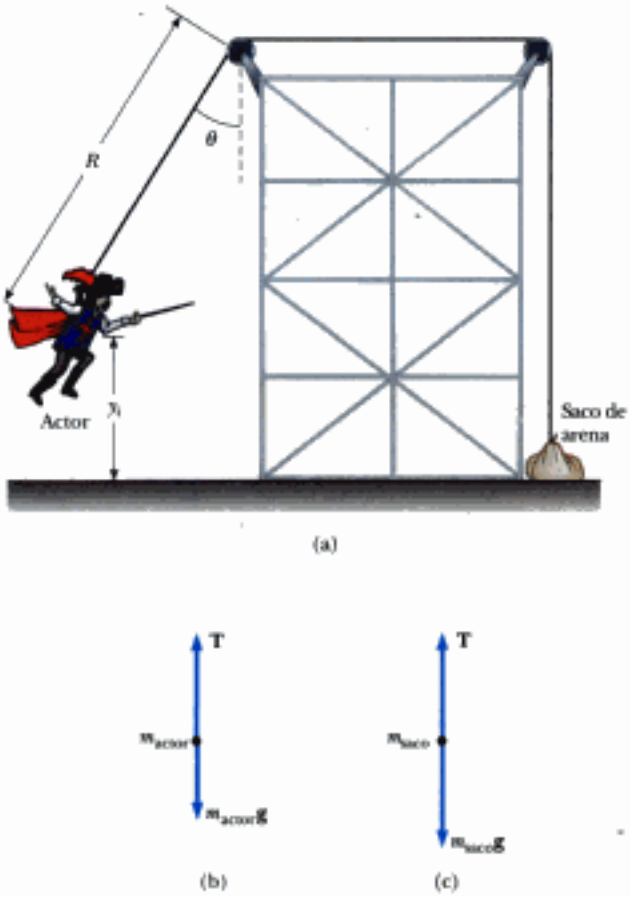


Figura 8.8 (Ejemplo 8.4) (a) Un actor usa una inteligente escenificación para hacer su entrada. (b) Diagrama de cuerpo libre para el actor en la parte baja de la trayectoria circular. (c) Diagrama de cuerpo libre para el saco de arena.

nunca debe levantarse arriba del piso cuando el actor oscila desde arriba del escenario al piso. Llamemos θ al ángulo que el cable del actor forma con la vertical. ¿Cuál es el máximo valor que θ puede tener antes que el saco de arena se levante del piso?

Solución Debemos usar varios conceptos para resolver este problema. Para conceptualizar, imaginemos lo que ocurre cuando el actor se aproxima a la parte baja de la oscilación. En ella, el cable está vertical y debe sostener su peso y dar aceleración centrípeta de su cuerpo en la dirección hacia arriba. En este punto, la tensión del cable es la más alta, y es más probable que el saco de arena se levante del piso. Mirando primero la oscilación del actor desde el punto inicial al punto más bajo, clasificamos éste como un problema de energía en donde aparece un sistema aislado: el actor y la Tierra. Usamos el principio de conservación de la energía mecánica para el sistema para hallar la rapidez del actor cuando él llega al piso como función del ángulo inicial θ y el radio R de la trayectoria circular por la que se columpia.

Si se aplica la conservación de la energía mecánica al sistema actor-Tierra resulta

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$(1) \qquad \tfrac{1}{2} m_{actor} v_f^2 + 0 = 0 + m_{actor} g y_i$$

donde y_i es la altura inicial del actor sobre el piso y v_f es la rapidez del actor en el instante antes que llegue al suelo. (Nótese que $K_i = 0$ porque él inicia desde el reposo y que $U_f = 0$ porque definimos la configuración del actor en el piso como que tiene una energía potencial gravitacional de cero.) De la geometría de la figura 8.8a, y observando que $y_f = 0$, vemos que $y_i = R - R\cos\theta = R(1 - \cos\theta)$. Usando esta relación en la ecuación (1), obtenemos

$$(2) \qquad v_f^2 = 2gR(1 - \cos\theta)$$

A continuación nos concentramos en el instante en que el actor está en el punto más bajo. Debido a que la tensión del cable se transfiere como fuerza aplicada al saco de arena, clasificamos la situación en este instante como un problema de segunda ley de Newton. Aplicamos la segunda ley de Newton al actor en la parte más baja de su trayectoria, usando el diagrama de cuerpo libre de la figura 8.8b como guía:

$$\sum F_y = T - m_{actor}g = m_{actor}\frac{v_f^2}{R}$$

$$(3) \qquad T = m_{actor}g + m_{actor}\frac{v_f^2}{R}$$

Finalmente, vemos que el saco de arena se levanta del piso cuando la fuerza hacia arriba sobre el saco ejercida por el cable excede la fuerza gravitacional que actúa sobre el mismo; la fuerza normal es cero cuando esto ocurre. Por lo tanto, cuando concentramos nuestra atención en el saco de arena, clasificamos esta parte de la situación como otro problema de segunda ley de Newton. Una fuerza T de magnitud dada por la ecuación (3) es transmitida por el cable al saco de arena. Si éste debe apenas levantarse del piso, la fuerza normal sobre él se convierte en cero y requerimos que $T = m_{saco}g$, como en la figura 8.8c. Si usamos esta condición junto con las ecuaciones (2) y (3), encontramos que

$$m_{saco}g = m_{actor}g + m_{actor}\frac{2gR(1 - \cos\theta)}{R}$$

Al despejar $\cos\theta$ y sustituir en los parámetros dados, obtenemos

$$\cos\theta = \frac{3m_{actor} - m_{saco}}{2m_{actor}} = \frac{3(65\text{ kg}) - 130\text{ kg}}{2(65\text{ kg})} = 0.50$$

$$\theta = 60°$$

Nótese que teníamos que combinar técnicas de diferentes campos de nuestro estudio: energía y segunda ley de Newton. Además, vemos que la longitud R del cable desde el arnés del actor a la polea de la extrema izquierda no aparecen en la ecuación algebraica final. Por lo tanto, la respuesta final es independiente de R.

¿Qué pasaría si? **¿Qué pasaría si un tramoyista coloca el saco de arena de modo que el cable que va del saco de arena a la polea derecha de la figura 8.8a no está vertical, sino que forma un ángulo ϕ con la vertical? Si el actor oscila desde el ángulo encontrado en la solución de líneas antes, ¿el saco de arena se levantará del piso? Suponga que la longitud R permanece igual.**

Respuesta En esta situación, la fuerza gravitacional que actúa sobre el saco de arena ya no es paralela al cable. En consecuencia, sólo un componente de la fuerza del cable actúa contra la fuerza gravitacional, y la resultante vertical de este componente

Materiał chroniony prawem autorskim

de fuerza y la fuerza gravitacional deben ser hacia abajo. Por lo tanto, debe haber una fuerza normal diferente de cero para equilibrar este resultado, y el saco de arena *no debe* levantarse del piso.

Si el saco de arena está en equilibrio en la dirección y y la fuerza normal desde el piso se va a cero, la segunda ley de Newton nos da $T \cos \phi = m_{saco}g$. En este caso, la ecuación (3) da

$$\frac{m_{saco}g}{\cos \phi} = m_{actor}g + m_{actor}\frac{v_y^2}{R}$$

La sustitución por v_y desde la ecuación (2) da

$$\frac{m_{saco}g}{\cos \phi} = m_{actor}g + m_{actor}\frac{2gR(1 - \cos \theta)}{R}$$

Al despejar $\cos \theta$ tendremos

$$(4) \qquad \cos \theta = \frac{3m_{actor} - \dfrac{m_{saco}}{\cos \phi}}{2m_{actor}}$$

Para $\phi = 0$, que es la situación en la figura 8.8a, $\cos \phi = 1$. Para valores de ϕ diferentes de cero, el término $\cos \phi$ es menor a 1. Esto hace menor al numerador de la fracción en la ecuación (4), lo cual hace mayor el ángulo θ. Por lo tanto, el saco de arena permanece en el piso si el actor oscila desde un ángulo mayor. Si oscila desde el ángulo original, el saco de arena permanece en el piso. Por ejemplo, suponga que $\phi = 10°$. Entonces, la ecuación (4) da

$$\cos \theta = \frac{3(65 \text{ kg}) - \dfrac{130 \text{ kg}}{\cos 10°}}{2(65 \text{ kg})} = 0.48 \longrightarrow \theta = 61°$$

En consecuencia, si el actor oscila desde 60°, oscila desde un ángulo abajo del nuevo ángulo máximo permitido, y el saco de arena permanece en el piso.

Un factor que no hemos abordado es la fuerza de fricción entre el saco de arena y el piso. Si esta fuerza no es suficientemente grande, el saco de arena puede quedar libre y empezar a deslizarse en forma horizontal cuando el actor llegue a algún punto en su oscilación. Esto hará que aumente la longitud R, y el actor puede tener un momento de alarma cuando empiece a caer además de oscilar.

Ejemplo 8.5 El rifle con mecanismo de resorte

El mecanismo de lanzamiento de un fusil de juguete está formado por un resorte de constante de resorte desconocida (figura 8.9a). Cuando el resorte se comprime 0.120 m, el fusil, disparado verticalmente, puede lanzar un proyectil de 35.0 g a una altura máxima de 20.0 m sobre la posición del proyectil antes de ser lanzado.

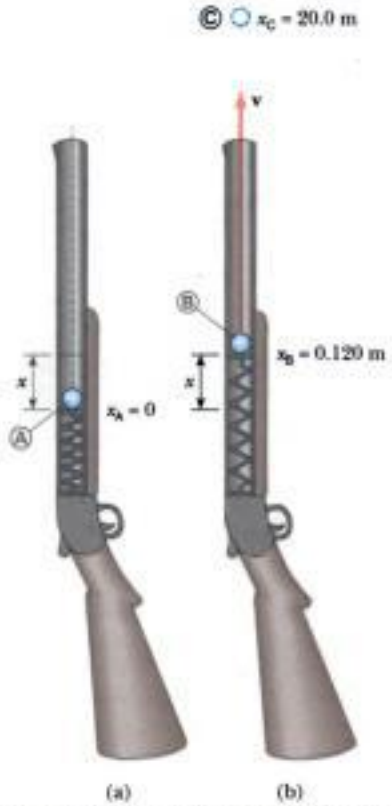


Figura 8.9 (Ejemplo 8.5) Fusil con mecanismo de resorte.

(A) Despreciando todas las fuerzas resistivas, determine la constante del resorte.

Solución Debido a que el proyectil inicia desde el reposo, su energía cinética inicial es cero. Si consideramos que la configuración cero para la energía potencial gravitacional del sistema proyectil-resorte-Tierra es cuando el proyectil está en la posición más baja x_A, entonces la energía potencial gravitacional inicial del sistema también es cero. La energía mecánica de este sistema se conserva porque el sistema está aislado.

Inicialmente, la única energía mecánica del sistema es la energía potencial elástica almacenada en el resorte del fusil, $U_{sA} = \frac{1}{2}kx^2$, donde la compresión del resorte es $x = 0.120$ m. El proyectil sube a una altura máxima $x_C = h = 20.0$ m, y por lo tanto la energía potencial gravitacional final del sistema, cuando el proyectil llegue a su altura máxima, es mgh. La energía cinética final del proyectil es cero, y la energía potencial elástica final del resorte es cero. Debido a que la energía mecánica del sistema se conserva, encontramos que

$$E_C = E_A$$

$$K_C + U_{gC} + U_{sC} = K_A + U_{gA} + U_{sA}$$

$$0 + mgh + 0 = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$k = \frac{2mgh}{x^2} = \frac{2(0.035\,0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(20.0 \text{ m})}{(0.120 \text{ m})^2}$$

$$= \mathbf{953 \text{ N/m}}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

(B) Encuentre la rapidez del proyectil cuando se mueve por la posición de equilibrio del resorte (cuando $x_B = 0.120$ m), como se ve en la figura 8.9b.

Solución Como ya se hizo notar, la única energía mecánica del sistema en Ⓐ es la energía potencial elástica $\frac{1}{2}kx^2$. La energía total del sistema, cuando el proyectil se mueve por la posición de equilibrio del resorte, incluye la energía cinética del proyectil $\frac{1}{2}mv_B^2$ y la energía potencial gravitacional mgx_B del sistema. Por lo tanto, el principio de conservación de la energía mecánica en este caso da

$$E_B = E_A$$

$$K_B + U_{gB} + U_{sB} = K_A + U_{gA} + U_{sA}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgx_B + 0 = 0 + 0 + \frac{1}{2}kx^2$$

Al despejar v_B resulta

$$v_B = \sqrt{\frac{kx^2}{m} - 2gx_B}$$

$$= \sqrt{\frac{(953\ \text{N/m})(0.120\ \text{m})^2}{(0.0350\ \text{kg})} - 2(9.80\ \text{m/s}^2)(0.120\ \text{m})}$$

$$= \mathbf{19.7\ m/s}$$

8.3 Fuerzas conservativas y no conservativas

Cuando un objeto se mueve hacia abajo cerca de la superficie terrestre, el trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre el objeto no depende de si cae verticalmente o se desliza hacia abajo en un plano inclinado. Todo lo que importa es el cambio en la elevación del objeto. No obstante, la pérdida de energía debida a la fricción en ese plano inclinado depende de la distancia que el objeto se deslice. En otras palabras, la trayectoria no marca la diferencia cuando consideramos el trabajo realizado por la fuerza gravitacional, pero sí lo hace distinto cuando consideramos la energía perdida debido a fuerzas de fricción. Podemos usar esta dependencia variable en la trayectoria para clasificar fuerza como conservativas o no conservativas.

De las dos fuerzas que acabamos de citar, la fuerza gravitacional es conservativa y la fuerza de fricción es no conservativa.

Fuerzas conservativas

Las **fuerzas conservativas** tienen estas dos propiedades equivalentes:

Propiedades de una fuerza conservativa

1. El trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre una partícula que se mueve entre cualesquier dos puntos, es independiente de la trayectoria tomada por la partícula.
2. El trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre una partícula que se mueve por una trayectoria cerrada es cero. (Una trayectoria cerrada es aquella en la que los puntos inicial y final son idénticos).

La fuerza gravitacional es un ejemplo de fuerza conservativa, y la fuerza que un resorte ejerce sobre cualquier objeto unido al resorte es otro ejemplo. Como aprendimos en la sección anterior, el trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre un objeto que se mueve entre cualesquier dos puntos cerca de la superficie terrestre es $W_g = mgy_i - mgy_f$. De esta ecuación, vemos que W_g depende sólo de las coordenadas y inicial y final del objeto y, por lo tanto, es independiente de la trayectoria. Además, W_g es cero cuando el objeto se mueve sobre cualquier trayectoria cerrada (donde $y_i = y_f$).

Para el sistema objeto-resorte, el trabajo W_s realizado por la fuerza del resorte está dado por $W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$ (ecuación 7.11). De nuevo, vemos que la fuerza del resorte es conservativa porque W_s depende sólo de las coordenadas x inicial y final del objeto y es cero para cualquier trayectoria cerrada.

Podemos asociar una energía potencial para un sistema con cualquier fuerza conservativa que actúe entre miembros del sistema y podemos hacer esto sólo para fuerzas conservativas. En la sección previa, la energía potencial asociada con la fuerza gravitacional se definió como $U_g = mgy$. En general, el trabajo W_c realizado por una fuerza conservativa sobre un objeto que es miembro de un sistema, cuando el objeto se mueve de una posición a otra, es igual al valor inicial de la energía potencial del sistema menos el valor final:

$$W_c = U_i - U_f = -\Delta U \tag{8.12}$$

¡ADVERTENCIA!

8.4 Advertencia de ecuación semejante

Compare la ecuación 8.12 con la ecuación 8.3. Estas ecuaciones son semejantes excepto por el signo negativo, que es una fuente común de confusión. La ecuación 8.3 nos dice que el trabajo realizado *por un agente externo* sobre un sistema produce un aumento en la energía potencial del sistema (sin cambio en la energía cinética o interna). La ecuación 8.12 indica que el trabajo realizado *sobre un componente de un sistema por una fuerza conservativa interna a un sistema aislado* produce una disminución en la energía potencial del sistema (con un correspondiente aumento en energía cinética).

Materiał chroniony prawem autorskim

Esta ecuación debe serle familiar al estudiante. Es la forma general de la ecuación para el trabajo realizado por la fuerza gravitacional (ecuación 8.4), cuando un objeto se mueve con respecto a la Tierra, y es la ecuación para el trabajo realizado por la fuerza de resorte (ecuación 7.11) cuando cambia la extensión del resorte.

Fuerzas no conservativas

Una fuerza es **no conservativa** si no satisface las propiedades 1 y 2 para fuerzas conservativas. Las fuerzas no conservativas que actúen dentro de un sistema producen un *cambio* en la energía mecánica E_{mec} del sistema. Hemos definido la energía mecánica como la suma de la energía cinética y todas las energías potenciales. Por ejemplo, si un libro se desliza sobre una superficie horizontal que no sea sin fricción, la fuerza de fricción cinética reduce la energía cinética del libro. Cuando el libro reduce su velocidad, disminuye su energía cinética. Como consecuencia de la fuerza de fricción, aumentan las temperaturas del libro y la superficie. El tipo de energía asociado con la temperatura es la energía interna, que se vio en el capítulo anterior. Sólo parte de la energía cinética del libro se transforma en energía interna del libro. El resto aparece como energía interna en la superficie. (Cuando una persona corre, tropieza y cae por el piso de un gimnasio, no sólo se calientan su piel y rodillas, sino también el piso) Debido a que la fricción cinética transforma la energía mecánica de un sistema en energía interna, es una fuerza no conservativa.

Como ejemplo de la dependencia de la trayectoria en el trabajo, considere la figura 8.10. Supongamos que una persona mueve un libro entre dos puntos sobre una mesa. Si el libro se desplaza en línea recta a lo largo de la trayectoria azul entre los puntos Ⓐ y Ⓑ en la figura 8.10, realiza cierta cantidad de trabajo contra la fuerza de fricción cinética para mantener el libro en movimiento a una rapidez constante. Ahora imaginemos que la persona empuja el libro a lo largo de una trayectoria semicircular de la figura 8.10. La persona realiza más trabajo contra la fricción a lo largo de esta trayectoria más larga que a lo largo de la trayectoria recta. El trabajo realizado depende de la trayectoria, de modo que la fuerza de fricción no puede ser conservativa.

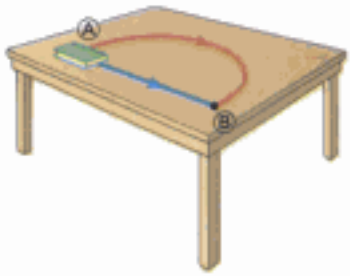


Figura 8.10 El trabajo realizado contra la fuerza de fricción cinética depende de la trayectoria tomada cuando el libro se mueve de Ⓐ a Ⓑ. El trabajo es mayor a lo largo de la trayectoria roja que a lo largo de la azul.

8.4 Cambios en la energía mecánica para fuerzas no conservativas

Como hemos visto, si las fuerzas que actúan sobre objetos dentro de un sistema son conservativas, entonces se conserva la energía mecánica del sistema. No obstante, si parte de las fuerzas que actúan sobre objetos dentro del sistema no son conservativas, entonces cambia la energía mecánica del sistema.

Considere el libro que se desliza por la superficie de la sección anterior. Cuando el libro se mueve una distancia d, la única fuerza que realiza trabajo sobre él, es la fuerza de fricción cinética. Esta fuerza produce una disminución en la energía cinética del libro. Esta disminución se calculó en el capítulo 7, lleva a la ecuación 7.20, que repetimos aquí:

$$\Delta K = -f_k d \tag{8.13}$$

Supongamos, sin embargo, que el libro es parte de un sistema que también exhibe un cambio en energía potencial. En este caso, $-f_k d$ es la cantidad en que cambia la energía *mecánica* debido a la fuerza de fricción cinética. Por ejemplo, si el libro se mueve en un plano inclinado que no tenga fricción, hay un cambio en la energía cinética y en la energía potencial gravitacional del sistema libro-Tierra. En consecuencia,

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U_g = -f_k d$$

En general, si una fuerza de fricción actúa dentro de un sistema,

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U = -f_k d \tag{8.14}$$

Cambio en la energía mecánica de un sistema debido a la fricción dentro del sistema

donde ΔU es el cambio en *todas* las formas de energía potencial. Nótese que la ecuación 8.14 se reduce a la ecuación 8.9 si la fuerza de fricción es cero.

Materiał chroniony prawem autorskim

Pregunta rápida 8.9 Un bloque de masa m es proyectado por una superficie horizontal con una rapidez inicial v. Se desliza hasta que se detiene debido a la fuerza de fricción entre el bloque y la superficie. El mismo bloque es ahora proyectado en una superficie horizontal con una rapidez inicial $2v$. Cuando el bloque se detiene, ¿cómo se compara la distancia desde el punto de proyección con la distancia del primer caso? (a) Es la misma. (b) Es el doble en magnitud. (c) Es cuatro veces mayor. (d) La relación no se puede determinar.

Pregunta rápida 8.10 Un bloque de masa m es proyectado por una superficie horizontal con una rapidez inicial v. Se desliza hasta que se detiene debido a la fuerza de fricción entre el bloque y la superficie. La superficie está ahora inclinada 30°, y el bloque se proyecta hacia arriba de la superficie con la misma rapidez inicial v. Suponga que la fuerza de fricción permanece igual que cuando el bloque se deslizaba sobre la superficie horizontal. Cuando el bloque se detiene momentáneamente, ¿cómo se compara la reducción en energía mecánica del sistema bloque-superficie-Tierra con la reducción cuando el bloque se desliza sobre la superficie horizontal? (a) Es igual. (b) Es mayor. (c) Es menor. (d) La relación no puede ser determinada.

SUGERENCIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Sistemas aislados; fuerzas no conservativas

El estudiante debe incorporar el siguiente procedimiento cuando aplique métodos de energía a un sistema en el que actúan fuerzas no conservativas:

- Siga el procedimiento de los primeros tres puntos indicados en *sugerencias para la solución de problemas* de la sección 8.2. Si dentro del sistema actúan fuerzas no conservativas, el tercer punto debe indicarle que use las técnicas de esta sección.
- Escriba expresiones para las energías mecánicas total inicial y total final del sistema. La diferencia entre la energía mecánica total final y la energía mecánica total inicial es igual al cambio en energía mecánica del sistema debido a la fricción.

Ejemplo 8.6 Caja que se desliza hacia abajo por una rampa

Una caja de 3.00 kg se desliza hacia abajo por una rampa que mide 1.00 m de largo y está inclinada a un ángulo de 30.0°, como se muestra en la figura 8.11. La caja inicia desde el reposo en la parte alta, experimenta una fuerza constante de fricción de magnitud 5.00 N, y continúa moviéndose una corta distancia sobre el piso horizontal una vez que sale de la rampa. Use métodos de energía para determinar la rapidez de la caja en la parte inferior de la rampa.

Solución Debido a que $v_i = 0$, la energía cinética del sistema caja-Tierra cuando la caja está en lo alto de la rampa es cero. Si se mide la coordenada y desde la parte inferior de la rampa (la posición final de la caja, para la cual la energía potencial gravitacional del sistema es cero) con la dirección hacia arriba siendo positiva, entonces $y_i = 0.500$ m. Por lo tanto, la energía mecánica total del sistema, cuando la caja está en lo alto, es toda energía potencial:

$$E_i = K_i + U_i = 0 + U_i = mgy_i$$

$$= (3.00\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(0.500\ \text{m}) = 14.7\ \text{J}$$

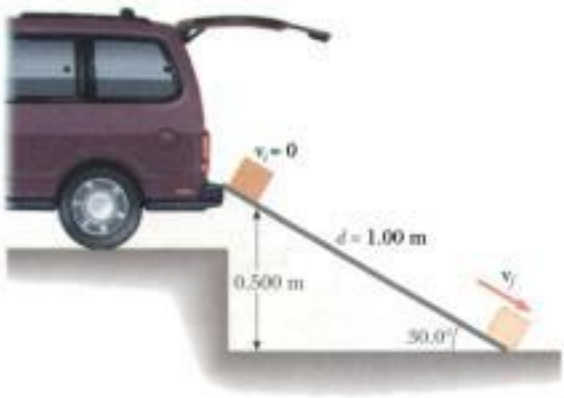


Figura 8.11 (Ejemplo 8.6) Una caja se desliza hacia abajo por una rampa bajo la influencia de la gravedad. La energía potencial disminuye mientras la energía cinética aumenta.

Materiał chroniony prawem autorskim

Cuando la caja llega a la parte más baja de la rampa, la energía potencial del sistema es cero, porque la elevación de la caja es $y_f = 0$. Por lo tanto, la energía mecánica total del sistema cuando la caja llega a la parte más baja es toda energía cinética:

$$E_f = K_f + U_f = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + 0$$

No podemos decir que $E_i = E_f$ porque una fuerza no conservativa reduce la energía mecánica del sistema. En este caso, la ecuación 8.14 da $\Delta E_{mec} = -f_k d$, donde d es la distancia que la caja se mueve a lo largo de la rampa. (Recuerde que las fuerzas normales a la rampa no realizan trabajo sobre la caja, porque son perpendiculares al desplazamiento.) Con $f_k = 5.00$ N y $d = 1.00$ m, tenemos

$$(1) \qquad -f_k d = (-5.00\ \text{N})(1.00\ \text{m}) = -5.00\ \text{J}$$

Al aplicar la ecuación 8.14 resulta

$$E_f - E_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - mgy_i = -f_k d$$

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2}mv_f^2 = 14.7\ \text{J} - 5.00\ \text{J} = 9.70\ \text{J}$$

$$v_f^2 = \frac{19.4\ \text{J}}{3.00\ \text{kg}} = 6.47\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v_f = \mathbf{2.54\ m/s}$$

¿Qué pasaría si? Un trabajador precavido decide que la rapidez de la caja cuando llegue a la parte más baja de la rampa puede ser tan grande que su contenido puede dañarse. Por lo tanto, sustituye la rampa con otra más larga de modo que la nueva rampa forma un ángulo de 25° con el suelo. Esta nueva rampa, ¿reduce la rapidez de la caja cuando llegue al suelo?

Respuesta Debido a que la rampa es más larga, la fuerza de fricción actuará sobre una distancia más larga y transforma más la energía mecánica en energía interna. Esto reduce la energía cinética de la caja, y esperamos una rapidez más baja cuando llegue al suelo.

Podemos hallar la longitud d de la nueva rampa como sigue:

$$\text{sen } 25° = \frac{0.500\ \text{m}}{d} \longrightarrow d = \frac{0.500\ \text{m}}{\text{sen } 25°} = 1.18\ \text{m}$$

Ahora la ecuación (1) se convierte en

$$-f_k d = (-5.00\ \text{N})(1.18\ \text{m}) = -5.90\ \text{J}$$

y la ecuación (2) se convierte en

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 = 14.7\ \text{J} - 5.90\ \text{J} = 8.80\ \text{J}$$

lo cual nos lleva a

$$v_f = 2.42\ \text{m/s}$$

La rapidez final es ciertamente menor que en el caso del ángulo mayor.

Ejemplo 8.7 Movimiento en un tobogán curvo

Un niño de masa m se desliza en un plano irregularmente curvado de altura $h = 2.00$ m, como se ve en la figura 8.12. El niño arranca desde el reposo en la parte alta.

(A) Determine su rapidez en la parte más baja, suponiendo que no hay fricción.

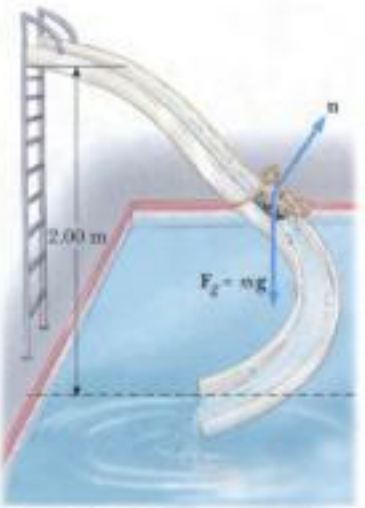


Figura 8.12 (Ejemplo 8.7) Si el tobogán es sin fricción, la rapidez del niño en la parte más baja depende sólo de la altura de la rampa.

Solución Aun cuando se supone que el estudiante no tiene experiencia en superficies totalmente sin fricción, puede conceptualizar que su rapidez en la parte más baja de una rampa sin fricción será mayor que en la situación donde hay fricción. Si tratáramos de resolver este problema con leyes de Newton, tendríamos dificultades, porque la aceleración del niño varía continuamente en dirección debido a la forma irregular de la rampa. El sistema niño-Tierra es aislado y sin fricción, sin embargo, de modo que podemos clasificar éste como un problema de conservación de la energía y buscamos una solución si usamos el planteamiento de energía. (Nótese que la fuerza normal **n** no realiza trabajo sobre el niño porque esta fuerza es siempre perpendicular a cada elemento del desplazamiento.) Para analizar la situación, medimos la coordenada y en la dirección hacia arriba desde la parte más baja de la rampa, de modo que $y_i = h$, $y_f = 0$, y obtenemos

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 + 0 = 0 + mgh$$

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

Nótese que el resultado es el mismo que si el niño hubiera caído verticalmente esa distancia h. En este ejemplo, $h = 2.00$ m, que da

$$v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.80\ \text{m/s}^2)(2.00\ \text{m})} = \mathbf{6.26\ m/s}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

(B) Si una fuerza de fricción cinética actúa sobre el niño, ¿cuánta energía mecánica pierde el sistema? Suponga que $v_f = 3.00$ m/s y $m = 20.0$ kg.

Solución Clasificamos este caso, con fricción, como un problema en el que actúa una fuerza no conservativa. Por lo tanto, no se conserva la energía mecánica y debemos usar la ecuación 8.14 para hallar la pérdida de energía mecánica debido a la fricción:

$$\begin{aligned}\Delta E_{mec} &= (K_f + U_f) - (K_i + U_i)\\ &= (\tfrac{1}{2}mv_f^2 + 0) - (0 + mgh) = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - mgh\\ &= \tfrac{1}{2}(20.0\text{ kg})(3.00\text{ m/s})^2\\ &\quad - (20.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(2.00\text{ m})\\ &= \mathbf{-302\text{ J}}\end{aligned}$$

De nuevo, ΔE_{mec} es negativa porque la fricción está reduciendo la energía mecánica del sistema. (La energía mecánica final es menor que la energía mecánica inicial).

¿Qué pasaría si? Supongamos que se pide al estudiante hallar el coeficiente de fricción μ_k para el niño en la rampa. ¿Podría hacer esto?

Respuesta Podemos decir que la misma rapidez final podría obtenerse si el niño baja por una rampa corta con elevada fricción, o una rampa larga con menos fricción. En consecuencia, parece no haber suficiente información en el problema para determinar el coeficiente de fricción.

La pérdida de energía de 302 J debe ser igual al producto de la fuerza de fricción y la longitud de la rampa:

$$-f_k d = -302\text{ J}$$

También podemos decir que la fuerza de fricción se puede expresar como $\mu_k n$, donde n es la magnitud de la fuerza normal. Por lo tanto,

$$\mu_k n d = 302\text{ J}$$

Si intentamos evaluar el coeficiente de fricción a partir de esta relación, tendremos dos problemas: Primero, no hay valor individual de la fuerza normal n, a menos que el ángulo de la rampa con la horizontal permanezca fijo. Aun cuando el ángulo fuera fijo, no conocemos su valor. El segundo problema es que no tenemos información acerca de la longitud d de la rampa. Por lo tanto, no podemos hallar el coeficiente de fricción con la información dada.

Ejemplo 8.8 ¡A esquiar!

Una esquiadora inicia desde el reposo en la parte más alta de una pendiente sin fricción de 20.0 m de altura, como se ve en la figura 8.13. En la parte más baja de la pendiente, encuentra una superficie horizontal donde el coeficiente de fricción cinética entre los esquís y la nieve es 0.210. ¿Qué distancia recorre ella en la superficie horizontal antes de detenerse, si simplemente se mueve por inercia hasta detenerse?

Solución El sistema es la esquiadora más la Tierra, y escogemos como nuestra configuración de energía potencial cero aquella en la que la esquiadora está en la parte más baja de la pendiente. Mientras que la esquiadora está sobre la pendiente sin fricción, la energía mecánica del sistema permanece constante y encontramos, como lo hicimos en el ejemplo 8.7, que

$$v_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.80\text{ m/s}^2)(20.0\text{ m})} = 19.8\text{ m/s}$$

Ahora aplicamos la ecuación 8.14 cuando la esquiadora se mueve a lo largo de la superficie horizontal rugosa de Ⓑ a Ⓒ. El cambio en energía mecánica a lo largo de la superficie horizon-

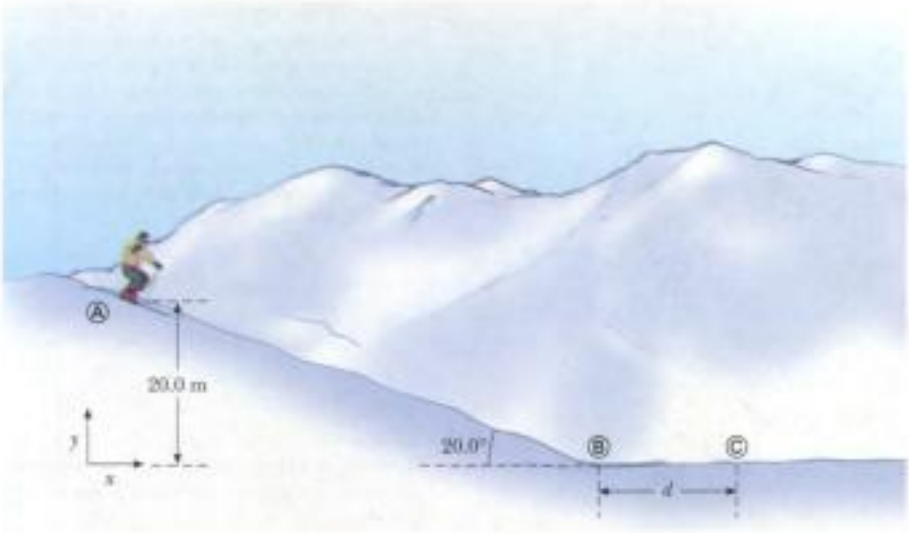


Figura 8.13 (Ejemplo 8.8) La esquiadora baja por la pendiente y llega a una superficie horizontal, deteniéndose tras recorrer una distancia d desde la parte más baja de la pendiente.

Materiał chroniony prawem autorskim

tal es $\Delta E_{mec} = -f_k d$, donde d es la distancia horizontal recorrida por la esquiadora.

Para hallar la distancia que la esquiadora recorre antes de detenerse, tomamos $K_C = 0$. Con $v_B = 19.8$ m/s y la fuerza de fricción dada por $f_k = \mu_k n = \mu_k mg$, obtenemos

$$\Delta E_{mec} = E_C - E_B = -\mu_k mgd$$

$$(K_C + U_C) - (K_B + U_B) = (0 + 0) - (\tfrac{1}{2}mv_B^2 + 0)$$

$$= -\mu_k mgd$$

$$d = \frac{v_B^2}{2\mu_k g} = \frac{(19.8\ \text{m/s})^2}{2(0.210)(9.80\ \text{m/s}^2)} = \mathbf{95.2\ m}$$

Ejemplo 8.9 Choque de un bloque y un resorte

Un bloque que tiene masa de 0.80 kg, recibe una velocidad inicial $v_A = 1.2$ m/s a la derecha y choca con un resorte de masa despreciable y constante de fuerza $k = 50$ N/m, como se ve en la figura 8.14.

(A) Suponiendo que la superficie es sin fricción, calcule la máxima compresión del resorte después de la colisión.

Solución Nuestro sistema en este ejemplo está formado por el bloque y el resorte. Todo el movimiento tiene lugar en un plano horizontal, de modo que no necesitamos considerar cambios en la energía potencial gravitacional. Antes del choque, cuando el bloque está en Ⓐ, tiene energía cinética y el resorte no está comprimido, por lo que la energía potencial elástica almacenada en el resorte es cero. En consecuencia, la energía mecánica total del sistema antes del choque es simplemente $\frac{1}{2}mv_A^2$. Después de la colisión, cuando el bloque está en Ⓒ, el resorte está comprimido por completo; ahora el bloque está en reposo y por ello tiene energía cinética cero, mientras que la energía almacenada en el resorte tiene su máximo valor de $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_{máx}^2$, donde el origen de coordenadas $x = 0$ se selecciona para ser la posición de equilibrio del resorte y $x_{máx}$ es la máxima compresión del resorte, que en este caso resulta ser x_C. La energía mecánica total del sistema se conserva porque ninguna fuerza no conservativa actúa sobre objetos dentro del sistema.

Debido a que la energía mecánica del sistema se conserva, la energía cinética del bloque antes del choque es igual a la máxima energía potencial almacenada en el resorte comprimido por completo:

$$E_C = E_A$$

$$K_C + U_{sC} = K_A + U_{sA}$$

$$0 + \tfrac{1}{2}kx_{máx}^2 = \tfrac{1}{2}mv_A^2 + 0$$

$$x_{máx} = \sqrt{\frac{m}{k}}\,v_A = \sqrt{\frac{0.80\ \text{kg}}{50\ \text{N/m}}}\,(1.2\ \text{m/s})$$

$$= \mathbf{0.15\ m}$$

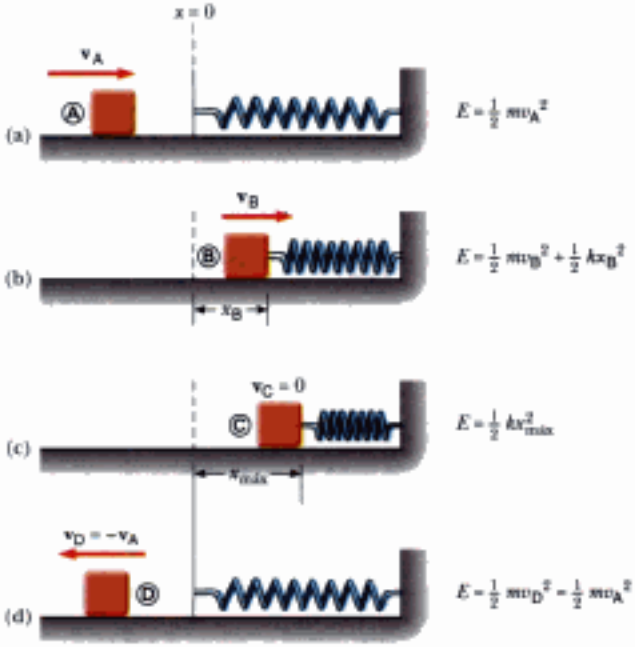


Figura 8.14 (Ejemplo 8.9) Un bloque que se desliza sobre una superficie horizontal lisa, choca con un resorte ligero. (a) Inicialmente la energía mecánica es toda energía cinética. (b) La energía mecánica es la suma de la energía cinética del bloque y la energía potencial elástica del resorte. (c) La energía es enteramente energía potencial. (d) La energía se transforma de nuevo en energía cinética del bloque. La energía total del sistema permanece constante en todo el movimiento.

(B) Suponga que una fuerza constante de fricción cinética actúa entre el bloque y la superficie, con $\mu_k = 0.50$. Si la rapidez del bloque en el momento en que choca con el resorte es $v_A = 1.2$ m/s, ¿cuál es la máxima compresión en el resorte?

Solución En este caso, la energía mecánica del sistema *no se conserva* porque una fuerza de fricción actúa sobre el bloque. La magnitud de la fuerza de fricción es

$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg = 0.50(0.80\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 3.92\ \text{N}$$

Por lo tanto, el cambio en la energía mecánica del sistema debido a fricción cuando el bloque se desplaza desde la posición de equilibrio del resorte (donde tenemos nuestro origen) a x_B es

$$\Delta E_{mec} = -f_k x_B = (-3.92x_B)$$

Sustituyendo esto en la ecuación 8.14 resulta

$$\Delta E_{mec} = E_f - E_i = (0 + \tfrac{1}{2}kx_B^2) - (\tfrac{1}{2}mv_A^2 + 0) = -f_k x_B$$

$$\tfrac{1}{2}(50)x_B^2 - \tfrac{1}{2}(0.80)(1.2)^2 = -3.92x_B$$

$$25x_B^2 + 3.92x_B - 0.576 = 0$$

Al despejar x_B de la ecuación cuadrática tendremos que $x_B = 0.092$ m y $x_B = -0.25$. La raíz físicamente significativa es $x_B = 0.092$ m. La raíz negativa no aplica a esta situación porque el bloque debe estar a la derecha del origen (valor positivo de x) cuando se detenga. Nótese que el valor de 0.092 m es menor que la distancia obtenida en el caso sin fricción de la parte (A). Este resultado es lo que esperamos porque la fricción retarda el movimiento del sistema.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 8.10 Bloques unidos en movimiento

Dos bloques están unidos por una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción, como se ve en la figura 8.15. El que tiene masa m_1 se encuentra sobre una superficie horizontal y está unido a un resorte de constante de fuerza k. El sistema se suelta desde el reposo cuando el resorte está sin estirarse. Si el bloque colgante de masa m_2 cae una distancia h antes de detenerse, calcule el coeficiente de fricción cinética entre el de masa m_1 y la superficie.

Solución La palabra clave *reposo* aparece dos veces en el enunciado del problema. Esto sugiere que las configuraciones asociadas con el reposo sean buenas candidatas para las configuraciones inicial y final, porque la energía cinética del sistema es cero para estas configuraciones. (También nótese que como estamos interesados sólo en los puntos inicial y final del movimiento, no necesitamos marcar eventos con letras circuladas, como hicimos en los dos ejemplos previos. Simplemente con usar i y f es suficiente para dar seguimiento a la situación). En esta situación, el sistema está formado por los dos bloques, el resorte y la Tierra. Necesitamos considerar dos formas de energía potencial: gravitacional y elástica. Como las energías cinéticas inicial y final del sistema son cero, $\Delta K = 0$ y podemos escribir

$$(1) \qquad \Delta E_{mec} = \Delta U_g + \Delta U_s$$

donde $\Delta U_g = U_{gf} - U_{gi}$ es el cambio en la energía potencial gravitacional del sistema y $\Delta U_s = U_{sf} - U_{si}$ es el cambio en la energía potencial elástica del sistema. Cuando el bloque colgante cae una distancia h, el bloque que se mueve horizontalmente lo hace la misma distancia h hacia la derecha. Por lo tanto, usando la ecuación 8.14, encontramos que la pérdida en energía mecánica del sistema debido a la fricción entre el bloque que se desliza horizontalmente y la superficie es

$$(2) \qquad \Delta E_{mec} = -f_k h = -\mu_k m_1 g h$$

El cambio en la energía potencial gravitacional del sistema está asociado con sólo el bloque que cae porque la coordenada vertical del que se desliza horizontalmente no cambia. Por lo tanto, obtenemos

$$(3) \qquad \Delta U_g = U_{gf} - U_{gi} = 0 - m_2 g h$$

donde las coordenadas han sido medidas desde la posición más baja del bloque que cae.

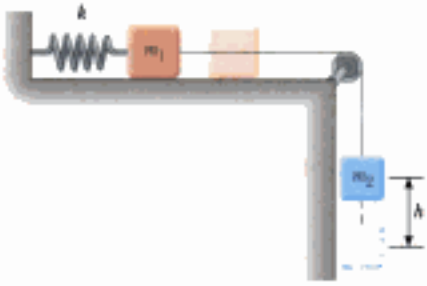


Figura 8.15 (Ejemplo 8.10) Cuando el bloque colgante se mueve de su punto más alto de elevación al más bajo, el sistema pierde energía potencial gravitacional, pero gana energía potencial elástica en el resorte. Se pierde parte de la energía mecánica debido a la fricción entre el bloque deslizado y la superficie.

El cambio en la energía potencial elástica del sistema es la almacenada en el resorte:

$$(4) \qquad \Delta U_s = U_{sf} - U_{si} = \tfrac{1}{2}kh^2 - 0$$

Sustituyendo las ecuaciones (2), (3) y (4) en la ecuación (1) tendremos

$$-\mu_k m_1 g h = -m_2 g h + \tfrac{1}{2}kh^2$$

$$\mu_k = \frac{m_2 g - \frac{1}{2}kh}{m_1 g}$$

Este procedimiento representa una forma de medir el coeficiente de fricción cinética entre un objeto y alguna superficie. De este problema podemos ver que a veces es más fácil trabajar con los cambios en los diversos tipos de energía, que con los valores reales. Por ejemplo, si deseamos calcular el valor numérico de la energía potencial gravitacional asociada con el bloque que se desliza horizontalmente, necesitaríamos especificar la altura de la superficie horizontal con respecto a la posición más baja del que cae. Por fortuna, esto no es necesario, porque la energía potencial gravitacional asociada con el primer bloque no cambia.

8.5 Relación entre fuerzas conservativas y energía potencial

En una sección anterior, encontramos que el trabajo realizado sobre un miembro de un sistema, por una fuerza conservativa entre los miembros, no depende de la trayectoria tomada por el miembro en movimiento. El trabajo depende sólo de las coordenadas inicial y final. Como consecuencia, podemos definir una **función de energía potencial** U tal que el trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual a la disminución en la energía potencial del sistema. Imaginemos un sistema de partículas en el que cambia la configuración debido al movimiento de una partícula a lo largo del eje x. El trabajo realizado por una fuerza conservativa $\mathbf{F}$ cuando una partícula se mueve a lo largo del eje x es[2]

[2] Para un desplazamiento general, el trabajo realizado en dos o tres dimensiones también es igual a $-\Delta U$, donde $U = U(x, y, z)$. Escribimos esto formalmente como $W = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U_i - U_f$.

Materiał chroniony prawem autorskim

$$W_c = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx = -\Delta U \tag{8.15}$$

donde F_x es el componente de $\mathbf{F}$ en la dirección del desplazamiento. Esto es, el trabajo realizado por una fuerza conservativa que actúa entre miembros de un sistema es igual al negativo del cambio en la energía potencial asociada con esa fuerza, cuando cambia la configuración del sistema, donde el cambio en la energía potencial se define como $\Delta U = U_f - U_i$. También podemos expresar la ecuación 8.15 como

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx \tag{8.16}$$

Por lo tanto, ΔU es negativo cuando F_x y dx están en la misma dirección, como cuando un objeto es bajado en un campo gravitacional, o cuando un resorte empuja un objeto hacia el equilibrio.

El témino *energía potencial* implica que el sistema tiene el potencial, o capacidad, de ganar energía cinética o realizar trabajo cuando se suelte bajo la influencia de una fuerza conservativa ejercida sobre un objeto por algún otro miembro del sistema. Es a veces conveniente establecer alguna ubicación particular x_i de un miembro de un sistema, como se presenta una configuración de referencia, y medir todas las diferencias de energía potencial con respecto a ella. Entonces podemos definir la función de energía potencial como

$$U_f(x) = -\int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx + U_i \tag{8.17}$$

El valor de U_i se toma a veces como cero para la configuración de referencia. Realmente no importa qué valor asignemos a U_i porque cualquier valor diferente de cero simplemente cambia $U_f(x)$ por una cantidad constante y sólo el *cambio* en energía potencial es físicamente significativo.

Si se conoce la fuerza conservativa como función de la posición, podemos usar la ecuación 8.17 para calcular el cambio en energía potencial de un sistema cuando un objeto dentro del sistema se mueve de x_i a x_f.

Si el punto de aplicación de la fuerza experimenta un desplazamiento infinitesimal dx, podemos expresar el cambio infinitesimal en la energía potencial del sistema dU como

$$dU = -F_x \, dx$$

Por lo tanto, la fuerza conservativa está relacionada con la función de energía potencial por medio de la relación[5]

Relación de fuerza entre miembros de un sistema y la energía potencial del sistema

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \tag{8.18}$$

Esto es, **el componente x de una fuerza conservativa que actúa sobre un objeto dentro de un sistema es igual al negativo de la derivada de la energía potencial del sistema con respecto a x.**

Podemos fácilmente comprobar esta relación para los dos ejemplos ya estudiados. En el caso del resorte deformado $U_s = \frac{1}{2}kx^2$, y por lo tanto

$$F_s = -\frac{dU_s}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

que corresponde a la fuerza restauradora del resorte (ley de Hooke). Debido a que la función de energía potencial gravitacional es $U_g = mgy$, se deduce de la ecuación 8.18 que $F_g = -mg$ cuando derivamos U_g con respecto a y en lugar de x.

Ahora vemos que U es una función importante porque una fuerza conservativa se puede derivar de ella. Además, la ecuación 8.18 debe aclarar el hecho de que sumar una constante a la energía potencial no es importante, porque la derivada de una constante es cero.

[5] En tres dimensiones, la expresión es $\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$ donde $\frac{\partial U}{\partial x}$, etcétera, son derivadas parciales. En el lenguaje de cálculo vectorial, $\mathbf{F}$ es igual al negativo del *gradiente* de la cantidad escalar $U(x, y, z)$.

Materiał chroniony prawem autorskim

Pregunta rápida 8.11 ¿Qué representa la pendiente de una gráfica de $U(x)$ contra x? (a) la magnitud de la fuerza sobre el objeto (b) el negativo de la magnitud de la fuerza sobre el objeto (c) el componente x de la fuerza sobre el objeto (d) el negativo del componente x de la fuerza sobre el objeto.

8.6 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema

El movimiento de un sistema se puede entender cualitativamente por medio de una gráfica de su energía potencial contra la posición de un miembro del sistema. Considere la función de energía potencial para un sistema formado por un bloque y un resorte dada por $U_s = \frac{1}{2}kx^2$. Esta función está graficada contra x en la figura 8.16a. (Un error común es considerar que la energía potencial en la gráfica representa altura. Claramente éste no es el caso, donde el bloque se mueve sólo en forma horizontal). La fuerza F_s ejercida por el resorte sobre el bloque está relacionada a U_s por medio de la ecuación (8.18):

$$F_s = -\frac{dU_s}{dx} = -kx$$

Como vimos en la pregunta rápida 8.11, el componente x de la fuerza es igual al negativo de la pendiente de la curva U contra x. Cuando el bloque se coloca en reposo en la posición de equilibrio del resorte ($x = 0$), donde $F_s = 0$, permanecerá ahí a menos que sobre él actúe una fuerza F_{est}. Si esta fuerza externa estira el resorte desde el equilibrio, x y la pendiente dU/dx son positivas; por lo tanto, la fuerza F_s ejercida por el resorte es negativa y el bloque acelerará de regreso hacia $x = 0$ cuando se suelte. Si la fuerza externa comprime el resorte, entonces x y la pendiente son negativas; por lo tanto, F_s es positiva y de nuevo la masa acelera hacia $x = 0$ al ser soltado.

Equilibrio estable

De este análisis, concluimos que la posición $x = 0$ para un sistema bloque-resorte es de **equilibrio estable.** Esto es, cualquier movimiento que se aleje de esta posición, resulta en una fuerza dirigida de regreso hacia $x = 0$. En general, las **configuraciones de equilibrio estable corresponden a aquellas para las cuales $U(x)$ es mínima.**

De la figura 8.16 vemos que si el bloque recibe un desplazamiento inicial $x_{máx}$ y se suelta desde el reposo, su energía total inicialmente es la energía potencial $\frac{1}{2}kx^2_{máx}$ almacenada

En el vínculo* Active Figures *en* http://www.pse6.com, *usted puede observar el bloque oscilar entre sus puntos de cambio y rastrear los puntos correspondientes en la curva de energía potencial para valores cambiantes de k.

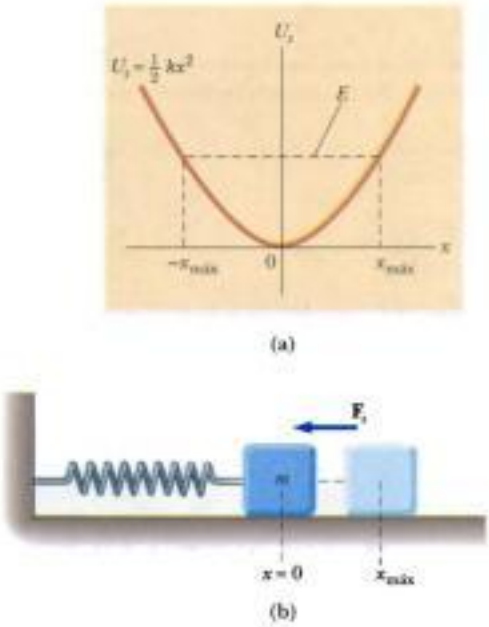


Figura activa 8.16 (a) Energía potencial como función de x para el sistema bloque-resorte sin fricción que se muestra en (b). El bloque oscila entre los puntos de cambio, que tienen las coordenadas $x = \pm x_{máx}$. Nótese que la fuerza restauradora ejercida por el resorte siempre actúa hacia $x = 0$, que es la posición de equilibrio estable.

Materiał chroniony prawem autorskim

en el resorte. Cuando el bloque empieza a moverse, el sistema adquiere energía cinética y pierde una cantidad igual de energía potencial. Como la energía total del sistema debe permanecer constante, el bloque oscila (se mueve en un sentido y en otro) entre los dos puntos $x = -x_{máx}$ y $x = +x_{máx}$, llamados *puntos de cambio*. De hecho, debido a que no se pierde energía (no hay fricción), el bloque oscilará siempre entre $-x_{máx}$ y $+x_{máx}$. (Estudiamos estas oscilaciones con más detalle en el capítulo 15.) Desde un punto de vista de energía, la energía del sistema no puede exceder $\frac{1}{2}kx_{máx}^2$; por lo tanto, el bloque debe detenerse en estos puntos y, por la fuerza del resorte, debe acelerar hacia $x = 0$.

Otro sistema mecánico sencillo que tiene una configuración de equilibrio estable es una bola que rueda en el fondo de un tazón. Siempre que la bola sea desplazada de su posición más baja, tiende a regresar a esa posición cuando se suelte.

Ahora considere una partícula que se mueve a lo largo del eje x bajo la influencia de una fuerza conservativa F_x, donde la curva U contra x se muestra en la figura 8.17. Una vez más, $F_x = 0$ en $x = 0$, y por lo tanto la partícula está en equilibrio en este punto. No obstante, ésta es una posición de **equilibrio inestable** por la siguiente razón: Suponga que la partícula se desplaza a la derecha ($x > 0$). Como la pendiente es negativa para $x > 0$, $F_x = -dU/dx$ es positiva, y la partícula acelera alejándose de $x = 0$. En cambio, si la partícula está en $x = 0$ y se desplaza a la izquierda ($x < 0$), la fuerza es negativa porque la pendiente es positiva para $x < 0$, y la partícula de nuevo acelera alejándose de la posición de equilibrio. La posición $x = 0$ en esta situación es de equilibrio inestable, porque para cualquier desplazamiento desde este punto, la fuerza empuja a la partícula alejándose del equilibrio. Es decir, la fuerza empuja a la partícula hacia una posición de menor energía potencial. Un lápiz balanceado en este punto está en una posición de equilibrio inestable. Si el lápiz se desplaza ligeramente desde su posición absolutamente vertical y luego se suelta, es seguro que caerá. En general, las **configuraciones de equilibrio inestable corresponden a aquellas para las que $U(x)$ es máxima.**

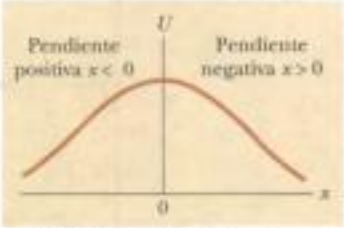


Figura 8.17 Gráfica de U contra x para una partícula que tiene una posición de equilibrio inestable ubicada en $x = 0$. Para cualquier desplazamiento finito de la partícula, la fuerza sobre la partícula está dirigida alejándose de $x = 0$.

Equilibrio inestable

Finalmente, puede surgir una situación donde U es constante sobre alguna región. Esto se llama de **equilibrio neutro.** Pequeños desplazamientos desde una posición en esta región no producen fuerzas restauradoras ni de ruptura. Una pelota que se encuentre sobre una superficie plana horizontal es un ejemplo de un objeto en equilibrio neutro.

Equilibrio neutro

Ejemplo 8.11 Fuerza y energía a una escala atómica

La energía potencial asociada con la fuerza entre dos átomos neutros de una molécula, se pueden modelar por medio de la función de Lennard-Jones de energía potencial:

$$U(x) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$$

donde x es la separación de los átomos. La función $U(x)$ contiene dos parámetros σ y ϵ que se determinan a partir de experimentos. Valores muestra para la interacción entre dos átomos de una molécula son $\sigma = 0.263$ nm y $\epsilon = 1.51 \times 10^{-22}$ J.

(A) Con el uso de una hoja de cálculo o herramienta similar, grafique esta función y encuentre la distancia más probable entre los dos átomos.

Solución Esperamos hallar equilibrio estable cuando los dos átomos estén separados por alguna distancia de equilibrio y la energía potencial del sistema de dos átomos (la molécula) sea mínima. Uno puede minimizar la función $U(x)$ al tomar su derivada y hacerla igual a cero:

$$\frac{dU(x)}{dx} = 4\epsilon\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right] = 0$$

$$= 4\epsilon\left[\frac{-12\sigma^{12}}{x^{13}} - \frac{-6\sigma^{6}}{x^{7}}\right] = 0$$

Al despejar x —la separación de equilibrio de los dos átomos de la molécula— e insertar la información dada tendremos

$$x = \mathbf{2.95 \times 10^{-10}\ m.}$$

Graficamos la función de Lennard-Jones en ambos lados de este valor crítico para crear nuestro diagrama de energía, como se muestra en la figura 8.18a. Nótese que $U(x)$ es extremadamente grande cuando los átomos están muy cercanos entre sí, es mínima cuando los átomos están en su separación crítica, y luego aumenta de nuevo cuando los átomos se alejan. Cuando $U(x)$ es mínima, los átomos están en equilibrio estable; esto indica que ésta es la separación más probable entre ellos.

(B) Determine $F_x(x)$ —la fuerza que un átomo ejerce sobre el otro en la molécula como función de la separación— y argumente que la forma en que esta fuerza se comporta es admisible físicamente cuando los átomos estén cercanos y separados.

Solución Debido a que los átomos se combinan para formar una molécula, la fuerza debe ser de atracción cuando los átomos están alejados entre sí. Por otra parte, la fuerza debe ser de repulsión cuando los dos átomos estén muy cercanos entre sí. De otro modo, la molécula se destruiría. Por lo tanto, la fuerza debe cambiar signo en la separación crítica, de manera semejante a la forma en que las fuerzas del resorte invierten su signo en el cambio de extensión a compresión. Al aplicar la ecuación 8.18 a la función de energía potencial de Lennard-Jones resulta

Materiał chroniony prawem autorskim

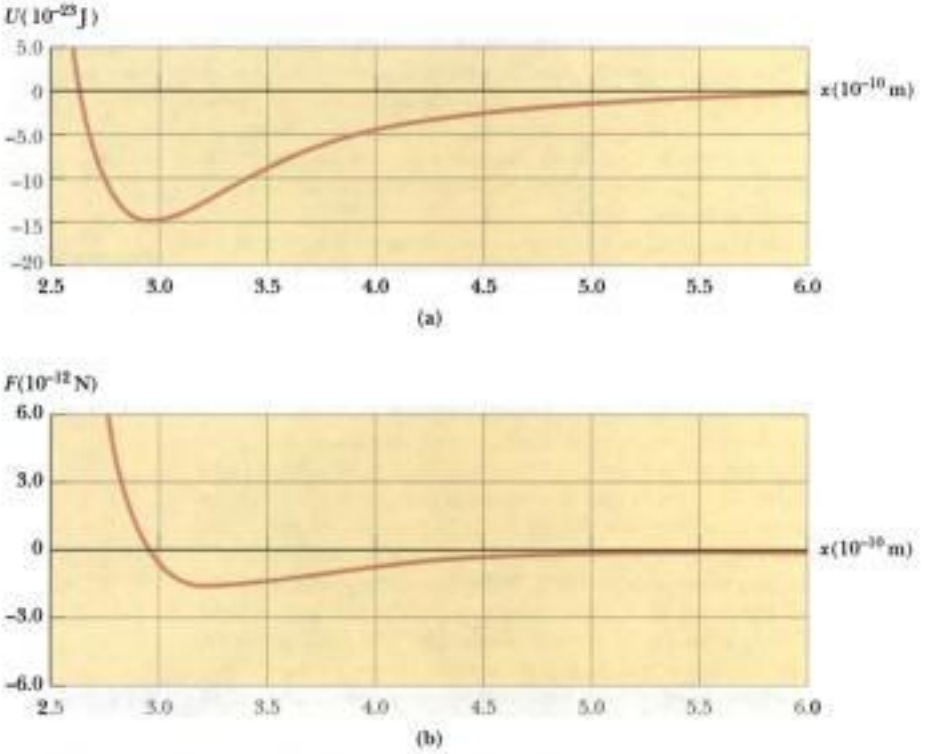


Figura 8.18 (Ejemplo 8.11) (a) Curva de energía potencial asociada con una molécula. La distancia x es la separación entre los dos átomos que forman la molécula. (b) Fuerza ejercida sobre un átomo por el otro.

$$F_x = -\frac{dU(x)}{dx} = -4\epsilon \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$$

$$= 4\epsilon\left[\frac{12\sigma^{12}}{x^{13}} - \frac{6\sigma^{6}}{x^{7}}\right]$$

Este resultado se grafica en la figura 8.18b. Como se esperaba, la fuerza es positiva (de repulsión) a pequeñas separaciones atómicas, cero cuando los átomos están en la posición de equilibrio estable [recuerde cómo encontramos el mínimo de $U(x)$], y negativa (de atracción) a grandes separaciones. Nótese que la fuerza se aproxima a cero cuando la separación entre los átomos se hace muy grande.

RESUMEN

Si una partícula de masa m está a una distancia y sobre la superficie terrestre, la **energía potencial gravitacional** del sistema partícula-Tierra es

$$U_g = mgy \tag{8.2}$$

La **energía potencial elástica** almacenada en un resorte de constante de fuerza k es

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2 \tag{8.11}$$

Debe seleccionarse una configuración de referencia del sistema, y es frecuente que a esta configuración se le asigne una energía potencial de cero.

Una fuerza es **conservativa** si el trabajo que realiza sobre una partícula que se mueva entre dos puntos es independiente de la trayectoria que la partícula tome entre los dos puntos. Además, una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza sobre una partícula es cero cuando la partícula se mueve por una trayectoria cerrada arbitraria y regresa a su posición inicial. Una fuerza que no satisface estos criterios, se dice que es **no conservativa.**

La **energía mecánica total de un sistema** se define como la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E_{mec} = K + U \tag{8.8}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Si un sistema está aislado y no hay fuerzas no conservativas que actúen sobre objetos dentro del sistema, entonces la energía mecánica total del sistema es constante:

$$K_f + U_f = K_i + U_i \tag{8.9}$$

Si fuerzas no conservativas (como la de fricción) actúan sobre objetos dentro de un sistema, entonces no se conserva la energía mecánica. En estas situaciones, la diferencia entre la energía mecánica final total y la energía mecánica inicial total del sistema, es igual a la energía transformada en energía interna por las fuerzas no conservativas.

Una **función de energía potencial** U puede estar asociada sólo con una fuerza conservativa. Si una fuerza conservativa $\mathbf{F}$ actúa entre miembros de un sistema, cuando un miembro se mueve a lo largo del eje x de x_i a x_f, entonces el cambio en la energía potencial del sistema es igual al negativo del trabajo realizado por esa fuerza:

$$U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx \tag{8.16}$$

Los sistemas pueden estar en tres tipos de configuraciones de equilibrio cuando la fuerza neta sobre un miembro del sistema es cero. Las configuraciones de **equilibrio estable** corresponden a aquellas para las que $U(x)$ es mínima. Las configuraciones de **equilibrio inestable** corresponden a aquellas para las que $U(x)$ es máxima. El **equilibrio neutro** surge donde U es constante cuando un miembro del sistema se mueve en alguna región.

PREGUNTAS

1. Si la altura de un tobogán se mantiene constante, ¿la longitud del tobogán o la presencia de curvas marca alguna diferencia en la rapidez final de niños que jueguen en él? Suponga que el tobogán es suficientemente resbaladizo como para ser considerado sin fricción. Repita esta pregunta suponiendo que hay fricción.
2. Explique por qué la energía total de un sistema puede ser positiva o negativa, mientras que la energía cinética siempre es positiva.
3. Una persona deja caer una pelota desde lo alto de un edificio, mientras otra persona en la calle observa su movimiento. ¿Coincidirán estas dos personas en el valor de la energía potencial gravitacional del sistema pelota-Tierra? ¿Sobre el cambio en energía potencial? ¿Sobre la energía cinética?
4. Analice los cambios en energía mecánica de un sistema objeto-Tierra en (a) levantar el objeto, (b) sostener el objeto en una posición fija, y (c) bajar el objeto lentamente. Incluya los músculos en su análisis.
5. En el capítulo 7 introdujimos el teorema del trabajo y la energía cinética, $W = \Delta K$. Esta ecuación expresa que el trabajo realizado sobre un sistema aparece como cambio en energía cinética. Ésta es una ecuación de caso especial, válida si no hay cambios en cualquier otro tipo de energía como la potencial o la interna. Dé algunos ejemplos en los que el trabajo se realiza sobre un sistema, pero el cambio en energía del sistema no sea de energía cinética.
6. Si tres fuerzas conservativas y una fuerza no conservativa actúan dentro de un sistema, ¿cuántos términos de energía potencial aparecen en la ecuación que describe el sistema?
7. Si sólo una fuerza externa actúa sobre una partícula, ¿necesariamente cambia la (a) energía cinética de la partícula? (b) ¿cambia la velocidad de la partícula?
8. Un conductor hace detener su automóvil. Si los frenos se bloquean de modo que el auto patina, ¿dónde está la energía cinética original del auto, y en qué forma está después de que el auto se detiene? Responda la misma pregunta para el caso en que los frenos no se bloquean, pero las ruedas continúan girando.
9. Un estudiante va en una bicicleta. ¿En qué sentido la bicicleta es accionada por energía solar?
10. En un terremoto, una gran cantidad de energía se "libera" y se extiende en todas direcciones y causa fuertes daños. ¿En qué forma existe esta energía antes del temblor, y por medio de qué mecanismo de transferencia de energía se desplaza?
11. Una bola de boliche está colgada del techo de una sala de conferencias mediante una cuerda fuerte. La bola es sacada de su posición de equilibrio y soltada desde el reposo en la punta de la nariz de la demostradora, como se ve en la figura Q8.11. Si la de-

Figura Q8.11

Materiał chroniony prawem autorskim

mostradora permanece fija, explique por qué ella no es golpeada por la bola en su oscilación de retorno. ¿Está segura la demostradora si la bola recibe un empujón desde su posición de arranque en la punta de su nariz?

12. Los caminos que suben por montañas están construidos en zigzag, con formas hacia atrás y adelante a lo largo de la cara de la pendiente, en forma tal que sólo hay una cuesta suave en cualquier parte del camino. ¿Requiere esto que un auto realice menor trabajo al subir la montaña en comparación con subir por la misma montaña, pero en un camino recto? ¿Por qué se usan caminos en zig-zag?

13. Cuando un trineo avanza por un campo nivelado y cubierto de nieve a velocidad constante, ¿se realiza algún trabajo? ¿Cómo entra en escena la resistencia del aire?

14. Una persona trabaja en una biblioteca, reacomodando libros. Levanta un libro del piso al estante superior. La energía cinética del libro sobre el piso era cero y la energía cinética del libro en el estante superior es cero, de modo que no hay cambio en energía cinética. Sin embargo, la persona realizó un trabajo al levantar el libro. ¿Se viola el teorema del trabajo y la energía cinética?

15. Una pelota es lanzada al aire directamente hacia arriba. ¿En qué posición es máxima su energía cinética? ¿En qué posición es máxima la energía potencial gravitacional del sistema pelota-Tierra?

16. Un martinete es un aparato para introducir objetos en la Tierra al dejar caer repetidamente un gran peso sobre ellos. ¿Cuánto aumenta la energía del sistema martinete-Tierra cuando el peso que se deja caer se duplica? Suponga que el peso se deja caer desde la misma altura cada vez.

17. Los músculos de nuestro cuerpo ejercen fuerzas cuando levantamos, empujamos, corremos, saltamos, etcétera. ¿Son conservativas estas fuerzas?

18. Un bloque se conecta a un resorte que está suspendido del techo. Si el bloque se pone en movimiento y se desprecia la resistencia del aire, describa las transformaciones de energía que ocurren dentro del sistema formado por el bloque, la Tierra y el resorte.

19. Describa las transformaciones de energía que ocurren durante (a) salto de garrocha (b) lanzamiento de martillo (c) salto de altura. ¿Cuál es la fuente de energía en cada caso?

20. Analice las transformaciones de energía que ocurren durante la operación de un automóvil.

21. ¿Qué aspecto tendría la curva de U contra x si una partícula estuviera en una región de equilibrio neutro?

22. Una pelota rueda sobre una superficie horizontal. ¿Está la pelota en equilibrio estable, inestable o neutro?

23. Considere una pelota fija a un extremo de una varilla rígida cuyo otro extremo hace pivote en un eje horizontal, de modo que la varilla puede girar en un plano vertical. ¿Cuáles son las posiciones del equilibrio estable e inestable?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, difícil = solución guiada con sugerencias disponibles en http://www.pse6.com

= use computadora para resolver el problema = problemas numéricos y simbólicos por pares

Sección 8.1 Energía potencial de un sistema

1. Un tren de montaña rusa, de 1 000 kg, está inicialmente en lo más alto de una subida, en el punto Ⓐ. A continuación avanza 135 pies a un ángulo de 40.0° abajo de la horizontal, a un punto Ⓑ más abajo. (a) Escoja que el punto Ⓑ sea el nivel cero para energía potencial gravitacional. Encuentre la energía potencial del sistema montaña rusa-Tierra en los puntos Ⓐ y Ⓑ, y el cambio en energía potencial cuando el tren se mueve. (b) Repita la parte (a) poniendo el nivel de referencia cero en el punto Ⓐ.

2. Un niño de 400 N está en un columpio que está unido a cuerdas de 2.00 m de largo. Encuentre la energía potencial gravitacional del sistema niño-Tierra con respecto a la posición más baja del niño cuando (a) las cuerdas están horizontales, (b) las cuerdas forman un ángulo de 30.0° con la vertical, y (c) el niño está en la parte más baja del arco circular.

3. Una persona con una remota cabaña de una montaña piensa instalar su propia planta hidroeléctrica. Un arroyo cercano mide 3.00 m de ancho y 0.500 m de profundidad. Corre agua a 1.20 m/s sobre el borde de una catarata de 5.00 m de altura. El fabricante promete sólo 25.0% de eficiencia para convertir la energía potencial del sistema agua-Tierra en energía eléctrica. Encuentre la potencia que ella puede generar. (Las plantas hidroeléctricas a gran escala, con una caída mucho mayor, son más eficientes.)

Sección 8.2 El sistema aislado; conservación de energía mecánica

4. A las 11:00 horas del 7 de septiembre de 2001, más de un millón de niños de escuelas inglesas saltaron durante un minuto. El interés de todo el plan del "Salto Gigante" estaba sobre terremotos, pero estaba integrado con muchos otros temas, por ejemplo ejercicio, geografía, cooperación, hipótesis de exámenes y establecer marcas mundiales. Los niños construyeron sus propios sismógrafos, que registraron efectos locales. (a) Encuentre la energía mecánica liberada en el experimento. Suponga que 1 050 000 niños de masa promedio de 36.0 kg saltan doce veces cada uno, levantando sus centros de masa unos 25.0 cm cada vez y descansando brevemente entre un salto y el siguiente. La aceleración en caída libre en Gran Bretaña es 9.81 m/s². (b) Casi toda la energía se convirtió muy rápidamente en energía interna dentro de los cuerpos de los niños y los pisos de los edificios escolares. De la energía que se propaga en el suelo, la mayor parte produce vibraciones de alta frecuencia en "micro temblores" que se amortiguan con gran rapidez y no pueden recorrer mucho. Suponga que 0.01% de la energía es transportada a distancia por una onda sísmica de largo alcance. La magnitud de un temblor en la escala Richter está dada por

$$M = \frac{\log E - 4.8}{1.5}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

donde E es la energía de la onda sísmica en joules. Según este modelo, ¿cuál es la magnitud del temblor de demostración? (No registró ruido de fondo en otros países ni en la Bóveda Sísmica de Wolverton, Hampshire.)

5. Una cuenta se desliza sin fricción alrededor de un rizo (figura P8.5). La cuenta se suelta desde una altura $h = 3.50R$. (a) ¿Cuál es la rapidez en el punto Ⓐ? (b) ¿De qué magnitud es la fuerza normal sobre ella si su masa es de 5.00 g?

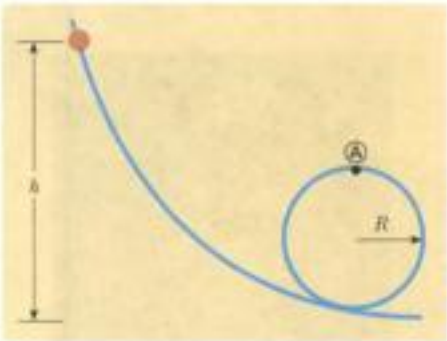


Figura P8.5

6. Dave Johnson, el ganador de la medalla de bronce en los Juegos Olímpicos de 1992 en Barcelona, se levanta del suelo en la competencia de salto de altura con componente de 6.00 m/s en velocidad vertical. ¿Cuánto sube su centro de masa cuando hace el salto?

7. Un deslizador de 0.150 kg de masa se mueve en una vía horizontal de aire sin fricción. Está permanentemente unido a un extremo de un resorte horizontal sin masa, que tiene una constante de fuerza de 10.0 N/m tanto para extensión como para compresión. El otro extremo del resorte está fijo. El deslizador se mueve para comprimir el resorte en 0.180 m y luego se suelta desde el reposo. Calcule la rapidez del deslizador (a) en el punto donde se ha movido 0.180 m desde su punto de arranque, de modo que el resorte está momentáneamente sin ejercer fuerza y (b) en el punto donde se ha movido 0.250 m desde su punto de inicio.

8. Un vehículo cargado de mineral tiene una masa de 950 kg y rueda sobre rieles con fricción insignificante. Inicia desde el reposo y es subido por el tiro de una mina por medio de un cable conectado a un torno para elevar cargas. El tiro está inclinado a 30.0° arriba de la horizontal. El vehículo acelera de manera uniforme a una rapidez de 2.20 m/s en 12.0 s y luego continúa a rapidez constante. (a) ¿Qué potencia debe dar el motor del torno cuando el vehículo se mueve a rapidez constante? (b) ¿Qué potencia máxima debe dar el motor del torno? (c) ¿Qué energía total se transfiere fuera del motor por medio de trabajo en el momento en que el vehículo sale del extremo de las vías, que miden 1 250 metros?

9. Un péndulo simple, que vamos a considerar en detalle en el capítulo 15, está formado por un objeto suspendido por una cuerda. Se supone que el objeto es una partícula. La cuerda, con su extremo superior fijo, tiene masa insignificante y no se estira. En ausencia de fricción con el aire, el sistema oscila en un sentido y otro en un plano vertical. Si la cuerda mide 2.00 m de largo y forma un ángulo inicial de 30.0° con la vertical, calcule la rapidez de la partícula (a) en el punto más bajo en su trayectoria y (b) cuando el ángulo es 15.0°.

10. Un objeto de masa m inicia desde el reposo y se desliza una distancia d por un plano inclinado sin fricción de ángulo θ. Mientras se desliza, hace contacto con un resorte no estirado de masa despreciable, como se muestra en la figura P8.10. El objeto se desliza una distancia adicional x cuando es llevado momentáneamente al reposo por compresión del resorte (de constante de fuerza k). Encuentre la separación inicial d entre objeto y resorte.

Figura P8.10

11. Un bloque de masa 0.250 kg se coloca sobre la parte superior de un resorte vertical ligero, de constante de fuerza 5 000 N/m, y empujado hacia abajo de modo que el resorte se comprime 0.100 m. Después de que el bloque se suelta desde el reposo, avanza hacia arriba y luego se separa del resorte. ¿A qué altura máxima sube sobre el punto de liberación?

12. Un trapecio de circo está formado por una barra suspendida por dos cuerdas paralelas, cada una de longitud ℓ, que permiten a una trapecista oscilar en un arco circular vertical (figura P8.12). Suponga que una trapecista de masa m sostiene la barra y sale de una plataforma elevada, iniciando desde el reposo con las cuerdas a un ángulo θ_i con respecto a la vertical. Suponga que el tamaño del cuerpo de la trapecista es pequeño en comparación con la longitud ℓ, que ella no se impulsa en el trapecio para alcanzar mayor altura, y que la resistencia del aire es insignificante. (a) Demuestre que cuando las cuerdas forman un ángulo θ con la vertical, la trapecista debe ejercer una fuerza

$$mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_i)$$

para mantenerse firme. (b) Determine el ángulo θ_i para el cual la fuerza necesaria para mantenerse firme en la parte más baja de la oscilación es el doble del peso de la trapecista.

Figura P8.12

Materiał chroniony prawem autorskim

13. Dos objetos están conectados por una cuerda ligera que pasa sobre una polea ligera sin fricción, como se muestra en la figura P8.13. El objeto de masa 5.00 kg se suelta desde el reposo. Con el uso del principio de conservación de la energía, (a) determine la rapidez del objeto de 3.00 kg precisamente cuando el objeto de 5.00 kg llega al suelo. (b) Encuentre la altura máxima a la que sube el objeto de 3.00 kg.

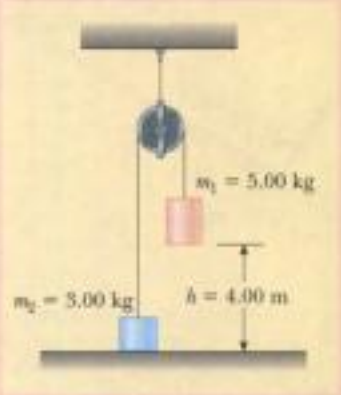


Figura P8.13 Problemas 13 y 14.

14. Dos objetos están conectados por una cuerda ligera que pasa sobre una polea ligera sin fricción como en la figura P8.13. El objeto de masa m_1 se suelta desde el reposo a una altura h. Usando el principio de conservación de la energía, (a) determine la rapidez de m_2 precisamente cuando m_1 llega al suelo. (b) Encuentre la altura máxima a la que sube m_2.

15. Una varilla rígida ligera mide 77.0 cm de largo. Su extremo superior hace pivote en un eje horizontal de baja fricción. La varilla cuelga en línea vertical en reposo con una pequeña bola unida a su extremo inferior. Una persona golpea la bola, dándole de pronto una velocidad horizontal de modo que oscila alrededor en un círculo completo. ¿Qué rapidez mínima en el fondo se requiere para hacer que la pelota llegue sobre la parte superior del círculo?

16. Una corriente de aire que se mueve a 11.0 m/s en un viento continuo, encuentra un molino de viento de 2.30 m de diámetro y que tiene una eficiencia de 27.5%. La energía generada por el molino de viento se utiliza para bombear agua de un pozo de 35.0 m de profundidad hacia un tanque que está a 2.30 m sobre el suelo. ¿A qué rapidez en litros por minuto puede bombearse agua en el tanque?

17. Una bola de cañón, de 20.0 kg, es disparada desde un cañón con rapidez de salida de la boca de 1 000 m/s a un ángulo de 37.0° con la horizontal. Una segunda bola es disparada a un ángulo de 90.0°. Use el principio de conservación de la energía para hallar (a) la altura máxima alcanzada por cada bola y (b) la energía mecánica total a la altura máxima para cada bola. Sea $y = 0$ en el cañón.

18. Una bola de 2.00 kg está unida al extremo inferior de un tramo de sedal que tiene una resistencia a la ruptura de 10 lb (44.5 N). El extremo superior del sedal se mantiene fijo. La bola se suelta desde el reposo con la línea tensa y horizontal ($\theta = 90.0°$). ¿A qué ángulo θ (medido desde la vertical) se romperá el sedal?

19. Un temerario saltará en "bungee" desde un globo a 65.0 m sobre una avenida central de una feria (figura P8.19). Usará una cuerda elástica uniforme, atada a un arnés alrededor de su cuerpo para detener su caída en un punto a 10.0 m sobre el suelo. Modele su cuerpo como partícula y la cuerda como que tiene masa insignificante y que obedece la ley de fuerza de Hooke. En una prueba preliminar, colgando en reposo desde un tramo de cuerda de 5.00 m, encuentra que su peso corporal lo estira 1.50 m. Caerá desde el reposo en el punto donde el extremo superior de una sección más larga de la cuerda está unida al globo estacionario. (a) ¿Qué longitud de cuerda debe usar? (b) ¿Qué aceleración máxima va a experimentar?

Gamma

Figura P8.19

20. **Problema de repaso.** El sistema mostrado en la figura P8.20 está formado por una cuerda ligera no extensible, poleas ligeras sin fricción, y bloques de igual masa. Está inicialmente sostenido en reposo, de modo que los bloques están a la misma altura sobre el suelo. Los bloques se sueltan entonces. Encuentre la rapidez del bloque A en el momento en que la separación vertical de los bloques es h.

Figura P8.20

Sección 8.3 Fuerzas conservativas y no conservativas

21. Una partícula de 4.00 kg se mueve del origen a la posición C, con coordenadas $x = 5.00$ m y $y = 5.00$ m. Una fuerza sobre la partícula es la fuerza gravitacional que actúa en la dirección y negati-

Materiał chroniony prawem autorskim

va (figura P8.21). Usando la ecuación 7.3, calcule el trabajo realizado por la fuerza gravitacional al pasar de O a C a lo largo de (a) OAC. (b) OBC. (c) OC. Sus resultados deben ser todos idénticos. ¿Por qué?

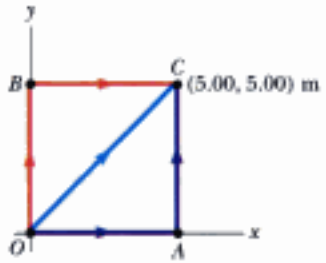


Figura P8.21 Problemas 21, 22 y 23.

22. (a) Suponga que una fuerza constante actúa sobre un objeto. La fuerza no varía con el tiempo, ni con la posición ni la velocidad del objeto. Comience con la definición general para el trabajo realizado por una fuerza

$$W = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

y demuestre que la fuerza es conservativa. (b) Como caso especial, suponga que la fuerza $\mathbf{F} = (3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}})$ actúa sobre una partícula que se mueve de O a C en la figura P8.21. Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ si la partícula se mueve a lo largo de cada una de las tres trayectorias, OAC, OBC y OC. (Sus tres respuestas deben ser idénticas.)

23. Una fuerza que actúa sobre una partícula que se mueve en el plano xy está dada por $\mathbf{F} = (2y\,\hat{\mathbf{i}} + x^2\,\hat{\mathbf{j}})$ N, donde x e y son en metros. La partícula se mueve del origen a una posición final que tiene coordenadas $x = 5.00$ m e $y = 5.00$ m, como en la figura P8.21. Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de (a) OAC, (b) OBC, (c) OC. (d) ¿Es $\mathbf{F}$ conservativa o no conservativa? Explique.

24. Una partícula de masa $m = 5.00$ kg se suelta desde el punto Ⓐ y se desliza sobre la vía sin fricción que se ilustra en la figura P8.24. Determine (a) la rapidez de la partícula en los puntos Ⓑ y Ⓒ y (b) el trabajo neto realizado por la fuerza gravitacional al mover la partícula de Ⓐ a Ⓒ.

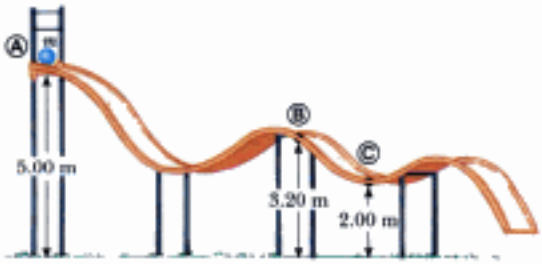


Figura P8.24

25. Una sola constante de fuerza $\mathbf{F} = (3\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}})$ N actúa sobre una partícula de 4.00 kg. (a) Calcule el trabajo realizado por esta fuerza si la partícula se mueve del origen al punto que tiene la posición vectorial $\mathbf{r} = (2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}})$ m ¿Depende este resultado de la trayectoria? Explique. (b) ¿Cuál es la rapidez de la partícula en $\mathbf{r}$ si su rapidez en el origen es 4.00 m/s? (c) ¿Cuál es el cambio en la energía potencial?

Sección 8.4 Cambios en la energía mecánica para fuerzas no conservativas

26. En el tiempo t_i, la energía cinética de una partícula es 30.0 J y la energía potencial del sistema al cual pertenece es 10.0 J. En algún instante t_f posterior, la energía cinética de la partícula es 18.0 J. (a) Si sólo fuerzas conservativas actúan sobre la partícula, ¿cuáles son la energía potencial y la energía total en el tiempo t_f? (b) Si la energía potencial del sistema en el tiempo t_f es 5.00 J, ¿hay fuerzas no conservativas que actúen sobre la partícula? Explique.

27. En su mano, una *pitcher* de softball mueve una pelota de masa 0.250 kg alrededor de una trayectoria circular vertical de radio 60.0 cm, antes de soltarla de su mano. La *pitcher* mantiene una componente de fuerza sobre la pelota, de magnitud constante de 30.0 N en la dirección de movimiento alrededor de la trayectoria completa. La rapidez de la pelota en la parte más alta del círculo es 15.0 m/s. Si ella suelta la pelota en la parte más baja del círculo, ¿cuál es su rapidez al soltarla?

28. Una patineta eléctrica tiene una batería capaz de proporcionar 120 Wh de energía. Si fuerzas de fricción y otras pérdidas constituyen el 60.0% del uso de la energía, ¿qué cambio de altitud puede lograr un pasajero cuando circule por un terreno accidentado, si el pasajero y la patineta tienen un peso combinado de 890 N?

29. La locomotora más grande del mundo es la MK5000C, un gigante de 160 toneladas métricas impulsado por el motor más potente jamás empleado para transporte por ferrocarril, un motor diesel Caterpillar de 5 000 hp. Esta enorme máquina puede proporcionar una ganancia en eficiencia, pero su gran masa presenta también desafíos. El maquinista encuentra que la locomotora se maneja de modo diferente respecto de las unidades convencionales, notablemente al frenar y transitar por montañas. Considere que la locomotora no remolca ningún tren, pero que viaja a 27.0 m/s sobre una vía a nivel cuando opera con una potencia de salida de 1 000 hp. Llega a una pendiente de 5.00% (una pendiente que sube 5.00 m por cada 100 m a lo largo de la vía). Si no se avanza el regulador (acelerador) para que el nivel de potencia se mantenga constante, ¿a qué valor caerá la rapidez? Suponga que fuerzas de fricción no dependen de la rapidez.

30. Un nadador de 70.0 kg salta de una torre de 10.0 m y cae en línea recta en el agua. Si él llega al reposo 5.00 m bajo la superficie del agua, determine la fuerza de resistencia promedio ejercida por el agua sobre el nadador.

31. El coeficiente de fricción entre el bloque de 3.00 kg y la superficie de la figura P8.31 es 0.400. El sistema inicia desde el reposo. ¿Cuál es la rapidez de la bola de 5.00 kg cuando ha caído 1.50 m?

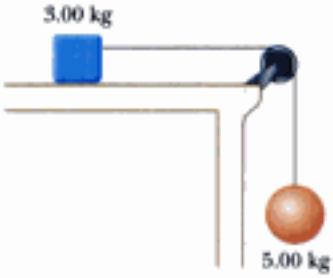


Figura P8.31

Materiał chroniony prawem autorskim

32. Un muchacho en una silla de ruedas (masa total 47.0 kg) gana una carrera contra un competidor en patín. El muchacho tiene rapidez de 1.40 m/s en la cresta de una pendiente de 2.60 m de alto y 12.4 m de largo. En la parte más baja de la pendiente, su rapidez es 6.20 m/s. Si la resistencia del aire y la resistencia al rodamiento se pueden modelar como una fuerza constante de fricción de 41.0 N, encuentre el trabajo que él realizó al empujar hacia delante en sus ruedas durante el viaje cuesta abajo.

33. Un bloque de 5.00 kg se pone en movimiento hacia arriba en un plano inclinado con una rapidez inicial de 8.00 m/s (figura P8.33). El bloque se detiene después de recorrer 3.00 m a lo largo del plano, que está inclinado a un ángulo de 30.0° con la horizontal. Para este movimiento determine (a) el cambio en la energía cinética del bloque, (b) el cambio en la energía potencial del sistema bloque-Tierra, y (c) la fuerza de fricción ejercida sobre el bloque (supuesta constante). (d) ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética?

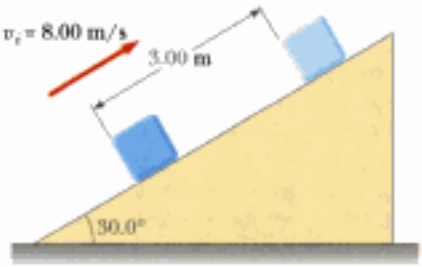


Figura P8.33

34. Un paracaidista de 80.0 kg salta de un globo a una altitud de 1 000 m y abre el paracaídas a una altitud de 200 m. (a) Si se supone que la fuerza retardadora total sobre el paracaidista es constante a 50.0 N con el paracaídas cerrado y constante a 3 600 N con el paracaídas abierto, ¿cuál es la rapidez del paracaidista cuando llega al suelo? (b) ¿Piensa usted que el paracaidista se lesionará? Explique. (c) ¿A qué altura debe abrirse el paracaídas para que la rapidez final del paracaidista sea de 5.00 m/s cuando llegue al suelo? (d) ¿Qué tan realista es la suposición de que la fuerza retardadora total es constante? Explique.

35. Un cañón de juguete usa un resorte para proyectar una bola de goma suave de 5.30 g. El resorte está originalmente comprimido 5.00 cm y tiene una constante de fuerza de 8.00 N/m. Cuando el cañón se dispara, la bola se mueve 15.0 cm por el barril horizontal del cañón y hay una fuerza constante de fricción de 0.032 0 N entre el barril y la bola. (a) ¿Con qué rapidez sale el proyectil del barril del cañón? (b) ¿En qué punto tiene la bola su máxima rapidez? (c) ¿Cuál es la rapidez máxima?

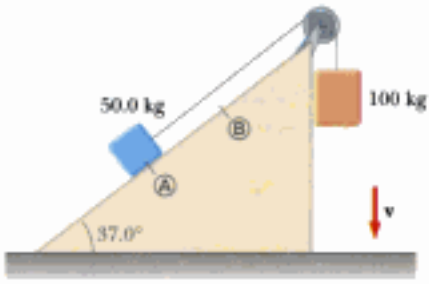


Figura P8.36

36. Un bloque de 50.0 kg y un bloque de 100 kg, están unidos por medio de una cuerda, como se ve en la figura P8.36. La polea es sin fricción y de masa despreciable. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque de 50.0 kg y el plano inclinado es 0.250. Determine el cambio en la energía cinética del bloque de 50.0 kg cuando se mueve de Ⓐ a Ⓑ una distancia de 20.0 m.

37. Un objeto de 1.50 kg se mantiene a 1.20 m sobre un resorte vertical sin masa y relajado con una constante de fuerza de 320 N/m. El objeto se deja caer sobre el resorte. (a) ¿Cuánto comprime al resorte? **¿Qué pasaría si?** ¿Cuánto comprime al resorte si el mismo experimento se realiza sobre la Luna, donde $g = 1.63\ \text{m/s}^2$? (c) **¿Qué pasaría si?** Repita la parte (a), pero esta vez suponga que una fuerza constante de resistencia del aire de 0.700 N actúa sobre el objeto durante su movimiento.

38. Un acróbata aéreo de 75.0 kg cae verticalmente hacia abajo con rapidez terminal de 60.0 m/s. Determine la rapidez a la que el sistema acróbata-Tierra pierde energía mecánica.

39. Una tabla uniforme de longitud L se desliza a lo largo de un plano horizontal (sin fricción) como se ve en la figura P8.39a. La tabla se desliza entonces por la frontera con una superficie horizontal áspera. El coeficiente de fricción cinética entre la tabla y la segunda superficie es μ_k. (a) Encuentre la aceleración de la tabla en el momento en que su extremo delantero ha recorrido una distancia x más allá de la frontera. (b) La tabla se detiene en el momento en que su extremo trasero llega a la frontera, como se ve en la figura P8.39b. Encuentre la rapidez inicial v de la tabla.

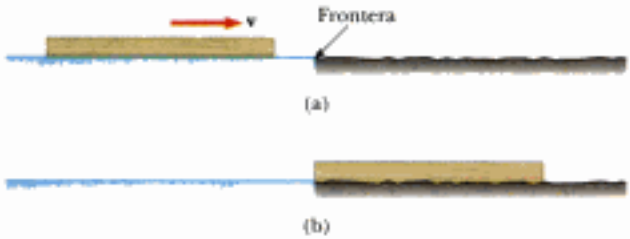


Figura P8.39

Sección 8.5 Relación entre fuerzas conservativas y energía potencial

40. Una sola fuerza conservativa que actúa sobre una partícula varía como $\mathbf{F} = (-Ax + Bx^2)\hat{\mathbf{i}}$ N, donde A y B son constantes y x está en metros. (a) Calcule la función de energía potencial $U(x)$ asociada con esta fuerza, tomando $U = 0$ en $x = 0$. (b) Encuentre el cambio en energía potencial y el cambio en energía cinética cuando la partícula se mueve de $x = 2.00$ m a $x = 3.00$ m.

41. Una sola fuerza conservativa actúa sobre una partícula de 5.00 kg. La ecuación $F_x = (2x + 4)$ N describe la fuerza, donde x está en metros. Cuando la partícula se mueve a lo largo del eje x de $x = 1.00$ m a $x = 5.00$ m, calcule (a) el trabajo realizado por esta fuerza, (b) el cambio en energía potencial del sistema y (c) la energía cinética de la partícula en $x = 5.00$ m si su rapidez es 3.00 m/s en $x = 1.00$ m.

42. Una función de energía potencial para una fuerza bidimensional es de la forma $U = 3x^3y - 7x$. Encuentre la fuerza que actúa en el punto (x, y).

43. La energía potencial de un sistema de dos partículas separadas por una distancia r está dada por $U(r) = A/r$, donde A es una constante. Encuentre la fuerza radial $\mathbf{F}_r$ que cada partícula ejerce sobre la otra.

Materiał chroniony prawem autorskim

Sección 8.6 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema

44. Un cono circular recto puede ser balanceado sobre una superficie horizontal en tres formas diferentes. Trace estas configuraciones de equilibrio, e identifíquelas como posiciones de equilibrio estable, inestable o neutro.

45. Para la curva de energía potencial que se muestra en la figura P8.45, (a) determine si la fuerza F_x es positiva, negativa o cero en los cinco puntos indicados. (b) Indique puntos de equilibrio estable, inestable y neutro. (c) Trace la curva para F_x contra x a partir de $x = 0$ a $x = 9.5$ m.

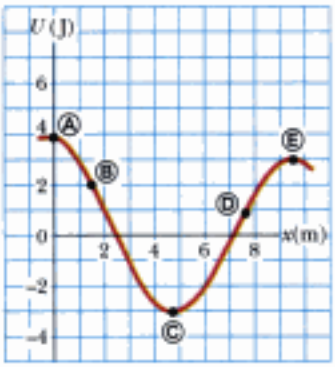


Figura P8.45

46. Una partícula se mueve a lo largo de una línea donde la energía potencial de su sistema depende de su posición r como se grafica en la figura P8.46. En el límite, cuando r aumenta sin límite, $U(r)$ se aproxima a +1 J. (a) Identifique cada posición de equilibrio para esta partícula. Indique si cada una es un punto de equilibrio estable, inestable o neutro. (b) La partícula estará enlazada si la energía total del sistema ¿está en qué rango? Ahora suponga que el sistema tiene energía −3 J. Determine (c) el rango de posiciones donde la partícula se puede hallar, (d) su máxima energía cinética, (e) la ubicación donde tiene máxima energía cinética, y (f) la *energía de enlace* del sistema, esto es, la energía adicional que tendría que darse para que la partícula su mueva a $r \to \infty$.

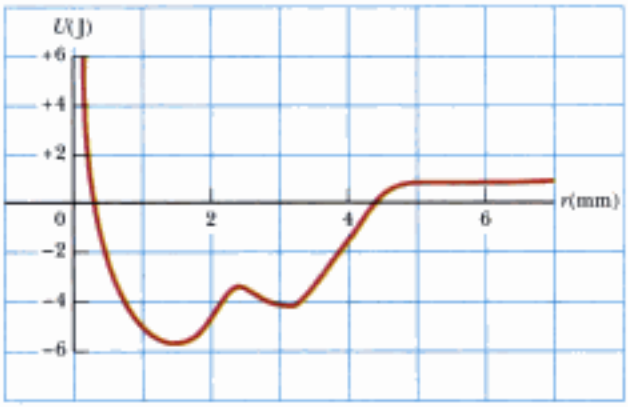
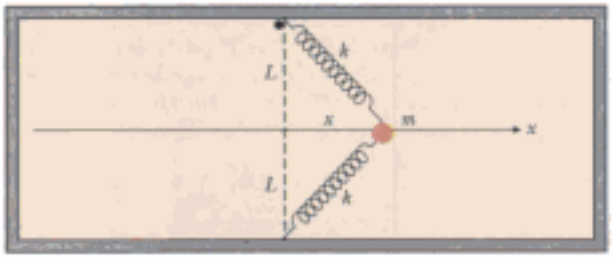


Figura P8.46

47. Una partícula de masa 1.18 kg está unida entre dos resortes idénticos sobre una mesa horizontal sin fricción. Los resortes tienen constantes de fuerza k y cada uno está inicialmente sin estirar. (a) Si la partícula es jalada una distancia x a lo largo de una dirección perpendicular a la configuración inicial de los resortes, como se ve en la figura P8.47, demuestre que la energía potencial del sistema es

$$U(x) = kx^2 + 2kL\left(L - \sqrt{x^2 + L^2}\right)$$

(*Sugerencia:* vea el problema 58 del capítulo 7.) (b) Haga una gráfica de $U(x)$ contra x e identifique todos los puntos de equilibrio. Suponga que $L = 1.20$ m y $k = 40.0$ N/m. (c) Si la partícula es jalada 0.500 m a la derecha y luego se suelta, ¿cuál es su rapidez cuando alcance el punto de equilibrio $x = 0$?



Vista superior

Figura P8.47

Problemas adicionales

48. Un bloque se desliza hacia abajo por una vía curva sin fricción y luego hacia arriba de un plano inclinado, como en la figura P8.48. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es μ_k. Use métodos de energía para demostrar que la altura máxima alcanzada por el bloque es

$$y_{máx} = \frac{h}{1 + \mu_k \cot \theta}$$

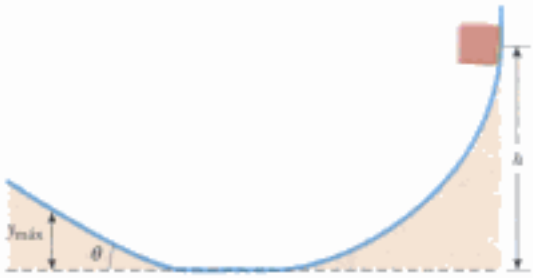


Figura P8.48

49. Haga una estimación de orden de magnitud de la potencia de salida cuando suba escaleras. En su solución, exprese las cantidades físicas que tome como datos y los valores que mida o estime para ellos. ¿Considera usted su máxima potencia o su potencia sostenible?

50. **Problema de repaso.** La masa de un auto es 1 500 kg. La forma de la carrocería es tal, que su coeficiente de resistencia aerodinámica al avance es $D = 0.330$ y el área frontal es 2.50 m². Si se supone que la fuerza de resistencia al avance es proporcional a v^2, y si se desprecian otras fuentes de fricción, calcule la potencia necesaria para mantener una rapidez de 100 km/h cuando el auto sube por una larga pendiente de 3.20°.

Materiał chroniony prawem autorskim

51. Supongamos que el lector asiste a una universidad que se inició como facultad de agricultura. Cerca del centro del campus está un alto silo rematado con un capacete semiesférico. El capacete es sin fricción cuando está húmedo. Alguien, de algún modo, ha puesto una calabaza en el punto más alto. La línea desde el centro de curvatura del capacete a la calabaza forma un ángulo $\theta_i = 0°$ con la vertical. Cuando una persona está de pie cerca del silo en una noche lluviosa, un poco de viento hace que la calabaza empiece a deslizarse hacia abajo desde el reposo. Pierde contacto con el capacete cuando la línea del centro del hemisferio a la calabaza forma cierto ángulo con la vertical. ¿Cuál es este ángulo?

52. Una partícula de 200 g se suelta desde el reposo en el punto Ⓐ a lo largo del diámetro horizontal en el interior de un tazón semiesférico y sin fricción, de radio $R = 30.0$ cm (figura P8.52). Calcule (a) la energía potencial gravitacional del sistema partícula-Tierra cuando la partícula esté en el punto Ⓐ con respecto al punto Ⓑ, (b) la energía cinética de la partícula en el punto Ⓑ, (c) su rapidez en el punto Ⓑ, y (d) su energía cinética y la energía potencial cuando la partícula esté en el punto Ⓒ.

Figura P8.52 Problemas 52 y 53.

53. **¿Qué pasaría si?** La partícula descrita en el problema 52 (figura P8.52) se suelta desde el reposo en Ⓐ, y la superficie del tazón es áspera. La rapidez de la partícula en Ⓑ es 1.50 m/s. (a) ¿Cuál es su energía cinética en Ⓑ? (b) ¿Cuánta energía mecánica se transforma en energía interna cuando la partícula se mueve de Ⓐ a Ⓑ? (c) ¿Es posible determinar el coeficiente de fricción a partir de estos resultados en cualquier forma sencilla? Explique.

54. Un bloque de 2.00 kg situado sobre un plano inclinado rugoso, se conecta a un resorte de masa despreciable que tiene una constante de resorte de 100 N/m (figura P8.54). La polea es sin fricción. El bloque se suelta desde el reposo cuando el resorte no está estirado. El bloque se mueve 20.0 cm hacia abajo por el plano antes de detenerse. Encuentre la fricción cinética entre el bloque y el plano inclinado.

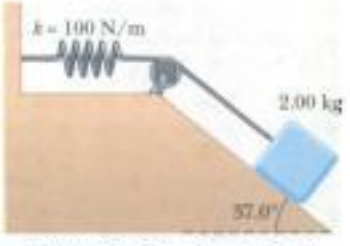


Figura P8.54 Problemas 54 y 55.

55. **Problema de repaso.** Suponga que el plano inclinado es sin fricción para el sistema descrito en el problema 54 (figura P8.54). El bloque se suelta desde el reposo con el resorte inicialmente sin estirar. (a) ¿Qué distancia baja por el plano antes de detenerse? (b) ¿Cuál es la aceleración en su punto más bajo? ¿Es constante la aceleración? (c) Describa las transformaciones de energía que ocurren durante el descenso.

56. Un palo saltador de un niño (figura P8.56) almacena energía en un resorte con una constante de fuerza de 2.5×10^4 N/m. En la posición Ⓐ ($x_A = -0.100$ m), la compresión del resorte es máxima y el niño está momentáneamente en reposo. En la posición Ⓑ ($x_B = 0$), el resorte está relajado y el niño se mueve hacia arriba. En la posición Ⓒ, el niño está de nuevo momentáneamente en reposo en lo alto del salto. La masa combinada del niño y el palo saltador es 25.0 kg. (a) Calcule la energía total del sistema niño-palo-Tierra si las energías potenciales gravitacional y elástica son cero para $x = 0$. (b) Determine el valor de x para el cual la energía cinética del sistema es máxima. (c) Calcule la rapidez del niño en $x = 0$. (d) Determine el valor de x para el cual la energía cinética del sistema es máxima. (e) Calcule la rapidez máxima del niño hacia arriba.

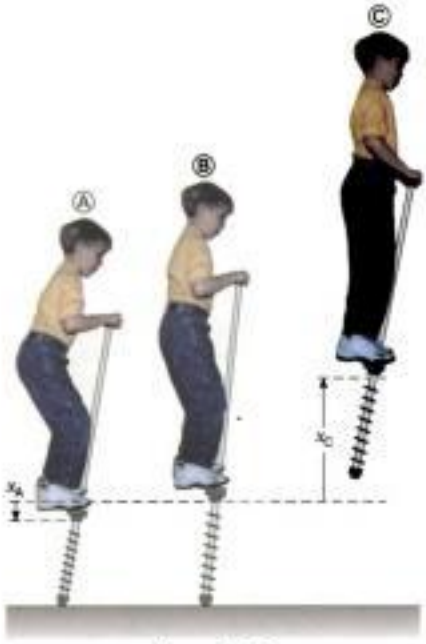


Figura P8.56

57. Un bloque de 10.0 kg se suelta desde el punto Ⓐ en la figura P8.57. La vía es sin fricción, excepto en la porción entre los puntos Ⓑ y Ⓒ, que tiene una longitud de 6.00 m. El bloque baja por la vía, golpea un resorte de constante de fuerza 2 250 N/m, y comprime al resorte 0.300 m desde su posición de equilibrio, antes de detenerse momentáneamente. Determine el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie rugosa entre Ⓑ y Ⓒ.

58. La función de energía potencial para un sistema está dada por $U(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$. (a) Determine la fuerza F_x como función de x. (b) ¿Para qué valores de x es la fuerza igual a cero? (c) Grafique $U(x)$ contra x y F_x contra x, e indique los puntos de equilibrio estable e inestable.

Materiał chroniony prawem autorskim

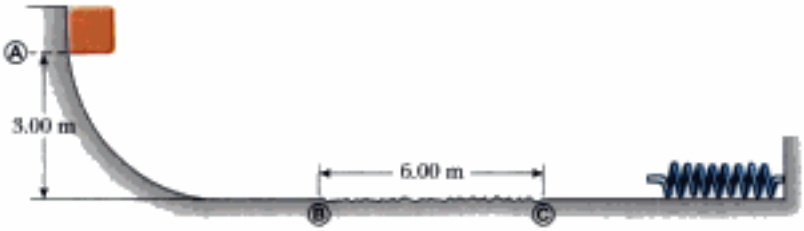


Figura P8.57

59. Un bloque de 20.0 kg está unido a otro de 30.0 kg por un resorte que pasa sobre una polea ligera sin fricción. El de 30.0 kg está unido a un resorte que tiene masa despreciable y una constante de fuerza de 250 N/m, como se muestra en la figura P8.59. El resorte está sin estirar cuando el sistema es como se muestra en la figura, y el plano inclinado es sin fricción. El bloque de 20.0 kg es jalado 20.0 cm hacia abajo por el plano (de modo que el de 30.0 kg está 40.0 cm arriba del piso) y se suelta desde el reposo. Encuentre la rapidez de cada bloque cuando el de 30.0 kg esté 20.0 cm arriba del piso (esto es, cuando el resorte no está estirado).

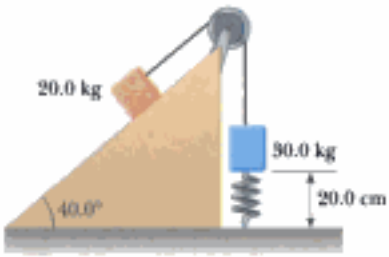


Figura P8.59

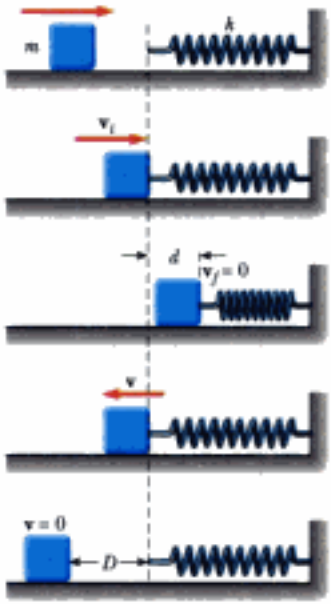


Figura P8.60

60. Un objeto de 1.00 kg se desliza a la derecha sobre una superficie que tiene un coeficiente de fricción cinética de 0.250 (figura P8.60). El objeto tiene una rapidez de $v_i = 3.00$ m/s cuando hace contacto con un resorte ligero que tiene una constante de fuerza de 50.0 N/m. El objeto se detiene después de que el resorte ha sido comprimido una distancia d. El objeto es forzado entonces hacia la izquierda por el resorte, y continúa moviéndose en esa dirección más allá de la posición no estirada del resorte. Por último, el objeto se detiene a una distancia D a la izquierda del resorte no estirado. Encuentre (a) la distancia de compresión d, (b) la rapidez v en la posición no estirada cuando el objeto se mueve a la izquierda, y (c) la distancia D donde el objeto se detiene.

61. Un bloque de masa 0.500 kg es empujado contra un resorte horizontal de masa despreciable, hasta que el resorte es comprimido una distancia x (figura P8.61). La constante de fuerza del resorte es 450 N/m. Cuando se suelta, el bloque se desplaza a lo largo de una superficie horizontal sin fricción al punto B, la parte más baja de una vía circular vertical de radio $R = 1.00$ m, y continúa subiendo por la vía. La rapidez del bloque en la parte más baja de la vía es $v_B = 12.0$ m/s, y el bloque experimenta una fuerza promedio de fricción de 7.00 N mientras se desliza hacia arriba por la vía. (a) ¿Cuál es x? (b) ¿Qué rapidez pronostica el estudiante para el bloque en la parte más alta de la vía? (c) ¿Llega el bloque en realidad a la parte más alta de la vía, o cae antes de llegar ahí?

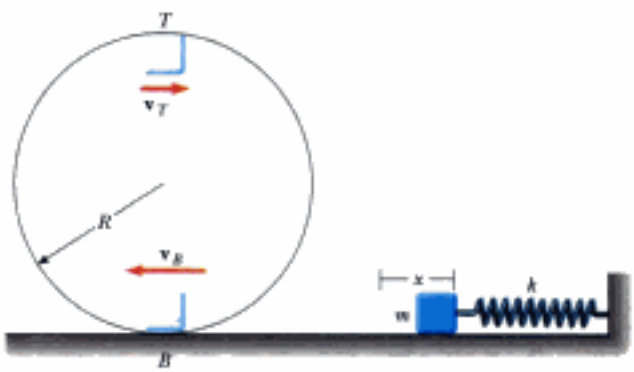


Figura P8.61

62. Una cadena uniforme de longitud 8.00 m inicialmente está estirada sobre una mesa horizontal. (a) Si el coeficiente de fricción estática entre cadena y mesa es 0.600, demuestre que la cadena empezará a deslizarse cayendo de la mesa si al menos 3.00 m de ella cuelgan del borde de la mesa. (b) Determine la rapidez de la cadena cuando toda ella sale de la mesa, dado que el coeficiente de fricción cinética entre la cadena y la mesa es 0.400.

63. Una niña se desliza sin fricción desde una altura h a lo largo de un tobogán acuático curvo (figura P8.63). Ella se lanza desde una altura $h/5$ hacia la piscina. Determine su máxima altura y en el aire en términos de h y θ.

Materiał chroniony prawem autorskim

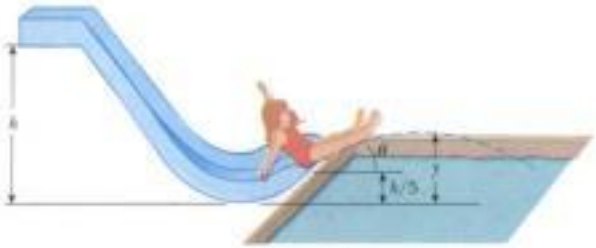


Figura P8.63

64. Consulte la situación descrita en el capítulo 5, problema 65. Un deslizador de 1.00 kg sobre una vía horizontal de aire es jalado por una cuerda a un ángulo θ. La cuerda tensa pasa sobre una polea ligera a una altura h_0 = 40.0 cm sobre la línea de movimiento del deslizador. El otro extremo de la cuerda está unido a una masa colgante de 0.500 kg, como se ve en la figura P5.65. (a) Demuestre que la rapidez del deslizador v_x y la rapidez de la masa colgante v_y están relacionadas por $v_y = v_x \cos\theta$. El deslizador se suelta desde el reposo cuando θ = 30.0°. Encuentre (b) v_x y (c) v_y cuando θ = 45.0°. (d) Explique por qué las respuestas a los incisos (b) y (c) del problema 65 en el capítulo 5, no ayudan a resolver las partes (b) y (c) de este problema.

65. Jane, cuya masa es 50.0 kg, necesita cruzar un río (de ancho D) lleno de cocodrilos devoradores de hombres para salvar a Tarzán, que está en peligro. Ella debe columpiarse con un viento que ejerce una fuerza horizontal constante $\mathbf{F}$, en una liana que tiene longitud L y que inicialmente forma un ángulo θ con la vertical (figura P8.65). Tomando D = 50.0 m, F = 110 N, L = 40.0 m, y θ = 50.0°, (a) ¿con qué rapidez mínima debe Jane empezar su oscilación para llegar apenas al otro lado? (b) Una vez completado el rescate, Tarzán y Jane deben regresar, para lo cual tienen que cruzar de nuevo el río. ¿Con qué rapidez mínima deben empezar su oscilación? Suponga que Tarzán tiene una masa de 80.0 kg.

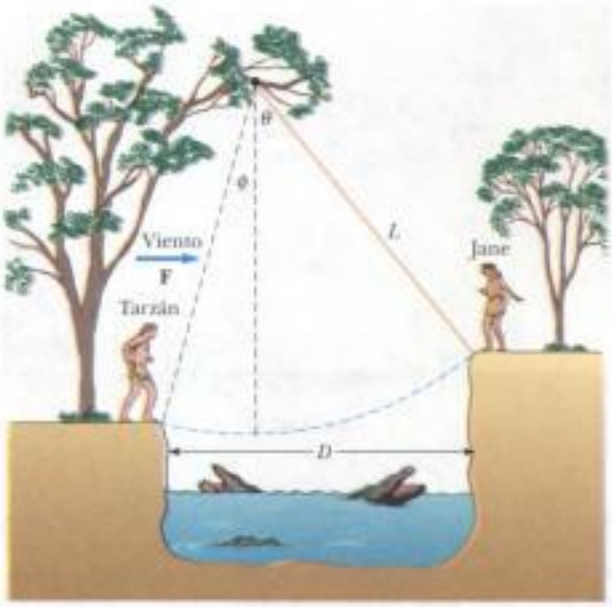


Figura P8.65

66. Un bloque de 5.00 kg libre de moverse en una superficie horizontal sin fricción, está unido a un extremo de un resorte ligero horizontal. El otro extremo del resorte se mantiene fijo. El resorte se comprime 0.100 m desde el equilibrio, y se suelta. La rapidez del bloque es 1.20 m/s cuando pasa la posición de equilibrio del resorte. El mismo experimento se repite ahora con la superficie sin fricción sustituida por una superficie en la que el coeficiente de fricción cinética es 0.300. Determina la rapidez del bloque en la posición de equilibrio del resorte.

67. Un patinador con su patineta se puede modelar como una partícula de masa 76.0 kg situada en su centro de masa (que estudiaremos en el capítulo 9). Como en la figura P8.67, el patinador inicia desde el reposo en posición de cuclillas en el borde de un tubo cortado a la mitad (punto Ⓐ). El tubo cortado a la mitad es un canal acuático seco que forma la mitad de un cilindro de radio 6.80 m con su eje horizontal. En su descenso, el patinador se mueve sin fricción, de modo que su centro de masa se mueve por un cuarto de círculo de radio 6.30 m. (a) Encuentre su rapidez en la parte más baja del tubo cortado a la mitad (punto Ⓑ). (b) Encuentre su aceleración centrípeta. (c) Encuentre la fuerza normal n_B que actúa sobre el patinador en el punto Ⓑ. Inmediatamente después de pasar el punto Ⓑ, él se pone de pie y sube sus brazos, levantando su centro de masa de 0.500 a 0.950 m sobre el concreto (punto Ⓒ). Para tomar en cuenta la conversión de energía química en mecánica, modela sus piernas como que realizan trabajo al empujarse verticalmente hacia arriba, con una fuerza constante igual a la fuerza normal n_B, sobre una distancia de 0.450 m. (El estudiante podrá resolver este problema con un modelo más preciso en el capítulo 11). (d) ¿Cuál es el trabajo realizado sobre el cuerpo del patinador en este proceso? A continuación, el patinador se desliza hacia arriba, con su centro de masa moviéndose en un cuarto de círculo de radio 5.85 m. Su cuerpo está horizontal cuando pasa el punto Ⓓ, el borde lejano del tubo cortado a la mitad. (e) Encuentre su rapidez en este punto. Al final pasa a ser balístico, torciéndose mientras que su centro de masa se mueve verticalmente. (f) ¿Qué tan alto sobre el punto Ⓓ sube el patinador? (g) ¿Sobre qué intervalo de tiempo está en el aire antes de bajar de nuevo al tubo, 2.34 m abajo del nivel del punto Ⓓ? [*Atención:* no trate de hacer esto si no tiene la habilidad necesaria y el equipo de protección, ni en un canal de drenaje al cual no tenga acceso legal.]

Figura P8.67

68. Un bloque de masa M se apoya sobre una mesa. Está sujeto al extremo inferior de una cuerda vertical ligera. El extremo superior del resorte está sujeto a un bloque de masa m. El bloque superior es empujado hacia abajo por una fuerza adicional $3mg$, de modo que la compresión del resorte es $4mg/k$. En esta configuración, el bloque superior se suelta desde el reposo. El resorte levanta el bloque inferior de la mesa. En términos de m, ¿cuál es el valor máximo posible para M?

Materiał chroniony prawem autorskim

69. Una pelota que tiene masa m está unida por medio de una fuerte cuerda de longitud L a un punto pivote y mantenida en su lugar en una posición vertical. Un viento que ejerce una fuerza constante de magnitud F, está soplando de izquierda a derecha, como se ve en la figura P8.69a. (a) Si la pelota se suelta desde el reposo, demuestre que la altura máxima H que alcanza la pelota, medida desde su altura inicial, es

$$H = \frac{2L}{1 + (mg/F)^2}$$

Compruebe que el resultado anterior es válido tanto para casos cuando $0 \leq H \leq L$ como para $L \leq H \leq 2L$. (b) Calcule el valor de H usando los valores $m = 2.00$ kg, $L = 2.00$ m y $F = 14.7$ N. (c) Con estos mismos valores, determine la altura de *equilibrio* de la pelota. (d) ¿Podría la altura de equilibrio ser mayor que L? Explique.

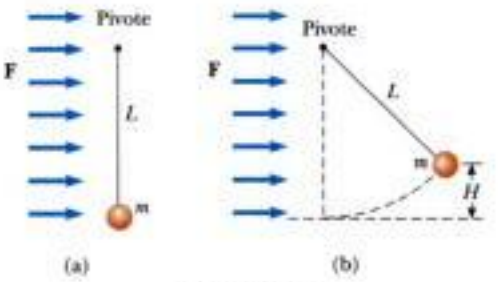


Figura P8.69

70. Una pelota está unida a un extremo de una cuerda. El otro extremo de la cuerda se mantiene fijo. La pelota se pone en movimiento alrededor de un círculo vertical sin fricción, y con rapidez $v_i = \sqrt{Rg}$ en la parte más alta del círculo, como se ve en la figura P8.70. ¿A qué ángulo θ debe cortarse la cuerda para que la pelota pase por el centro del círculo?

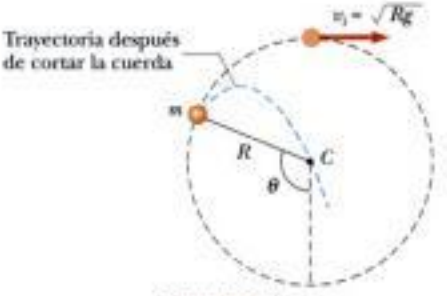


Figura P8.70

71. Una pelota gira en un círculo vertical en el extremo de una cuerda. Si la energía total del sistema pelota-Tierra permanece constante, demuestre que la tensión en la parte más baja de la cuerda es mayor que la tensión en la parte más alta por seis veces el peso de la pelota.

72. Un péndulo, formado por una cuerda de longitud L y una pequeña esfera, oscila en el plano vertical. La cuerda golpea una clavija situada a una distancia d abajo del punto de suspensión (figura P8.72). (a) Demuestre que si la esfera se suelta desde una altura bajo de la clavija, regresará a esta altura después de chocar con la clavija. (b) Demuestre que si el péndulo se suelta desde la posición horizontal ($\theta = 90°$) y ha de oscilar en un círculo completo centrado en la clavija, entonces el valor mínimo de d debe ser $3L/5$.

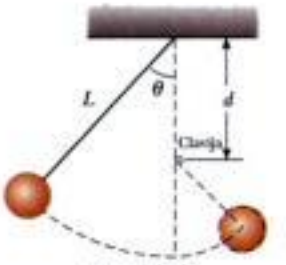


Figura P8.72

73. Un carro de montaña rusa se suelta desde el reposo en la parte más alta de la primera subida, y luego se mueve libremente con fricción insignificante. La montaña rusa mostrada en la figura P8.73, tiene una espira circular de radio R en un plano vertical. (a) Suponga primero que el carro apenas llega al punto más alto de la espira: en la parte más alta de la espira, los pasajeros quedan cabeza abajo y se sienten sin peso. Encuentre la altura necesaria del punto de liberación sobre la parte más baja de la espira en términos de R. (b) Ahora suponga que el punto de liberación está a la altura mínima requerida, o más arriba. Demuestre que la fuerza normal sobre el carro en la parte más baja de la espira excede la fuerza normal en la parte más alta de la espira por seis veces el peso del carro. La fuerza normal en cada viajero sigue la misma regla. Esta gran fuerza normal es peligrosa y muy incómoda para los pasajeros. Las montañas rusas, por lo tanto, no se construyen con espiras circulares en planos verticales. La figura P6.20 y la fotografía en la página 157, muestran dos diseños reales.

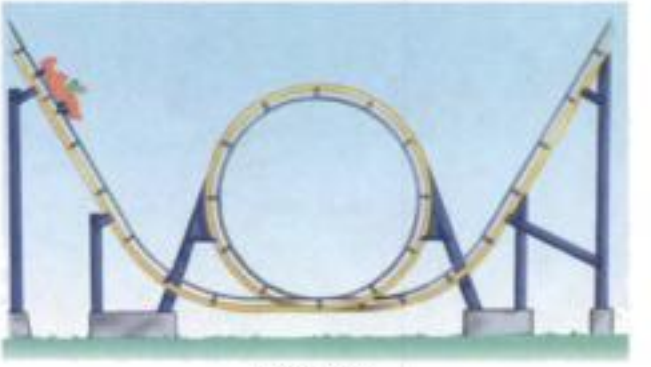


Figura P8.73

74. Problema de repaso. En 1887 en Bridgeport, Connecticut, C. J. Belknap construyó el tobogán acuático que se ve en la figura P8.74. Un pasajero que subía a un pequeño trineo, de masa total 80.0 kg, se empujó para arrancar en la parte más alta del tobogán (punto Ⓐ) con una rapidez de 2.50 m/s. El plano inclinado medía 9.76 m de alto en su parte superior, 54.3 m de largo y 0.51 de ancho. En su longitud, 725 ruedas hacían despreciable la fric-

Materiał chroniony prawem autorskim

ción. Al salir del plano inclinado horizontalmente en el extremo más bajo (punto Ⓒ), el pasajero se deslizaba sobre el agua de la bahía de Long Island hasta 50 m, "como si fuera una piedra plana", antes de detenerse finalmente y nadar a la orilla llevando consigo el trineo. Según *Scientific American*, "La expresión facial de los novatos que hacían el recorrido por primera vez es bastante notable, y las sensaciones que sentían eran igualmente novelescas y peculiares". (a) Encuentre la rapidez del trineo y el pasajero en el punto Ⓒ. (b) Modele la fuerza de fricción del agua como fuerza retardadora constante que actúa sobre una partícula. Encuentre el trabajo realizado por la fricción de agua al detener el trineo y su pasajero. (c) Encuentre la magnitud de la fuerza que el plano inclinado ejerce sobre el trineo en el punto Ⓑ. (e) En el punto Ⓒ el plano inclinado es horizontal, pero curvo en el plano vertical. Suponga que su radio de curvatura es 20.0 m. Encuentre la fuerza que ejerce el plano sobre el trineo en el punto Ⓒ.

Grabado de Scientific American, julio 1898

Figura P8.74

Respuestas a las *preguntas rápidas*

8.1 (c). El signo de la energía potencial gravitacional depende de su elección de configuración cero. Si los dos objetos del sistema están más cercanos entre sí que en la configuración cero, la energía potencial es negativa. Si están alejados, la energía potencial es positiva.

8.2 (c). La razón por la que no hacemos caso de la energía cinética de la enorme Tierra, es que esta energía cinética es tan pequeña, que es esencialmente cero.

8.3 (a). Debemos incluir la Tierra si vamos a trabajar con energía potencial gravitacional.

8.4 (c). La energía mecánica total, cinética más potencial, se conserva.

8.5 (a). La piedra más grande tiene el doble de energía potencial gravitacional asociada con ella en comparación con la piedra más ligera. Como la energía mecánica de un sistema aislado se conserva, la piedra más grande llegará al suelo con el doble de energía cinética que la piedra más ligera.

8.6 $v_1 = v_2 = v_3$. La primera y tercera pelotas aceleran después de que son lanzadas, mientras que la segunda pelota inicialmente reduce su velocidad, pero luego acelera después de llegar a su punto más alto. Las trayectorias de las tres pelotas son parábolas, y las pelotas tardan tiempos diferentes para llegar al suelo porque tienen velocidades iniciales diferentes. No obstante, las tres pelotas tienen la misma rapidez en el momento en que llegan al suelo, porque todas inician con la misma energía cinética y el sistema pelota-Tierra experimenta el mismo cambio en energía potencial gravitacional en los tres casos.

8.7 (c). Este sistema exhibe cambios en energía cinética, así como en ambos tipos de energía potencial.

8.8 (a). Debido a que la Tierra no está incluida en el sistema, no hay energía potencial gravitacional asociada con él.

8.9 (c). La fuerza de fricción debe transformar cuatro veces energía mecánica en energía interna si la rapidez se duplica, porque la energía cinética depende del cuadrado de la rapidez. Por lo tanto, la fuerza debe actuar sobre cuatro veces la distancia.

8.10 (c). La reducción en energía mecánica del sistema es $f_k d$, donde d es la distancia que el bloque se mueve a lo largo del plano inclinado. Mientras la fuerza de fricción cinética permanezca igual, la distancia d es menor, porque un componente de la fuerza gravitacional está tirando del bloque en la dirección opuesta a su velocidad.

8.11 (d). La pendiente de la gráfica de $U(x)$ contra x es por definición $dU(x)/dx$. De la ecuación 8.18, vemos que esta expresión es igual al negativo del componente x de la fuerza conservativa que actúa sobre un objeto que es parte del sistema.

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 9

Cantidad de movimiento lineal y colisiones

▲ *Una bola de boliche en movimiento lleva cantidad de movimiento, que es el tema de este capítulo. En la colisión entre la bola y los bolos, se transfiere cantidad de movimiento a los bolos (Mark Cooper/ Corbis Stock Market)*

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

9.1 Cantidad de movimiento lineal y su conservación

9.2 Impulso y cantidad de movimiento

9.3 Colisiones en una dimensión

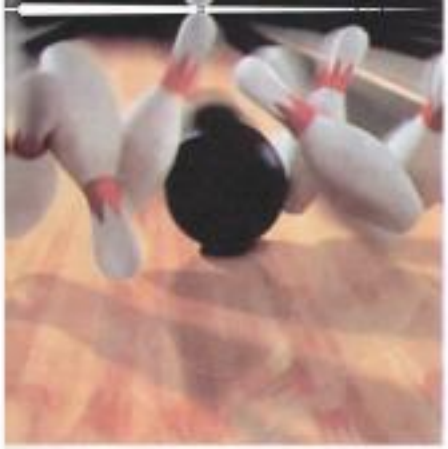
9.4 Colisiones en dos dimensiones

9.5 El centro de masa

9.6 Movimiento de un sistema de partículas

9.7 Propulsión de un cohete

Materiał chroniony prawem autorskim



Considere lo que ocurre cuando una bola de boliche golpea a un bolo, como se ve en la fotografía con que se inicia este capítulo. El bolo recibe una alta velocidad como resultado de la colisión; en consecuencia, sale despedido y golpea otros bolos o es proyectado hacia el tope trasero. Debido a que la fuerza promedio ejercida sobre el bolo durante la colisión es grande (que resulta en una gran aceleración), el bolo alcanza rápidamente una gran velocidad y experimenta una fuerza durante un intervalo muy corto. Según la tercera ley de Newton, el bolo ejerce una fuerza de reacción sobre la bola que es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza ejercida por la bola sobre el bolo. Esta fuerza de reacción hace que la bola acelere, pero debido a que la bola es mucho más grande que el bolo, la aceleración de la bola es mucho menor que la aceleración del bolo.

Aun cuando F y a son grandes para el bolo, varían en tiempo ¡qué complicada situación! Uno de los principales objetivos de este capítulo, es capacitar al estudiante para que comprenda y analice estos eventos en una forma sencilla. Primero, introducimos el concepto de *cantidad de movimiento*, que es útil para describir objetos en movimiento. Imagine que usted ha interceptado un balón de fútbol, y ve dos jugadores del equipo contrario aproximándose a usted cuando corre con el balón. Uno de los jugadores es el mariscal de 180 libras de peso que lanzó el balón; el otro es un defensa de 300 libras de peso. Ambos corren hacia usted a 5 m/s pero, como tienen diferentes masas, intuitivamente usted sabe que preferiría chocar con el mariscal que con el defensa. La cantidad de movimiento de un objeto está relacionada con su masa y su velocidad. El concepto de cantidad de movimiento nos lleva a una segunda ley de conservación que es la conservación de la cantidad de movimiento, ley especialmente útil para tratar problemas donde intervengan colisiones entre objetos y para analizar la propulsión de cohetes. En este capítulo también introducimos el concepto de centro de masa de un sistema de partículas. Encontramos que el movimiento de un sistema de partículas puede ser descrito por el movimiento de una partícula representativa localizada en el centro de masa.

9.1 Cantidad de movimiento lineal y su conservación

En los dos capítulos precedentes, estudiamos situaciones que son complejas para analizar con las leyes de Newton. Pudimos resolver problemas en donde aparecen estas situaciones al aplicar un principio de conservación, que es la conservación de la energía. Considere otra situación, la de un arquero de 60 kilos de pie sobre una superficie de hielo sin fricción, y que dispara una flecha de 0.500 kg horizontalmente a 50 m/s. De la tercera ley de Newton, sabemos que la fuerza que el arco ejerce sobre la flecha será igualada por una fuerza en la dirección opuesta sobre el arco (y el arquero). Esto hará que el arquero empiece a deslizarse hacia atrás sobre el hielo. Pero, ¿con qué rapidez? No podemos contestar esta pregunta directamente usando *ya sea* la segunda ley de Newton o un planteamiento de energía, porque no hay suficiente información.

A pesar de nuestra incapacidad para resolver el problema del arquero usando nuestras técnicas aprendidas hasta aquí, éste es un problema muy sencillo de resolver si introducimos una nueva cantidad que describe el movimiento, *la cantidad de movimiento lineal*. Apliquemos la Estrategia General para Resolución de Problemas y *conceptualicemos* un sistema aislado de dos partículas (figura 9.1) con masas m_1 y m_2 y que se mueven con velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en un instante. Debido a que el sistema está aislado, la única fuerza sobre una partícula

Materiał chroniony prawem autorskim

es la de la otra partícula, y podemos *clasificar* esto como una situación en la que las leyes de Newton serán útiles. Si una fuerza de la partícula 1 (por ejemplo, una fuerza gravitacional) actúa sobre la partícula 2, entonces debe haber una segunda fuerza, igual en magnitud, pero opuesta en dirección, que la partícula 2 ejerce sobre la partícula 1. Esto es, forman un par de acción-reacción de la tercera ley de Newton, de modo que $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Podemos expresar esta condición como

$$\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = 0$$

Analicemos más a fondo esta situación al incorporar la segunda ley de Newton. En algún intervalo, las partículas que interactúan en el sistema van a acelerar. Por lo tanto, sustituir cada fuerza con $m\mathbf{a}$ da

$$m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 = 0$$

Ahora sustituimos la aceleración con su definición de la ecuación 4.5:

$$m_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = 0$$

Si las masas m_1 y m_2 son constantes las podremos poner en las derivadas lo cual nos da

$$\frac{d(m_1\mathbf{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\mathbf{v}_2)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) = 0 \qquad (9.1)$$

Para *finalizar* este análisis, nótese que la derivada de la suma $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ con respecto al tiempo es cero. En consecuencia, esta suma debe ser constante. De este análisis sabemos que la cantidad $m\mathbf{v}$ para una partícula es importante en que se conserva la suma de estas cantidades para un sistema aislado. A esta cantidad la llamamos *cantidad de movimiento lineal:*

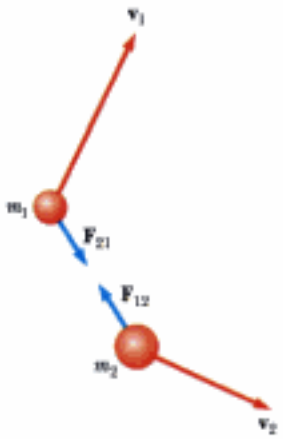


Figura 9.1 Dos partículas interactúan entre sí. Según la tercera ley de Newton, debemos tener $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

Definición de cantidad de movimiento lineal de una partícula

La **cantidad de movimiento lineal** de una partícula u objeto que se pueda modelar como una partícula de masa m, que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$, se define como el producto de la masa y la velocidad:

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v} \qquad (9.2)$$

La cantidad de movimiento lineal es una cantidad vectorial porque es igual al producto de una cantidad escalar m y una cantidad vectorial $\mathbf{v}$. Su dirección es a lo largo de $\mathbf{v}$, y tiene dimensiones ML/T, y su unidad SI es kg · m/s.

Si una partícula se mueve en una dirección arbitraria, $\mathbf{p}$ debe tener tres componentes, y la ecuación 9.2 es equivalente a las ecuaciones componentes

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z$$

Como se puede ver de esta definición, el concepto de cantidad de movimiento[1] proporciona una distinción cuantitativa entre partículas pesadas y ligeras que se muevan a la misma velocidad. Por ejemplo, la cantidad de movimiento de una bola de boliche que se mueva a 10 m/s es mucho mayor que la de una bola de tenis que se mueva a la misma rapidez. Newton llamó *cantidad de movimiento* al producto $m\mathbf{v}$; ésta es quizá una descripción más gráfica que nuestra palabra actual de *momentum*, que proviene de la palabra en latín de movimiento.

Con el uso de la segunda ley de movimiento de Newton, podemos relacionar la cantidad de movimiento lineal de una partícula con la fuerza resultante que actúa sobre la partícula. Comenzamos con la segunda ley de Newton y sustituimos la definición de aceleración:

$$\sum\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

[1] En este capítulo, los términos *cantidad de movimiento* y *cantidad de movimiento lineal* tienen el mismo significado. Más adelante, en el capítulo 11, usaremos el término *cantidad de movimiento angular* cuando hablemos de movimiento rotacional.

Materiał chroniony prawem autorskim

En la segunda ley de Newton, se supone que la masa m es constante. Por lo tanto, podemos llevar m dentro de la notación de derivada para darnos

Segunda ley de Newton para una partícula

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{9.3}$$

Esto muestra que **la razón temporal de cambio de la cantidad de movimiento lineal de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre la partícula.**

Esta forma alternativa de la segunda ley de Newton es la forma en la que Newton presentó la ley, y es en realidad más general que la forma que introdujimos en el capítulo 5. Además de situaciones en las que el vector velocidad varía con el tiempo, podemos usar la ecuación 9.3 para estudiar fenómenos en los que cambia la masa. Por ejemplo, la masa de un cohete cambia cuando se quema combustible y éste sale expulsado del cohete. No podemos usar $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para analizar la propulsión de un cohete; debemos usar la ecuación 9.3, como veremos en la sección 9.7.

El valor real de la ecuación 9.3 como herramienta para análisis, sin embargo, surge si lo aplicamos a un *sistema* de dos o más partículas. Como hemos visto, esto nos lleva a una ley de la conservación de la cantidad de movimiento para un sistema aislado. Al igual que la ley de conservación es útil para resolver problemas complejos de movimiento, la ley de la conservación de cantidad de movimiento puede simplificar grandemente el análisis de otros tipos de movimiento complicado.

Pregunta rápida 9.1 Dos objetos tienen energías cinéticas iguales. ¿Cómo se comparan las magnitudes de sus cantidades de movimiento? (a) $p_1 < p_2$ (b) $p_1 = p_2$ (c) $p_1 > p_2$ (d) no hay suficiente información.

Pregunta rápida 9.2 El maestro de educación física lanza a usted, lector, una pelota de béisbol a cierta rapidez y usted la atrapa. El maestro le lanza a continuación una bola de medicina cuya masa es diez veces la de la pelota de béisbol. Usted tiene las siguientes opciones: Puede hacer que le lancen la bola de medicina con (a) la misma rapidez que la pelota de béisbol (b) la misma cantidad de movimiento (c) la misma energía cinética. Clasifique estas opciones de la más fácil a la más difícil de atrapar.

Con el uso de la definición de cantidad de movimiento, la ecuación 9.1 se puede escribir.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0$$

Debido a que la derivada de la cantidad total de movimiento $\mathbf{p}_{tot} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ es *cero*, concluimos que la cantidad *total* de movimiento del sistema debe permanecer constante.

$$\mathbf{p}_{tot} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{constante} \tag{9.4}$$

o bien, lo que es equivalente,

$$\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f} \tag{9.5}$$

donde $\mathbf{p}_{1i}$ y $\mathbf{p}_{2i}$ son los valores iniciales y $\mathbf{p}_{1f}$ y $\mathbf{p}_{2f}$ los valores finales de las cantidades de movimiento de las dos partículas para el intervalo durante el que las partículas interactúan. La ecuación 9.5 en forma de componentes demuestra que la cantidad total de movimiento en las direcciones x, y, y z se conservan todas independientemente:

$$p_{ix} = p_{fx} \qquad p_{iy} = p_{fy} \qquad p_{iz} = p_{fz} \tag{9.6}$$

Este resultado, conocido como la **ley de la conservación de la cantidad de movimiento lineal,** se puede extender a cualquier número de partículas de un sistema aislado. Se considera una de las leyes más importantes de mecánica. Podemos expresarla como sigue:

¡ADVERTENCIA!

9.1 La cantidad de movimiento de un *sistema* se conserva

Recuerde que la cantidad de movimiento de un *sistema* aislado se conserva. La cantidad de movimiento de una partícula dentro de un sistema aislado no necesariamente se conserva, porque otras partículas del sistema pueden estar interactuando con ella. Siempre aplique conservación de la cantidad de movimiento a un *sistema* aislado.

Materiał chroniony prawem autorskim

Siempre que interactúen dos o más partículas de un sistema aislado, la cantidad total de movimiento del sistema permanece constante.

Conservación de la cantidad de movimiento

Esta ley nos dice que **la cantidad total de movimiento de un sistema aislado en todo tiempo es igual a su cantidad de movimiento inicial.**

Obsérvese que no hemos hecho ningún enunciado respecto a la naturaleza de las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema. El único requisito es que las fuerzas deben ser *internas* al sistema.

Pregunta rápida 9.3 Se suelta una pelota y ésta cae hacia el suelo sin resistencia del aire. El sistema aislado para el que se conserva la cantidad de movimiento es (a) la pelota (b) la Tierra (c) la pelota y la Tierra (d) imposible de determinar.

Pregunta rápida 9.4 Un auto y un gran camión que viajan a la misma rapidez chocan de frente y quedan unidos. ¿Cuál vehículo experimenta el mayor cambio en la magnitud de su cantidad de movimiento? (a) el auto (b) el camión (c) el cambio en la magnitud de la cantidad de movimiento es igual para ambos. (d) imposible de determinar.

Ejemplo 9.1 El arquero

Consideremos la situación propuesta al principio de esta sección. Un arquero de 60 kilos está de pie, en reposo, sobre una superficie de hielo sin fricción y dispara una flecha de 0.50 kg horizontalmente a 50 m/s (figura 9.2). ¿Con qué velocidad se mueve el arquero sobre el hielo después de disparar la flecha?

Solución *No podemos* resolver este problema usando la segunda ley de Newton, $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$, porque no tenemos información acerca de la fuerza sobre la flecha ni su aceleración. *No podemos* resolver este problema usando un planteamiento de energía, porque no sabemos cuánto trabajo se realiza al tirar de la cuerda del arco hacia atrás, o cuánta energía potencial está almacenada en el arco. No obstante, *podemos* resolver este problema muy fácilmente con conservación de la cantidad de movimiento.

Consideremos que el sistema está formado por el arquero (incluyendo el arco) y la flecha. El sistema no está aislado, porque la fuerza gravitacional y la fuerza normal actúan sobre el sistema. Sin embargo, estas fuerzas son verticales y perpendiculares al movimiento del sistema. Por lo tanto, no hay fuerzas externas en la dirección horizontal, y podemos considerar que el sistema está aislado en términos de componentes de cantidad de movimiento en esta dirección.

La cantidad total de movimiento horizontal del sistema antes de disparar la flecha es cero ($m_1\mathbf{v}_{1i} + m_2\mathbf{v}_{2i} = 0$), donde el arquero es la partícula 1 y la flecha es la partícula 2. Por lo tanto, la cantidad total de movimiento horizontal después de disparar la flecha debe ser cero; esto es,

$$m_1\mathbf{v}_{1f} + m_2\mathbf{v}_{2f} = 0$$

Escogemos la dirección de disparo de la flecha como la dirección x positiva. Con $m_1 = 60$ kg, $m_2 = 0.50$ kg, y $\mathbf{v}_{2f} = 50\hat{\mathbf{i}}$ m/s, al despejar $\mathbf{v}_{1f}$ encontramos que la velocidad de retroceso del arquero es

$$\mathbf{v}_{1f} = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{v}_{2f} = -\left(\frac{0.50\text{ kg}}{60\text{ kg}}\right)(50\hat{\mathbf{i}}\text{ m/s}) = \mathbf{-0.42\hat{i}\text{ m/s}}$$

El signo negativo de $\mathbf{v}_{1f}$ indica que el arquero se mueve a la izquierda después de disparar la flecha, en la dirección opuesta al movimiento de la flecha, de acuerdo con la tercera ley de Newton. Como el arquero es mucho más grande que la flecha, esta aceleración y consecuente velocidad, son mucho menores que la aceleración y velocidad de la flecha.

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si la flecha se dispara en la dirección que forme un ángulo θ con la horizontal? ¿Cómo cambia esto la dirección de retroceso del arquero?

Respuesta La velocidad de retroceso debe disminuir en magnitud porque sólo un componente de la velocidad está en la dirección x.

Figura 9.2 (Ejemplo 9.1) Un arquero dispara una flecha horizontalmente a la derecha. Como está de pie sobre una superficie de hielo sin fricción, empezará a deslizarse a la izquierda por el hielo.

Materiał chroniony prawem autorskim

Si la flecha se dispara verticalmente hacia arriba, por ejemplo, no habría retroceso en absoluto, porque el arquero sería presionado hacia abajo en el hielo debido al disparo de la flecha.

Sólo el componente x de la cantidad de movimiento de la flecha debería usarse en un enunciado de conservación de la cantidad de movimiento, porque la cantidad de movimiento sólo se conserva en la dirección x. En la dirección y, la fuerza normal del hielo y la fuerza gravitacional son influencias externas del sistema. La conservación de cantidad de movimiento en la dirección x nos da

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \cos\theta = 0$$

que nos lleva a

$$v_{1f} = -\frac{m_2}{m_1} v_{2f} \cos\theta$$

Para $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$ y esto se reduce al valor cuando la flecha se dispara horizontalmente. Para valores de θ diferentes de cero, la función coseno es menor a 1 y la velocidad de retroceso es menor que el valor calculado para $\theta = 0$. Si $\theta = 90°$, $\cos\theta = 0$ y no hay velocidad de retroceso v_{1f}, como dijimos conceptualmente.

Ejemplo 9.2 Rompimiento de un kaón en reposo

Un tipo de partícula nuclear, llamada *kaón neutro* (K^0), se rompe en un par de otras partículas llamadas *piones* (π^+ y π^-) que tienen cargas opuestas pero iguales en masa, como se ilustra en la figura 9.3. Si se supone que el kaón está inicialmente en reposo, demuestre que los dos piones deben tener cantidades de movimiento que sean iguales en magnitud y opuestas en dirección.

Solución El rompimiento del kaón se puede escribir como

$$K^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$$

Si hacemos que $\mathbf{p}^+$ sea la cantidad de movimiento final del pión positivo y $\mathbf{p}^-$ la cantidad de movimiento final del pión negativo, la cantidad de movimiento final del sistema formado por los dos piones se puede escribir como

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{p}^+ + \mathbf{p}^-$$

Debido a que el kaón está en reposo antes del rompimiento, sabemos que $\mathbf{p}_i = 0$. Dado que se conserva la cantidad de movimiento del sistema aislado (el kaón antes del rompimiento, los dos piones después), $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f = 0$, de modo que $\mathbf{p}^+ + \mathbf{p}^- = 0$, o sea

$$\mathbf{p}^+ = -\mathbf{p}^-$$

Un punto importante a aprender de este problema, es que aun cuando se refiere a objetos que son muy diferentes de los del ejemplo precedente, la física es idéntica: *se conserva la cantidad de movimiento lineal en un sistema aislado.*

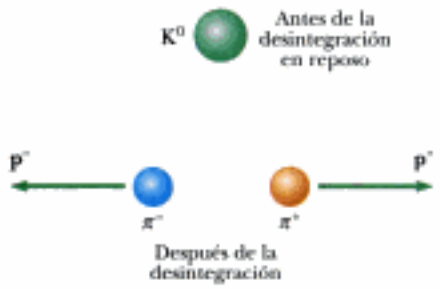


Figura 9.3 (Ejemplo 9.2) Un kaón en reposo se rompe espontáneamente en un par de piones de cargas opuestas. Los piones se separan con cantidades de movimiento que son iguales en magnitud, pero opuestas en dirección.

9.2 Impulso y cantidad de movimiento

Según la ecuación 9.3, la cantidad de movimiento de una partícula cambia si una fuerza neta actúa sobre la partícula. Conocer el cambio en la cantidad de movimiento causado por una fuerza, es útil para resolver algunos tipos de problemas. Para tener un mejor entendimiento de este importante concepto, supongamos que una sola fuerza F actúa sobre una partícula y que esta fuerza puede variar con el tiempo. Según la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, o

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}\,dt \tag{9.7}$$

Podemos integrar[2] esta expresión para hallar el cambio en la cantidad de movimiento de una partícula cuando la fuerza actúa sobre algún intervalo. Si la cantidad de movimiento de la partícula cambia de $\mathbf{p}_i$ en el tiempo t_i a $\mathbf{p}_f$ en el tiempo t_f, integrar la ecuación 9.7 da

[2] Nótese que aquí estamos integrando fuerza con respecto a tiempo. Compare esto con nuestros esfuerzos del capítulo 7, donde integramos fuerza con respecto a posición para hallar el trabajo realizado por la fuerza.

Materiał chroniony prawem autorskim

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\,dt \tag{9.8}$$

Para evaluar la integral, necesitamos saber cómo varía la fuerza con el tiempo. La cantidad del lado derecho de esta ecuación se llama **impulso** de la fuerza **F** que actúa sobre una partícula en el intervalo $\Delta t = t_f - t_i$. Impulso es un vector definido por

$$\mathbf{I} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\,dt \tag{9.9}$$

Impulso de una fuerza

La ecuación 9.8 es un importante enunciado conocido como el **teorema del impulso-cantidad de movimiento**:[3]

El impulso de la fuerza **F** que actúa sobre una partícula es igual al cambio en la cantidad de movimiento de la partícula.

Teorema del impulso-cantidad de movimiento

Este enunciado es equivalente a la segunda ley de Newton. De esta definición, vemos que impulso es una cantidad vectorial que tiene una magnitud igual al área bajo la curva de fuerza-tiempo, como se describe en la figura 9.4a. En esta figura, se supone que la fuerza varía en el tiempo en la forma general mostrada y es diferente de cero en el intervalo $\Delta t = t_f - t_i$. La dirección del vector de impulso es la misma que la dirección del cambio en la cantidad de movimiento. Impulso tiene las dimensiones de cantidad de movimiento, esto es, ML/T. Nótese que el impulso *no es* una propiedad de una partícula; más bien, es una medida del grado al que una fuerza externa cambia la cantidad de movimiento de la partícula. Por lo tanto, cuando decimos que se da un impulso a una partícula, queremos decir que la cantidad de movimiento se transfiere de un agente externo a esa partícula.

Debido a que la fuerza que imparte un impulso puede generalmente variar en el tiempo, es conveniente definir una fuerza promedio en el tiempo

$$\overline{\mathbf{F}} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\,dt \tag{9.10}$$

donde $\Delta t = t_f - t_i$. (Ésta es una aplicación del teorema del valor medio de cálculo.) Por lo tanto, podemos expresar la ecuación 9.9 como

$$\mathbf{I} = \overline{\mathbf{F}}\,\Delta t \tag{9.11}$$

Cortesía de Saab

Las bolsas de aire en automóviles han salvado incontables vidas en accidentes. La bolsa de aire aumenta el intervalo durante el cual el pasajero es llevado al reposo, lo cual reduce la fuerza (y lesiones resultantes) sobre el pasajero.

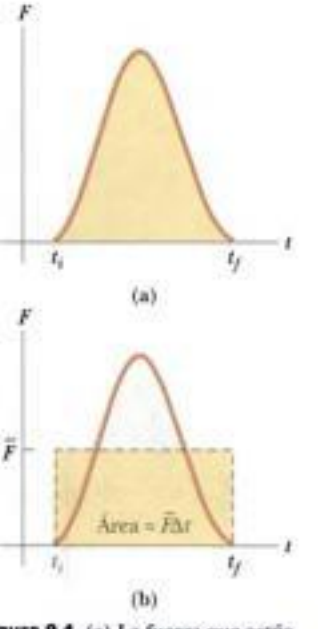


Figura 9.4 (a) La fuerza que actúa sobre una partícula puede variar en el tiempo. El impulso impartido a la partícula por la fuerza es el área bajo la curva de fuerza contra tiempo. (b) En el intervalo Δt, la fuerza promedio en el tiempo (línea horizontal interrumpida) da el mismo impulso a una partícula que la fuerza que varía en el tiempo, descrita en la parte (a).

[3] Aun cuando supusimos que sólo una fuerza actúa sobre la partícula, el teorema de impulso-cantidad de movimiento es válido cuando actúan varias fuerzas; en este caso, sustituimos **F** en la ecuación 9.8 con $\Sigma\mathbf{F}$.

Materiał chroniony prawem autorskim

Esta fuerza promedio en el tiempo, mostrada en la figura 9.4b, se puede interpretar como la fuerza constante que daría a la partícula en el intervalo Δt el mismo impulso que la fuerza variable en el tiempo da en este mismo intervalo.

En principio, si $\mathbf{F}$ se conoce como función del tiempo, el impulso se puede calcular de la ecuación 9.9. El cálculo se hace especialmente sencillo si la fuerza que actúa sobre la partícula es constante. En este caso, $\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{F}$ y la ecuación 9.11 se convierte en

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}\Delta t \tag{9.12}$$

En numerosas situaciones físicas usaremos lo que se llama **aproximación del impulso, en la que suponemos que una de las fuerzas ejercida sobre una partícula actúa durante un tiempo breve, pero es mucho mayor que cualquiera de las otras fuerzas presentes.** Esta aproximación es especialmente útil al tratar choques en los que la duración del choque es muy corta. Cuando se hace esta aproximación, la fuerza se denomina *fuerza impulsiva*. Por ejemplo, cuando una pelota de béisbol es golpeada con un bat, el tiempo del choque es de alrededor de 0.01 s y la fuerza promedio que el bat ejerce sobre la pelota en este tiempo, es por lo general de varios miles de newtons. Debido a que esta fuerza de contacto es mucho mayor que la magnitud de la fuerza gravitacional, la aproximación del impulso justifica que hagamos caso omiso de las fuerzas de gravitación ejercidas sobre la pelota y el bat. Cuando usamos esta aproximación, es importante recordar que $\mathbf{p}_i$ y $\mathbf{p}_f$ representan las cantidades de movimiento *inmediatamente* antes y después del choque, respectivamente. Por lo tanto, en cualquier situación en la que sea propio usar la aproximación de impulso, la partícula se mueve muy poco durante el choque.

Pregunta rápida 9.5 Dos objetos están en reposo sobre una superficie sin fricción. El objeto 1 tiene una mayor masa que el objeto 2. Cuando una fuerza constante se aplica al objeto 1, éste acelera una distancia d. La fuerza se retira del objeto 1 y se aplica al objeto 2. En el momento en que el objeto 2 ha acelerado la misma distancia d, ¿cuáles enunciados son verdaderos? (a) $p_1 < p_2$ (b) $p_1 = p_2$ (c) $p_1 > p_2$ (d) $K_1 < K_2$ (e) $K_1 = K_2$ (f) $K_1 > K_2$.

Pregunta rápida 9.6 Dos objetos están en reposo sobre una superficie sin fricción. El objeto 1 tiene una mayor masa que el objeto 2. Cuando una fuerza constante se aplica al objeto 1, éste acelera un intervalo Δt. La fuerza se retira del objeto 1 y se aplica al objeto 2. En el momento en que el objeto 2 ha acelerado el mismo intervalo Δt, ¿cuáles enunciados son verdaderos? (a) $p_1 < p_2$ (b) $p_1 = p_2$ (c) $p_1 > p_2$ (d) $K_1 < K_2$ (e) $K_1 = K_2$ (f) $K_1 > K_2$.

Pregunta rápida 9.7 En un automóvil, clasifique de mayor a menor el tablero, el cinturón de seguridad y la bolsa de aire en términos de (a) el impulso y (b) la fuerza promedio que comunican a un pasajero del asiento delantero durante un choque.

Ejemplo 9.3 Tiro de golf

Una pelota de golf de 50 g de masa es golpeada con un palo de golf (figura 9.5). La fuerza ejercida por el palo sobre la pelota varía de cero, en el instante antes del contacto, hasta algún valor máximo y luego de nuevo a cero cuando la bola se separa del palo. De este modo, la curva de fuerza-tiempo está cualitativamente descrita por la figura 9.4. Si se supone que la pelota recorre 200 m, estime la magnitud del impulso causado por el choque.

Solución Usemos Ⓐ para denotar la posición de la pelota cuando el palo hace contacto con ella, Ⓑ para denotar la posición de la pelota cuando el palo pierde contacto con la pelota, y Ⓒ para denotar la posición de la pelota al regresar al suelo. Si no se hace caso de la resistencia del aire, podemos usar la ecuación 4.14 para el alcance de un proyectil:

$$R = x_C = \frac{v_B^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_B$$

Supongamos que el ángulo de lanzamiento es θ_B es 45°, el ángulo que da el máximo alcance para cualquier velocidad de lanzamiento. Esta suposición da sen $2\theta_B = 1$, y la velocidad de lanzamiento de la pelota es

$$v_B = \sqrt{Rg} = \sqrt{(200\text{ m})(9.80\text{ m/s}^2)} = 44\text{ m/s}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Figura 9.5 (Ejemplo 9.3) Pelota de golf siendo golpeada por un palo. Nótese la deformación de la pelota debida a la gran fuerza ejercida por el palo.

Considerando valores inicial y final de la velocidad de la pelota durante el intervalo para el choque, $v_i = v_A = 0$ y $v_f = v_B$. Por lo tanto, la magnitud del impulso impartido a la pelota es

$$I = \Delta p = mv_B - mv_A = (50 \times 10^{-3}\ \text{kg})(44\ \text{m/s}) - 0$$

$$= 2.2\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si al estudiante se le pide hallar la fuerza promedio de la pelota durante el choque con el palo? ¿Puede determinar este valor?

Respuesta Con la información dada en el problema, no podemos hallar la fuerza promedio. Considerando la ecuación 9.11, necesitaríamos conocer el intervalo de la colisión para calcular la fuerza promedio. Si *suponemos* que el intervalo es 0.01 s, como lo fue para la pelota de béisbol en el análisis después de la ecuación 9.12, podemos estimar la magnitud de la fuerza promedio:

$$\bar{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{2.2\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}{0.01\ \text{s}} = 2 \times 10^2\ \text{N}$$

donde hemos conservado sólo una cifra significativa debido a nuestra aproximada estimación del intervalo.

Ejemplo 9.4 ¿Qué tan buenas son las defensas?

En una prueba particular de choque, un auto de 1 500 kg de masa choca con un muro, como se ve en la figura 9.6. Las velocidades inicial y final del auto son $\mathbf{v}_i = -15.0\hat{\mathbf{i}}$ m/s y $\mathbf{v}_f = 2.60\hat{\mathbf{i}}$ m/s, respectivamente. Si el choque dura 0.150 s, encuentre el impulso causado por el choque y la fuerza promedio ejercida sobre el auto.

Solución Supongamos que la fuerza ejercida por el muro sobre el auto es grande en comparación con otras fuerzas sobre el auto, de modo que podemos aplicar la aproximación del impulso. Además, notamos que la fuerza gravitacional y la fuerza normal ejercidas por el camino sobre el auto son perpendiculares al movimiento y, por lo tanto, no afectan la cantidad de movimiento horizontal.

Las cantidades de movimiento inicial y final del auto son

$$\mathbf{p}_i = m\mathbf{v}_i = (1\,500\ \text{kg})(-15.0\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s})$$
$$= -2.25 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$\mathbf{p}_f = m\mathbf{v}_f = (1\,500\ \text{kg})(2.60\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s})$$
$$= 0.39 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Por lo tanto, el impulso es igual a

Figura 9.6 (Ejemplo 9.4) (a) La cantidad de movimiento de este auto cambia como resultado de su choque con el muro. (b) En una prueba de choque, gran parte de la energía cinética inicial del auto se transforma en energía asociada con los daños al auto.

Materiał chroniony prawem autorskim

$$\mathbf{I} = \Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = 0.39 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\ \text{kg}\cdot\text{m/s} - (-2.25 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\ \text{kg}\cdot\text{m/s})$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{2.64 \times 10^4\hat{i}\ kg\cdot m/s}$$

La fuerza promedio ejercida por el muro sobre el auto es

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{2.64 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}{0.150\ \text{s}} = \mathbf{1.76 \times 10^5\hat{i}\ N}$$

En este problema, nótese que los signos de las velocidades indican la inversión de direcciones. ¿Qué describirían las matemáticas si las velocidades inicial y final tuvieran el mismo signo?

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si el auto no rebotara contra el muro? Suponga que la velocidad final del auto es cero y el intervalo del choque sigue siendo 0.150 s. ¿Representaría esto una fuerza mayor o menor del muro sobre el auto?

Respuesta En la situación original en la que el auto rebota, la fuerza ejercida por la pared sobre el auto hace dos cosas en el intervalo: (1) detiene el auto y (2) hace que se aleje del muro a 2.60 m/s después del choque. Si el auto no rebota, la fuerza hace sólo lo primero de esto, detener el auto. Esto va a requerir una fuerza *menor*.

Matemáticamente, en el caso de que el auto no rebote, el impulso es

$$\mathbf{I} = \Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = 0 - (-2.25 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}) = 2.25 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

La fuerza promedio ejercida por el muro sobre el auto es

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{2.25 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}{0.150\ \text{s}} = 1.50 \times 10^5\hat{\mathbf{i}}\ \text{N}$$

que es ciertamente menor que el valor previamente calculado, como dijimos conceptualmente.

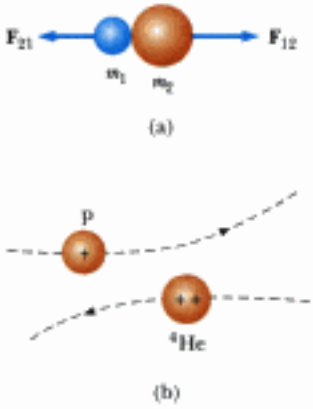


Figura 9.7 (a) Colisión entre dos objetos como resultado de un contacto directo. (b) "Colisión" entre dos partículas cargadas.

9.3 Colisiones en una dimensión

En esta sección usamos la ley de la conservación de la cantidad de movimiento lineal para describir lo que ocurre cuando chocan dos partículas. Usamos el término **colisión** para representar un evento durante el cual dos partículas se acercan entre sí e interactúan por medio de fuerzas. El intervalo durante el cual las velocidades de las partículas cambian de valores inicial a final, se supone que es corto. Se supone que las fuerzas de interacción son mucho mayores que cualesquiera otras fuerzas externas presentes, de modo que usamos la aproximación de impulso.

En una colisión puede intervenir un contacto físico entre dos objetos macroscópicos, como se describe en la figura 9.7a, pero la noción de lo que entendemos por colisión debe ser generalizada porque "contacto físico", en una escala submicroscópica, está mal definido y por lo tanto no tiene sentido. Para comprender esto, considere una colisión en una escala atómica (figura 9.7b), como es el caso de la colisión de un protón con una partícula alfa (el núcleo de un átomo de helio). Debido a que las partículas están cargadas positivamente ambas, se repelen entre sí debido a la enorme fuerza electrostática entre ellas a corta distancia y nunca entran en "contacto físico."

Cuando dos partículas de masas m_1 y m_2 chocan como se muestra en la figura 9.7, las fuerzas impulsivas pueden variar en el tiempo en formas complicadas, como la que se ve en la figura 9.4. Cualquiera que sea la complejidad del comportamiento en tiempo de las fuerzas de interacción; sin embargo, esta fuerza es interna al sistema de dos partículas. En consecuencia, las dos partículas forman un sistema aislado y la cantidad de movimiento del sistema debe conservarse. Por lo tanto, la cantidad total de movimiento de un sistema aislado justo antes de una colisión, es igual a la cantidad total de movimiento del sistema justo después de la colisión.

En contraste, la energía cinética total del sistema de partículas, puede o no conservarse, dependiendo del tipo de colisión. El hecho de que se conserve o no la energía cinética, se emplea para clasificar una colisión como *elástica* o *inelástica*.

Colisión elástica

Una **colisión elástica** entre dos objetos es una en la que la **energía cinética total (así como la cantidad total de movimiento) del sistema es la misma antes y después de la colisión.** Las colisiones entre ciertos objetos del mundo macroscópico, por ejemplo bolas de billar, son sólo *aproximadamente* elásticas porque ocurre alguna deformación y pérdida de energía cinética. Por ejemplo, podemos escuchar la colisión de una bola de billar, de modo que sabemos que parte de la energía está siendo transferida por el sonido lejos del sistema. ¡Una colisión elástica debe ser perfectamente silenciosa! Las colisiones *verdaderamente* elásticas se presentan entre partículas atómicas y subatómicas.

Colisión inelástica

Una **colisión inelástica** es aquella en la que **la energía cinética total del sistema no es la misma antes y después de la colisión (aun cuando se conserve la cantidad de movimiento del sistema).** Las colisiones inelásticas son de dos tipos. Cuando los objetos

Materiał chroniony prawem autorskim

que chocan se quedan pegados después de la colisión, como ocurre cuando un meteorito choca con la Tierra, la colisión se llama **perfectamente inelástica.** Cuando los objetos que chocan no se quedan pegados y se pierde parte de la energía cinética, como en el caso de una pelota de goma que choque con una superficie dura, la colisión se denomina **inelástica** (sin adverbio modificador). Cuando la pelota de goma choca con la superficie dura, parte de la energía cinética de la pelota se pierde cuando la pelota se deforma mientras está en contacto con la superficie.

En casi todas las colisiones, la energía cinética del sistema *no* se conserva porque parte de ella se convierte en energía interna y otra parte se aleja por medio de sonido. Las colisiones elásticas y perfectamente inelásticas son casos limitantes; la mayor parte de colisiones caen entre ellas.

En el resto de esta sección hablamos de colisiones en una dimensión y consideramos los dos casos extremos: colisiones perfectamente inelásticas y elásticas. La distinción importante entre estos dos tipos de colisiones, es que **la cantidad de movimiento del sistema se conserva en todas las colisiones, pero la energía cinética del sistema se conserva sólo en colisiones elásticas.**

Colisiones perfectamente inelásticas

Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades iniciales $\mathbf{v}_{1i}$ y $\mathbf{v}_{2i}$ a lo largo de la misma recta, como se ve en la figura 9.8. Las dos partículas chocan de frente, se quedan pegadas, y luego se mueven con alguna velocidad común $\mathbf{v}_f$ después de la colisión. Debido a que la cantidad de movimiento de un sistema aislado se conserva en *cualquier* colisión, podemos decir que la cantidad total de movimiento antes de la colisión es igual a la cantidad total de movimiento del sistema combinado después de la colisión:

$$m_1\mathbf{v}_{1i} + m_2\mathbf{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\mathbf{v}_f \tag{9.13}$$

Al despejar la velocidad final, tendremos:

$$\mathbf{v}_f = \frac{m_1\mathbf{v}_{1i} + m_2\mathbf{v}_{2i}}{m_1 + m_2} \tag{9.14}$$

Colisiones elásticas

Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades iniciales $\mathbf{v}_{1i}$ y $\mathbf{v}_{2i}$ a lo largo de la misma recta, como se ve en la figura 9.9. Las dos partículas chocan de frente y luego se alejan del lugar de la colisión con diferentes velocidades $\mathbf{v}_{1f}$ y $\mathbf{v}_{2f}$. Si la colisión es elástica, se conservan tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética del sistema. Por lo tanto, considerando velocidades a lo largo de la dirección horizontal de la figura 9.9, tenemos

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} \tag{9.15}$$

$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \tag{9.16}$$

Debido a que todas las velocidades de la figura 9.9 están ya sea a la izquierda o a la derecha, pueden estar representadas por las correspondientes rapidez junto con signos algebraicos que indican dirección. Indicaremos v como positiva si una partícula se mueve a la derecha y negativa si se mueve a la izquierda.

En un problema típico en donde aparezcan colisiones elásticas, hay dos cantidades desconocidas, y las ecuaciones 9.15 y 9.16 se pueden resolver simultáneamente para hallarlas. Un método alternativo, sin embargo, que comprende un poco de manipulación matemática de la ecuación 9.16, a veces simplifica este proceso. Para ver cómo es esto, cancelemos el factor $\frac{1}{2}$ en la ecuación 9.16 y escribámosla también como

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

y luego factorizamos ambos lados:

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) \tag{9.17}$$

A continuación, separemos los términos que contengan m_1 y m_2 de la ecuación 9.15 para obtener

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \tag{9.18}$$

¡ADVERTENCIA!

9.2 Colisiones inelásticas

Generalmente, es difícil analizar colisiones inelásticas a menos que se obtenga información adicional. Ésta aparece en la representación matemática al tener más incógnitas que ecuaciones.

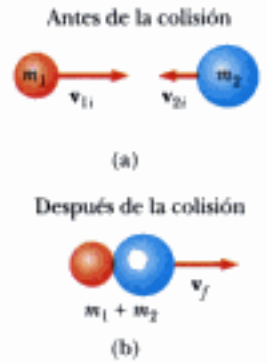


Figura activa 9.8 Representación esquemática de una colisión perfectamente inelástica de frente entre dos partículas: (a) antes de la colisión y (b) después de la colisión.

En el vínculo* Active Figures *en* http://www.pse6.com, *usted podrá ajustar las masas y velocidades de los objetos en colisión para ver el efecto sobre la velocidad final.

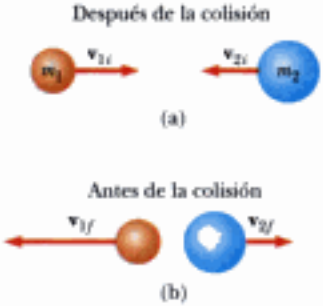


Figura activa 9.9 Representación esquemática de una colisión elástica de frente entre dos partículas (a) antes de la colisión y (b) después de la colisión.

En el vínculo* Active Figures *en* http://www.pse6.com, *usted podrá ajustar las masas y velocidades de los objetos en colisión para ver el efecto sobre las velocidades finales.

Materiał chroniony prawem autorskim

¡ADVERTENCIA!

9.3 No es una ecuación general

Hemos hecho algún trabajo para derivar la ecuación 9.19, pero recuerde que sólo se puede usar en una situación muy *específica*: una colisión elástica, en una dimensión, entre dos objetos. El concepto *general* es conservación de la cantidad de movimiento (y conservación de la energía cinética si la colisión es elástica) para un sistema aislado.

Para obtener nuestro resultado final, dividimos la ecuación 9.17 entre la ecuación 9.18 y obtenemos

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \tag{9.19}$$

Esta ecuación, en combinación con la ecuación 9.15, se puede usar para resolver problemas que traten de colisiones elásticas. Según la ecuación 9.19, la velocidad *relativa* de las dos partículas antes de la colisión, $v_{1i} - v_{2i}$, es igual al negativo de la velocidad relativa de ambas después de la colisión, $-(v_{1f} - v_{2f})$.

Suponga que se conocen las masas y velocidades iniciales de ambas partículas. Se pueden despejar las velocidades finales de las ecuaciones 9.15 y 9.19 en términos de las velocidades iniciales, porque hay dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2i} \tag{9.20}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{2i} \tag{9.21}$$

Es importante usar los signos apropiados para v_{1i} y v_{2i} en las ecuaciones 9.20 y 9.21. Por ejemplo, si la partícula 2 se mueve inicialmente a la izquierda, entonces v_{2i} es negativa.

Consideremos algunos casos especiales. Si $m_1 = m_2$, entonces las ecuaciones 9.20 y 9.21 nos muestran que $v_{1f} = v_{2i}$ y $v_{2f} = v_{1i}$. Esto es, las partículas intercambian velocidades si tienen masas iguales. Esto es aproximadamente lo que uno observa en colisiones de frente de bolas de billar: la bola tiradora se detiene y la bola golpeada se aleja de la colisión con la misma velocidad que tenía la bola tiradora.

Si la partícula 2 está inicialmente en reposo, entonces $v_{2i} = 0$, y las ecuaciones 9.20 y 9.21 se convierte en

Colisión elástica: partícula 2 inicialmente en reposo

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} \tag{9.22}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} \tag{9.23}$$

¡ADVERTENCIA!

9.4 Cantidad de movimiento y energía cinética en colisiones

La cantidad de movimiento de un sistema aislado se conserva en *todas* las colisiones. La energía cinética de un sistema aislado se conserva *sólo* en colisiones elásticas. ¿Por qué? Porque hay varios tipos de energía en los que la energía cinética se puede transformar, o ser transferida fuera del sistema (de modo que el sistema puede *no* estar aislado en términos de energía durante la colisión). Sin embargo, hay sólo un tipo de cantidad de movimiento.

Si m_1 es mucho mayor que m_2 y $v_{2i} = 0$, vemos de las ecuaciones 9.22 y 9.23 que $v_{1f} \approx v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 2v_{1i}$. Esto es, cuando una partícula muy pesada choca de frente con una muy liviana que inicialmente está en reposo, la partícula pesada continúa su movimiento sin alteración después del choque y la partícula ligera rebota con una rapidez igual a alrededor del doble de la rapidez inicial de la partícula pesada. Un ejemplo de esta colisión sería el de un átomo pesado en movimiento, por ejemplo uranio, chocando con un átomo ligero, como el hidrógeno.

Si m_2 es mucho mayor que m_1 y la partícula 2 está inicialmente en reposo, entonces $v_{1f} \approx -v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 0$. Esto es, cuando una partícula muy ligera choca de frente con una partícula muy pesada que está inicialmente en reposo, la partícula ligera invierte su velocidad y la partícula pesada permanece aproximadamente en reposo.

Pregunta rápida 9.8 En una colisión unidimensional perfectamente inelástica entre dos objetos, ¿qué condición única es necesaria para que *toda* la energía cinética inicial del sistema desaparezca después de la colisión? (a) Los objetos deben tener cantidades de movimiento con la misma magnitud pero direcciones opuestas. (b) Los objetos deben tener la misma masa. (c) Los objetos deben tener la misma velocidad. (d) Los objetos deben tener la misma rapidez, con vectores de velocidad en direcciones opuestas.

Pregunta rápida 9.9 Una pelota de tenis de mesa es lanzada a una bola de boliche estacionaria. La pelota de tenis de mesa sufre una colisión elástica en una dimensión y rebota hacia atrás a lo largo de la misma línea. Después de la colisión, en

Materiał chroniony prawem autorskim

comparación con la bola de boliche, la pelota de tenis de mesa tiene (a) una magnitud mayor de cantidad de movimiento y más energía cinética (b) una menor magnitud de cantidad de movimiento y más energía cinética (c) una mayor magnitud de cantidad de movimiento y menos energía cinética (d) una menor magnitud de cantidad de movimiento y menos energía cinética (e) la misma magnitud de cantidad de movimiento y la misma energía cinética.

Ejemplo 9.5 Calmante del estrés del ejecutivo

En la figura 9.10 se ilustra un ingenioso aparato que ilustra la conservación de la cantidad de movimiento y energía cinética. Está formado por cinco esferas duras idénticas sostenidas por cuerdas de longitudes iguales. Cuando se tira de la esfera 1 y se suelta, después de la colisión casi elástica entre ella y la esfera 2, la esfera 5 se separa como se ve en la figura 9.10 b. Si las esferas 1 y 2 son jaladas y soltadas, las esferas 4 y 5 oscilarán hacia fuera, y así sucesivamente. ¿Es siempre posible que cuando se suelte la esfera 1, las esferas 4 y 5 oscilarán hacia fuera en el lado opuesto y se moverán a la mitad de la rapidez de la esfera 1, como en la figura 9.10c?

Solución No, ese movimiento nunca puede ocurrir si suponemos que las colisiones son elásticas. La cantidad de movimiento del sistema antes de la colisión es mv, donde m es la masa de la esfera 1 y v es la rapidez inmediatamente antes de la colisión. Después de la colisión, tendríamos dos esferas, cada una de masa m moviéndose con rapidez $v/2$. La cantidad total de movimiento del sistema después de la colisión sería $m(v/2) + m(v/2) = mv$. Por lo tanto, se conserva la cantidad de movimiento del sistema. No obstante, la energía cinética inmediatamente antes de la colisión es $K_i = \frac{1}{2}mv^2$ y la energía cinética después de la colisión es $K_f = \frac{1}{2}m(v/2)^2 + \frac{1}{2}m(v/2)^2 = \frac{1}{4}mv^2$. En consecuencia, la energía cinética del sistema *no se* conserva. La única forma de que se conserven la cantidad de movimiento y la energía cinética, es que una esfera se separe cuando se suelte una esfera, dos esferas se separen cuando dos se suelten, y así sucesivamente.

¿Qué pasaría si? Considere lo que pasaría si las esferas 4 y 5 se pegan de manera que deban moverse juntas. Ahora, ¿qué pasa cuando la esfera 1 se jala y se suelta?

Respuesta Ahora estamos forzando las esferas 4 y 5 a separarse juntas. Hemos dicho que no podemos conservar la cantidad de movimiento y la energía en este caso. Sin embargo, supusimos que la esfera 1 se detuvo después de golpear la esfera 2. ¿Qué pasa si no hacemos esta suposición? Considere las ecuaciones de conservación con la suposición de que la esfera 1 se mueve después de la colisión. Para la conservación de la cantidad de movimiento,

$$p_i = p_f$$

$$mv_{1i} = mv_{1f} + 2mv_{4,5f}$$

donde $v_{4,5f}$ se refiere a la rapidez final de la combinación de la esfera 4 y la esfera 5. La conservación de la energía cinética nos da

$$K_i = K_f$$

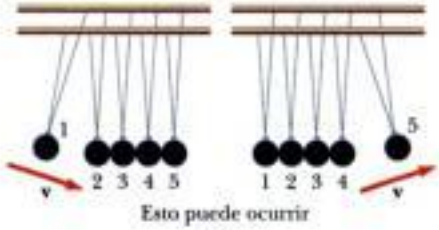
$$\frac{1}{2}mv_{1i}^2 = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}(2m)v_{4,5f}^2$$

Al combinar estas ecuaciones, encontramos que

$$v_{4,5f} = \frac{2}{3}v_{1i} \qquad v_{1f} = -\frac{1}{3}v_{1i}$$

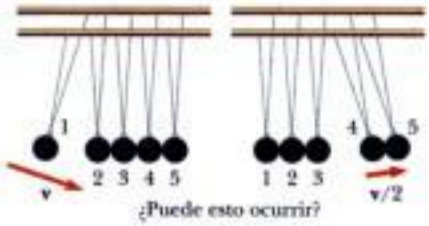
En consecuencia, las esferas 4 y 5 se separan juntas y la esfera 1 rebota de la colisión con un tercio de su rapidez original.

(a)



Esto puede ocurrir

(b)



¿Puede esto ocurrir?

(c)

Figura 9.10 (Ejemplo 9.5) Calmante del estrés del ejecutivo.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 9.6 ¡Lleve seguro contra choques!

Un auto de 1 800 kg detenido frente a un semáforo, es golpeado en la parte de atrás por un auto de 900 kg, y los dos autos quedan pegados y en movimiento a lo largo de la misma trayectoria que el auto originalmente en movimiento. Si el auto más pequeño se moviera a 20.0 m/s antes de la colisión, ¿cuál es la velocidad de los autos pegados después de la colisión?

Solución La frase "quedan pegados" nos dice que ésta es una colisión perfectamente inelástica. Podemos calcular que la rapidez final es menor a 20.0 m/s, que es la rapidez inicial del auto más pequeño. La cantidad total de movimiento del sistema (los dos autos) antes de la colisión debe ser igual a la cantidad total de movimiento inmediatamente después de la colisión, porque la cantidad de movimiento de un sistema aislado se conserva en cualquier tipo de colisión. La magnitud de la cantidad total de movimiento del sistema antes de la colisión, es igual a la del auto más pequeño, porque el auto más grande está inicialmente en reposo:

$$p_i = m_1 v_i = (900\ \text{kg})(20.0\ \text{m/s}) = 1.80 \times 10^4\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Después de la colisión, la magnitud de la cantidad de movimiento de los autos pegados es

$$p_f = (m_1 + m_2)v_f = (2\,700\ \text{kg})v_f$$

Igualando la ecuación de las cantidades de movimiento inicial y final del sistema, y despejar v_f, que es la velocidad final de los autos pegados, tenemos

$$v_f = \frac{p_i}{m_1 + m_2} = \frac{1.80 \times 10^4\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}{2\,700\ \text{kg}} = \mathbf{6.67\ m/s}$$

Debido a que la velocidad final es positiva, la dirección de la velocidad final es la misma que la velocidad del auto inicialmente en movimiento.

¿Qué pasaría si? Suponga que invertimos las masas de los autos: un auto estacionario de 900 kg es golpeado por un auto de 1 800 kg en movimiento. ¿Es igual la rapidez final que antes?

Respuesta Intuitivamente, podemos calcular que la rapidez final será más alta con base en experiencias comunes al conducir autos. Matemáticamente, éste debe ser el caso, porque el sistema tiene una cantidad de movimiento mayor si el auto inicialmente en movimiento es el más pesado. Al despejar la nueva velocidad final, encontramos que

$$v_f = \frac{p_i}{m_1 + m_2} = \frac{(1\,800\ \text{kg})(20.0\ \text{m/s})}{2\,700\ \text{kg}} = 13.3\ \text{m/s}$$

que es en verdad más alta que la velocidad final previa.

Ejemplo 9.7 El péndulo balístico

El péndulo balístico (figura 9.11) es un aparato empleado para medir la rapidez de un proyectil en rápido movimiento, como es una bala. Una bala de masa m_1 es disparada hacia un bloque grande de madera de masa m_2 suspendido de unos alambres livianos. La bala se incrusta en el bloque, y todo el sistema oscila hasta una altura h. ¿Cómo podemos determinar la rapidez de la bala a partir de la medición de h?

Solución La figura 9.11a ayuda a conceptualizar la situación. Sea la configuración Ⓐ la bala y el bloque antes de la colisión, y la configuración Ⓑ sea la bala y el bloque inmediatamente después de chocar. La bala y el bloque forman un sistema aislado, de modo que podemos clasificar la colisión entre ellos como un problema de conservación de la cantidad de movimiento. La colisión es perfectamente inelástica. Para analizar la colisión, tomamos nota que la ecuación 9.14 da la rapidez del sistema justo después de la colisión cuando suponemos la aproximación de impulso. Al observar que $v_{2A} = 0$, la ecuación 9.14 se convierte en

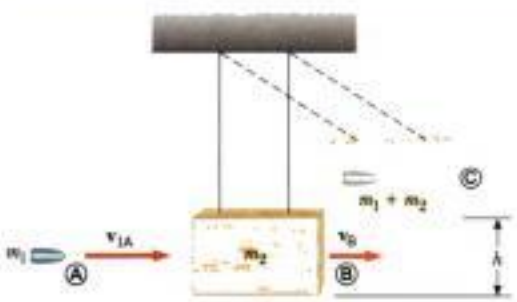
$$(1) \qquad v_B = \frac{m_1 v_{1A}}{m_1 + m_2}$$

Para el proceso durante el cual la combinación bala-bloque oscila hacia arriba a una altura h (que termina en la configuración C, nos concentramos en un sistema *diferente* la bala, el bloque y la Tierra. Éste es un sistema aislado, de modo que clasificamos esta parte del movimiento como un problema de conservación de la energía mecánica:

$$K_B + U_B = K_C + U_C$$

Comenzamos por analizar el problema al hallar el total de energía cinética del sistema inmediatamente después de la colisión:

$$(2) \qquad K_B = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_B^2$$



(a)

(b)

Figura 9.11 (Ejemplo 9.7) (a) Diagrama de un péndulo balístico. Nótese que $\mathbf{v}_{1A}$ es la velocidad de la bala justo antes de la colisión y $\mathbf{v}_B$ es la velocidad del sistema bala-bloque justo después de la colisión perfectamente inelástica. (b) Fotografía de destellos múltiples de un péndulo balístico empleada en el laboratorio.

Materiał chroniony prawem autorskim

Sustituyendo el valor de v_B de la ecuación (1) en la ecuación (2) da

$$K_B = \frac{m_1^2 v_{1A}^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Esta energía cinética inmediatamente después de la colisión es *menor* que la energía cinética inicial de la bala, como se esperaba en una colisión inelástica.

Definimos la energía potencial gravitacional del sistema para la configuración Ⓑ como cero. Por lo tanto, $U_B = 0$ mientras que $U_C = (m_1 + m_2)gh$. La conservación de la energía lleva ahora a

$$\frac{m_1^2 v_{1A}^2}{2(m_1 + m_2)} + 0 = 0 + (m_1 + m_2)gh$$

Al despejar v_{1A}, obtenemos

$$v_{1A} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)\sqrt{2gh}$$

Para finalizar este problema, nótese que teníamos que resolver este problema en dos pasos. Cada paso comprendía un sistema diferente y un principio de conservación diferente. Debido a que la colisión se supuso como perfectamente inelástica, parte de la energía mecánica se convirtió en energía interna. Hubiera sido *incorrecto* igualar la energía cinética inicial de la bala entrante con la energía potencial gravitacional final de la combinación formada por la bala, el bloque y la Tierra.

Ejemplo 9.8 Choque de dos cuerpos con un resorte

Un bloque de masa $m_1 = 1.60$ kg, inicialmente en movimiento a la derecha con una rapidez de 4.00 m/s sobre una pista horizontal sin fricción, choca con un resorte unido a un segundo bloque de masa $m_2 = 2.10$ kg inicialmente en movimiento a la izquierda con una rapidez de 2.50 m/s, como se ve en la figura 9.12a. La constante de resorte es 600 N/m.

(A) Encuentre las velocidades de los dos bloques después de la colisión.

Solución Debido a que la fuerza del resorte es conservativa, no hay energía cinética que se convierta en energía interna durante la compresión del resorte. Si hacemos caso omiso de cualquier sonido producido cuando el bloque golpea al resorte, podemos modelar la colisión como elástica. La ecuación 9.15 nos da

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$(1.60\text{ kg})(4.00\text{ m/s}) + (2.10\text{ kg})(-2.50\text{ m/s}) = (1.60\text{ kg})v_{1f} + (2.10\text{ kg})v_{2f}$$

$$(1) \qquad 1.15\text{ kg}\cdot\text{m/s} = (1.60\text{ kg})v_{1f} + (2.10\text{ kg})v_{2f}$$

La ecuación 9.19 nos da

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$$

$$4.00\text{ m/s} - (-2.50\text{ m/s}) = -v_{1f} + v_{2f}$$

$$(2) \qquad 6.50\text{ m/s} = -v_{1f} + v_{2f}$$

Al multiplicar la ecuación (2) por 1.60 kg tendremos

$$(3) \qquad 10.4\text{ kg}\cdot\text{m/s} = -(1.60\text{ kg})v_{1f} + (1.60\text{ kg})v_{2f}$$

Sumar las ecuaciones (1) y (3) nos permite hallar v_{2f}:

$$11.55\text{ kg}\cdot\text{m/s} = (3.70\text{ kg})v_{2f}$$

$$v_{2f} = \frac{11.55\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{3.70\text{ kg}} = \mathbf{3.12\text{ m/s}}$$

Ahora, la ecuación (2) nos permite hallar v_{1f}

$$6.50\text{ m/s} = -v_{1f} + 3.12\text{ m/s}$$

$$v_{1f} = \mathbf{-3.38\text{ m/s}}$$

(B) Durante la colisión, en el instante en que el bloque 1 se mueve a la derecha con una velocidad de +3.00 m/s, como en la figura 9.12b, determine la velocidad del bloque 2.

Solución Debido a que la cantidad de movimiento del sistema de dos bloques se conserva *en toda la* colisión para el sistema de dos bloques, tenemos, para *cualquier* instante durante la colisión,

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Escogemos que el instante final sea aquél en el que el bloque 1 se mueva con una velocidad de +3.00 m/s:

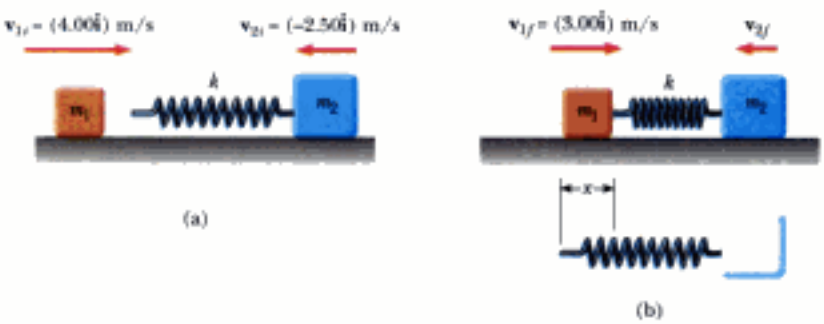


Figura 9.12 (Ejemplo 9.8) Un bloque en movimiento se aproxima a un segundo bloque en movimiento que está unido a un resorte.

Materiał chroniony prawem autorskim

$$(1.60\text{ kg})(4.00\text{ m/s}) + (2.10\text{ kg})(-2.50\text{ m/s}) = (1.60\text{ kg})(3.00\text{ m/s}) + (2.10\text{ kg})v_{2f}$$

$$v_{2f} = \mathbf{-1.74\text{ m/s}}$$

El valor negativo para v_{2f} significa que el bloque 2 está todavía moviéndose a la izquierda en el instante que estamos considerando.

(C) Determine la distancia que el resorte se comprime en este instante.

Solución Para determinar la distancia que el resorte se comprime, mostrada como x en la figura 9.12b, podemos usar el principio de conservación de la energía mecánica para el sistema del resorte y dos bloques, porque no hay fricción u otras fuerzas no conservativas que actúen dentro del sistema. Escogemos que la configuración inicial del sistema sea la existente inmediatamente antes que el bloque 1 golpee al resorte y la configuración final que sea cuando el bloque 1 se mueva a la derecha a 3.00 m/s. En consecuencia, tenemos

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2i}^2 + 0 = \tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2f}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

Al sustituir los valores dados y el resultado de la parte (B) en esta expresión, tendremos

$$x = \mathbf{0.173\text{ m}}$$

(D) ¿Cuál es la compresión *máxima* del resorte durante la colisión?

Solución La máxima compresión ocurriría cuando los dos bloques se muevan con la misma velocidad. La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para el sistema se puede escribir como

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f$$

donde el instante inicial es precisamente antes de la colisión y el instante final es cuando los bloques se muevan con la misma velocidad v_f. Al despejar v_f,

$$v_f = \frac{m_1v_{1i} + m_2v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{(1.60\text{ kg})(4.00\text{ m/s}) + (2.10\text{ kg})(-2.50\text{ m/s})}{1.60\text{ kg} + 2.10\text{ kg}} = 0.311\text{ m/s}$$

Ahora, aplicamos conservación de la energía mecánica entre estos dos instantes como en la parte (C):

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2i}^2 + 0 = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

Sustituyendo los valores dados en esta expresión da

$$x = \mathbf{0.253\text{ m}}$$

Ejemplo 9.9 Reducción de velocidad de neutrones por medio de colisiones

En un reactor nuclear, se producen neutrones cuando un átomo se divide en un proceso llamado *fisión*. Estos neutrones se mueven a unos 10^7 m/s y deben reducir su velocidad a unos 10^3 m/s antes que tomen parte en otro evento de fisión. Se reduce su velocidad al hacerlos pasar por un material sólido o líquido llamado *moderador*. El proceso de reducción de velocidad comprende colisiones elásticas. Demuestre que un neutrón puede perder la mayor parte de su energía cinética si choca elásticamente con un moderador que contiene núcleos ligeros, como el deuterio (en "agua pesada," D_2O) o carbono (en grafito).

Solución Supongamos que el núcleo moderador de masa m_m está en reposo inicialmente y que un neutrón de masa m_n y rapidez inicial v_{ni} choca de frente con él. Debido a que éstas son colisiones elásticas, se conservan la cantidad de movimiento y la energía cinética del sistema formado por el neutrón y el núcleo. Por lo tanto, las ecuaciones 9.22 y 9.23 se pueden aplicar a la colisión de frente de un neutrón con un núcleo moderador. Podemos representar este proceso con un dibujo como el de la figura 9.9 con $\mathbf{v}_{2i} = 0$.

La energía cinética inicial del neutrón es

$$K_{ni} = \tfrac{1}{2}m_nv_{ni}^2$$

Después de la colisión, el neutrón tiene una energía cinética de $\frac{1}{2}m_nv_{nf}^2$, y podemos sustituir en ésta el valor de v_{nf} dado por la ecuación 9.22:

$$K_{nf} = \tfrac{1}{2}m_nv_{nf}^2 = \tfrac{1}{2}m_n\left(\frac{m_n - m_m}{m_n + m_m}\right)^2 v_{ni}^2$$

Por lo tanto, la fracción f_n de la energía cinética inicial poseída por el neutrón después de la colisión es

$$(1) \qquad f_n = \frac{K_{nf}}{K_{ni}} = \left(\frac{m_n - m_m}{m_n + m_m}\right)^2$$

De este resultado, vemos que la energía cinética final del neutrón es pequeña cuando m_m es cercana a m_n y cero cuando $m_n = m_m$.

Podemos usar la ecuación 9.23, que da la rapidez final de la partícula que estaba inicialmente en reposo, para calcular la energía cinética del núcleo moderador después de la colisión:

$$K_{mf} = \tfrac{1}{2}m_mv_{mf}^2 = \frac{2m_n^2m_m}{(m_n + m_m)^2}v_{ni}^2$$

Por lo tanto, la fracción f_m de la energía cinética inicial transferida al núcleo moderador es

$$(2) \qquad f_m = \frac{K_{mf}}{K_{ni}} = \frac{4m_nm_m}{(m_n + m_m)^2}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Debido a que se conserva la energía cinética total del sistema, la ecuación (2) también se puede obtener de la ecuación (1) con la condición de que $f_n + f_m = 1$, de modo que $f_m = 1 - f_n$.

Suponga que se utiliza agua pesada para el moderador. Para colisiones de los neutrones con núcleos de deuterio en $D_2O(m_m = 2m_n)$, $f_n = 1/9$ y $f_m = 8/9$. Esto es, 89% de la energía cinética del neutrón se transfiere al núcleo de deuterio. En la práctica, la eficiencia del moderador se reduce porque las colisiones de frente son muy poco probables.

¿Cómo difieren los resultados cuando se usa grafito (^{12}C, como el del plomo de lápices) como moderador?

9.4 Colisiones en dos dimensiones

En la sección 9.1 demostramos que la cantidad de movimiento de un sistema de dos partículas se conserva cuando el sistema está aislado. Para cualquier colisión de dos partículas, este resultado implica que se conserva la cantidad de movimiento en cada una de las direcciones x, y y z. Un importante subconjunto de colisiones tiene lugar en un plano. El juego de billar es un conocido ejemplo que comprende colisiones múltiples de objetos que se mueven en una superficie de dos dimensiones. Para estas colisiones en dos dimensiones, obtenemos dos ecuaciones componentes para la conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

donde usamos tres subíndices en estas ecuaciones para representar, respectivamente, (1) la identificación del objeto, (2) valores inicial y final, y (3) el componente de velocidad.

Consideremos un problema en dos dimensiones en el que la partícula 1 de masa m_1 choca con la partícula 2 de masa m_2, donde la partícula 2 está inicialmente en reposo, como en la figura 9.13. Después de la colisión, la partícula 1 se mueve a un ángulo θ con respecto a la horizontal y la partícula 2 se mueve a un ángulo ϕ con respecto a la horizontal. Ésta se llama colisión *tangencial*. Al aplicar la ley de la conservación de la cantidad de movimiento en forma de componentes y notar que es cero el componente y inicial de la cantidad de movimiento del sistema de dos partículas, obtenemos

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi \tag{9.24}$$

$$0 = m_1 v_{1f} \operatorname{sen}\theta - m_2 v_{2f} \operatorname{sen}\phi \tag{9.25}$$

donde el signo menos de la ecuación 9.25 proviene del hecho que después de la colisión, la partícula 2 tiene un componente y de velocidad que es hacia abajo. Ahora tenemos dos ecuaciones independientes. Mientras no más de dos de las siete cantidades de las ecuaciones 9.24 y 9.25 sean incógnitas, podemos resolver el problema.

Si la colisión es elástica, podemos también usar la ecuación 9.16 (conservación de la energía cinética) con $v_{2i} = 0$ para dar

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 \tag{9.26}$$

¡ADVERTENCIA!

9.5 No use la ecuación 9.19

La ecuación 9.19, que relaciona las velocidades inicial y final relativas de dos objetos en colisión, es válida sólo para colisiones elásticas en una dimensión. No use esa ecuación cuando analice colisiones en dos dimensiones.

(a) Antes de la colisión (b) Después de la colisión

Figura activa 9.13 Colisión tangencial elástica entre dos partículas.

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, usted podrá ajustar la rapidez y posición de la partícula azul y las masas de ambas partículas para ver los efectos.

Materiał chroniony prawem autorskim

Al conocer la rapidez inicial de la partícula 1 y ambas masas, nos quedan cuatro incógnitas (v_{1f}, v_{2f}, θ y ϕ). Como tenemos sólo tres ecuaciones, una de las cuatro cantidades restantes debe darse si hemos de determinar el movimiento después de la colisión a partir sólo de principios de conservación.

Si la colisión es inelástica, *no se* conserva la energía cinética y la ecuación 9.26 *no aplica*.

SUGERENCIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Colisiones en dos dimensiones

Se recomienda el siguiente procedimiento al tratar problemas en donde aparezcan colisiones en dos dimensiones entre dos objetos:

- Establezca un sistema de coordenadas y defina sus velocidades con respecto a ese sistema. Por lo general es conveniente hacer que el eje x coincida con una de las velocidades iniciales.
- En su bosquejo del sistema de coordenadas, trace y aplique leyendas a todos los vectores de velocidad e incluya toda la información dada.
- Escriba expresiones para los componentes x y y de la cantidad de movimiento de cada objeto antes y después de la colisión. Recuerde incluir los signos apropiados para los componentes de los vectores de velocidad.
- Escriba expresiones para la cantidad total de movimiento del sistema en la dirección x antes y después de la colisión e iguale las dos. Repita este procedimiento para la cantidad total de movimiento del sistema en la dirección y.
- Si la colisión es inelástica, *no se* conserva la energía cinética del sistema, y es probable se requiera información adicional. Si la colisión es *perfectamente* inelástica, las velocidades finales de los dos objetos son iguales. De las ecuaciones de cantidad de movimiento despeje las cantidades incógnitas.
- Si la colisión es *elástica*, se conserva la energía cinética del sistema y el estudiante puede igualar la energía cinética total antes de la colisión, y la energía cinética total después de la colisión, para obtener una relación adicional entre las velocidades.

Ejemplo 9.10 Colisión en un crucero

Un auto de 1 500 kg que viaja hacia el este con rapidez de 25.0 m/s, choca en un crucero con una camioneta de 2 500 kg que viaja al norte a una rapidez de 20.0 m/s, como se muestra en la figura 9.14. Encuentre la dirección y magnitud de la velocidad de los vehículos chocados después de la colisión, suponiendo que los vehículos experimentan una colisión perfectamente inelástica (esto es, se quedan pegados).

Solución Escojamos que la dirección al este se encuentre a lo largo de la dirección x positiva y el norte a lo largo de la dirección y positiva. Antes de la colisión, el único objeto que tiene cantidad de movimiento en la dirección x es el auto. En consecuencia, la magnitud de la cantidad total inicial de movimiento del sistema (auto más camioneta) en la dirección x es

$$\sum p_{xi} = (1\,500\text{ kg})(25.0\text{ m/s}) = 3.75 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Supongamos que los vehículos chocados se mueven a un ángulo θ y rapidez v_f después de la colisión. La magnitud de la cantidad total de movimiento en la dirección x después de la colisión es

$$\sum p_{xf} = (4\,000\text{ kg})v_f \cos\theta$$

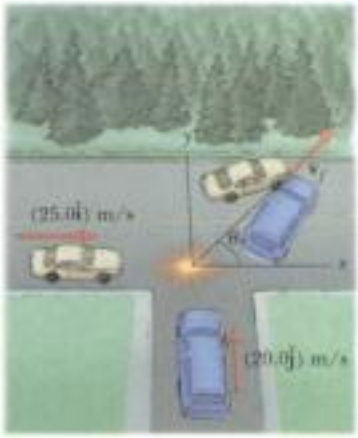


Figura 9.14 (Ejemplo 9.10) Un auto en dirección al este choca con una camioneta que se dirige al norte.

Materiał chroniony prawem autorskim

Debido a que la cantidad total de movimiento en la dirección x se conserva, podemos igualar estas dos ecuaciones para obtener

$$(1) \qquad 3.75 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m/s} = (4\,000 \text{ kg})v_f \cos\theta$$

Del mismo modo, la cantidad total inicial de movimiento del sistema en la dirección y es la de la camioneta, y la magnitud de esta cantidad de movimiento es $(2\,500 \text{ kg})(20.0 \text{ m/s}) = 5.00 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$. Al aplicar conservación de la cantidad de movimiento a la dirección y, tenemos

$$\sum p_{yi} = \sum p_{yf}$$

$$(2) \qquad 5.00 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m/s} = (4\,000 \text{ kg})v_f \operatorname{sen}\theta$$

Si dividimos la ecuación (2) entra la ecuación (1), obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{5.00 \times 10^4}{3.75 \times 10^4} = 1.33$$

$$\theta = \mathbf{53.1°}$$

Cuando este ángulo se sustituye en la ecuación (2), el valor de v_f es

$$v_f = \frac{5.00 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m/s}}{(4\,000 \text{ kg})\operatorname{sen} 53.1°} = \mathbf{15.6 \text{ m/s}}$$

Podría ser ilustrativo que el estudiante dibuje los vectores de cantidad de movimiento de cada vehículo antes de la colisión y los dos vehículos juntos después de la colisión.

Ejemplo 9.11 Colisión de un protón-protón

Un protón choca elásticamente con otro protón que está inicialmente en reposo. El protón entrante tiene una rapidez inicial de 3.50×10^5 m/s y sufre una colisión tangencial con el segundo protón, como se ve en la figura 9.13. (A cortas distancias, los protones ejercen una fuerza de repulsión electrostática mutua.) Después de la colisión, un protón se aleja a un ángulo de 37.0° respecto de la dirección original de movimiento, y el segundo se desvía a un ángulo ϕ con respecto del mismo eje. Encuentre la rapidez final de los dos protones y el ángulo ϕ.

Solución El par de protones es un sistema aislado. La cantidad de movimiento y la energía cinética del sistema se conservan en esta colisión elástica tangencial. Como $m_1 = m_2$, $\theta = 37.0°$, y no dicen que $v_{1i} = 3.50 \times 10^5$ m/s, las ecuaciones 9.24, 9.25 y 9.26 se convierten en

$$(1) \qquad v_{1f} \cos 37° + v_{2f} \cos\phi = 3.50 \times 10^5 \text{ m/s}$$

$$(2) \qquad v_{1f} \operatorname{sen} 37.0° - v_{2f} \operatorname{sen}\phi = 0$$

$$(3) \qquad v_{1f}^2 + v_{2f}^2 = (3.50 \times 10^5 \text{ m/s})^2 = 1.23 \times 10^{11} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Rescribimos las ecuaciones (1) y (2) como sigue:

$$v_{2f} \cos\phi = 3.50 \times 10^5 \text{ m/s} - v_{1f} \cos 37.0°$$

$$v_{2f} \operatorname{sen}\phi = v_{1f} \operatorname{sen} 37.0°$$

Ahora elevamos al cuadrado estas dos ecuaciones y las sumamos:

$$v_{2f}^2 \cos^2\phi + v_{2f}^2 \operatorname{sen}^2\phi = 1.23 \times 10^{11} \text{ m}^2/\text{s}^2 - (7.00 \times 10^5 \text{ m/s})v_{1f} \cos 37.0° + v_{1f}^2 \cos^2 37.0° + v_{1f}^2 \operatorname{sen}^2 37.0°$$

$$v_{2f}^2 = 1.23 \times 10^{11} - (5.59 \times 10^5)v_{1f} + v_{1f}^2$$

Al sustituir en la ecuación (3) tendremos

$$v_{1f}^2 + [1.23 \times 10^{11} - (5.59 \times 10^5)v_{1f} + v_{1f}^2] = 1.23 \times 10^{11}$$

$$2v_{1f}^2 - (5.59 \times 10^5)v_{1f} = (2v_{1f} - 5.59 \times 10^5)v_{1f} = 0$$

Una posibilidad para la solución de esta ecuación es $v_{1f} = 0$, que corresponde a una colisión de frente; el primer protón se detiene y el segundo continúa con la misma rapidez en la misma dirección. Esto no es lo que queremos. La otra posibilidad es

$$2v_{1f} - 5.59 \times 10^5 = 0 \longrightarrow v_{1f} = \mathbf{2.80 \times 10^5 \text{ m/s}}$$

De la ecuación (3),

$$v_{2f} = \sqrt{1.23 \times 10^{11} - v_{1f}^2} = \sqrt{1.23 \times 10^{11} - (2.80 \times 10^5)^2} = 2.12 \times 10^5 \text{ m/s}$$

y de la ecuación (2),

$$\phi = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{v_{1f} \operatorname{sen} 37.0°}{v_{2f}}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{(2.80 \times 10^5) \operatorname{sen} 37.0°}{2.12 \times 10^5}\right) = \mathbf{53.0°}$$

Es interesante observar que $\theta + \phi = 90°$. Este resultado *no es* accidental. Siempre que dos objetos de igual masa choquen elásticamente en una colisión tangencial y uno de ellos está inicialmente en reposo, sus velocidades finales son perpendiculares entre sí. El siguiente ejemplo ilustra este punto en más detalle.

Ejemplo 9.12 Colisión de bolas de billar

En un juego de billar, un jugador desea meter una bola blanca en una buchaca de esquina, como se muestra en la figura 9.15. Si el ángulo a la buchaca de esquina es de 35°, ¿a qué ángulo θ se desvía la bola tiradora? Suponga que la fricción y el movimiento rotacional no son importantes y que la colisión es elástica. También suponga que las bolas de billar tienen la misma masa m.

Solución Sea la bola 1 la bola tiradora y la bola 2 sea la bola blanco. Debido a que la bola blanco está inicialmente en reposo, la conservación de la energía cinética (ecuación 9.16) para el sistema de dos bolas da

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$

Pero $m_1 = m_2 = m$, de modo que

Materiał chroniony prawem autorskim

$$(1) \qquad v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$$

Al aplicar conservación de la cantidad de movimiento a la colisión en dos dimensiones tendremos

$$(2) \qquad m_1\mathbf{v}_{1i} = m_1\mathbf{v}_{1f} + m_2\mathbf{v}_{2f}$$

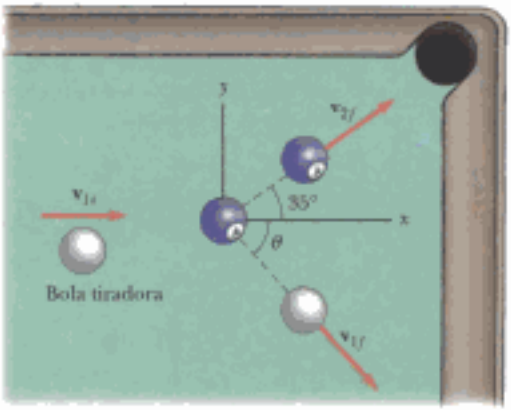


Figura 9.15 (Ejemplo 9.12) La bola tiradora (blanca) golpea la bola número 4 (azul) y la envía hacia la buchaca de la esquina.

Nótese que como $m_1 = m_2 = m$, las masas también se cancelan en la ecuación (2). Si elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación (2) y usamos la definición del producto punto de dos vectores de la sección 7.3, obtenemos

$$v_{1i}^2 = (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}) \cdot (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}) = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2f}$$

Como el ángulo entre $\mathbf{v}_{1f}$ y $\mathbf{v}_{2f}$ es $\theta + 35°$, $\mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2f} = v_{1f}v_{2f}\cos(\theta + 35°)$, y por lo tanto,

$$(3) \qquad v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2v_{1f}v_{2f}\cos(\theta + 35°)$$

Al restar la ecuación (1) de la (3) tendremos

$$0 = 2v_{1f}v_{2f}\cos(\theta + 35°)$$

$$0 = \cos(\theta + 35°)$$

$$\theta + 35° = 90° \quad \text{o} \quad \boldsymbol{\theta = 55°}$$

Este resultado muestra que siempre que dos masas iguales experimenten una colisión elástica tangencial y una de ellas esté inicialmente en reposo, se mueven en direcciones perpendiculares después de la colisión. La misma física describe dos situaciones muy diferentes, protones en el ejemplo 9.11 y bolas de billar en este ejemplo.

9.5 El centro de masa

En esta sección describimos el movimiento general de un sistema mecánico en términos de un punto específico llamado **centro de masa** del sistema. El sistema mecánico puede ser ya sea un grupo de partículas, como es un conjunto de átomos en un recipiente, o un cuerpo rígido, como es un gimnasta que salta por el aire. Veremos que el centro de masa del sistema se mueve como si toda la masa del sistema estuviera concentrada en ese punto. Además, si la fuerza externa resultante sobre el sistema es $\Sigma\mathbf{F}_{ext}$ y la masa total del sistema es M, el centro de masa se mueve con una aceleración dada por $\mathbf{a} = \Sigma\mathbf{F}_{ext}/M$. Esto es, el sistema se mueve como si la fuerza externa resultante se aplicara a una sola partícula de masa M localizada en el centro de masa. Este comportamiento es independiente de otro movimiento, como es rotación o vibración del sistema. Éste es el *modelo de partícula* que fue introducido en el capítulo 2.

Considere un sistema mecánico formado por un par de partículas que tienen diferentes masas y están conectadas por una varilla rígida y ligera (figura 9.16). La posición del centro de masa de un sistema se puede describir como que es la *posición promedio* de la masa del sistema. El centro de masa del sistema está localizado en algún punto sobre la recta que enlaza las dos partículas, y está más cerca de la partícula que tiene mayor masa. Si una sola fuerza se aplica en un punto de la varilla en algún punto entre el centro de masa y la partícula menos masiva, el sistema gira en sentido de giro de las manecillas de un reloj (vea la figura 9.16a). Si la fuerza se aplica en un punto sobre la varilla en algún punto entre el centro de masa y la partícula más masiva, el sistema gira en sentido contrario al de las manecillas de un reloj (vea la figura 9.16b). Si la fuerza se aplica en el centro de masa, el sistema se mueve en la dirección de $\mathbf{F}$ sin girar (vea la figura 9.16c). Entonces, el centro de masa se puede localizar con este procedimiento.

El centro de masa del par de partículas descrito en la figura 9.17 está localizado en el eje x y se encuentra en algún punto entre las partículas. Su coordenada x es

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \tag{9.27}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Por ejemplo, si $x_1 = 0$, $x_2 = d$ y $m_2 = 2m_1$, encontramos que $x_{CM} = \frac{2}{3}d$. Esto es, el centro de masa se encuentra más cerca de la partícula más masiva. Si las dos masas son iguales, el centro de masa se encuentra a la mitad entre las partículas.

Podemos extender este concepto a un sistema de numerosas partículas en tres dimensiones. La coordenada x del centro de masa de n partículas se define como

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_ix_i}{M} \tag{9.28}$$

donde x_i es la coordenada x de la i-ésima partícula. Para mayor comodidad, expresamos la masa total como $M \equiv \sum_i m_i$ donde la suma va sobre todas las n partículas. Las coordenadas y y z del centro de masa se definen en forma semejante con las ecuaciones

$$y_{CM} \equiv \frac{\sum_i m_iy_i}{M} \qquad y \qquad z_{CM} \equiv \frac{\sum_i m_iz_i}{M} \tag{9.29}$$

El centro de masa también se puede localizar por su vector posición $\mathbf{r}_{CM}$. Las coordenadas cartesianas de este vector son x_{CM}, y_{CM} y z_{CM}, definidas en las ecuaciones 9.28 y 9.29. Por lo tanto,

$$\mathbf{r}_{CM} = x_{CM}\hat{\mathbf{i}} + y_{CM}\hat{\mathbf{j}} + z_{CM}\hat{\mathbf{k}} = \frac{\sum_i m_ix_i\hat{\mathbf{i}} + \sum_i m_iy_i\hat{\mathbf{j}} + \sum_i m_iz_i\hat{\mathbf{k}}}{M}$$

$$\mathbf{r}_{CM} \equiv \frac{\sum_i m_i\mathbf{r}_i}{M} \tag{9.30}$$

donde $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición de la i-ésima partícula, definida por

$$\mathbf{r}_i \equiv x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}} + z_i\hat{\mathbf{k}}$$

Aun cuando localizar el centro de masa para un cuerpo rígido es un tanto más engorroso que localizar el centro de masa de un sistema de partículas, todavía se aplican las ideas básicas que hemos expresado. Podemos considerar un cuerpo rígido como un sistema que contiene un gran número de partículas (figura 9.18). La separación de partículas es muy pequeña, de modo que el objeto puede ser considerado como que tiene una distribución continua de masa. Al dividir el objeto en elementos de masa Δm_i con coordenadas x_i, y_i, z_i, vemos que la coordenada x del centro de masa es aproximadamente

$$x_{CM} \approx \frac{\sum_i x_i\Delta m_i}{M}$$

con expresiones similares para y_{CM} y z_{CM}. Si hacemos que el número de elementos n se aproxime al infinito, entonces x_{CM} se da precisamente. En este límite, sustituimos la suma por una integral y Δm_i por el elemento diferencial dm:

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_i x_i\Delta m_i}{M} = \frac{1}{M}\int x\,dm \tag{9.31}$$

Del mismo modo, para y_{CM} y z_{CM} obtenemos

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \qquad y \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm \tag{9.32}$$

Podemos expresar la posición vectorial del centro de masa de un cuerpo rígido en la forma

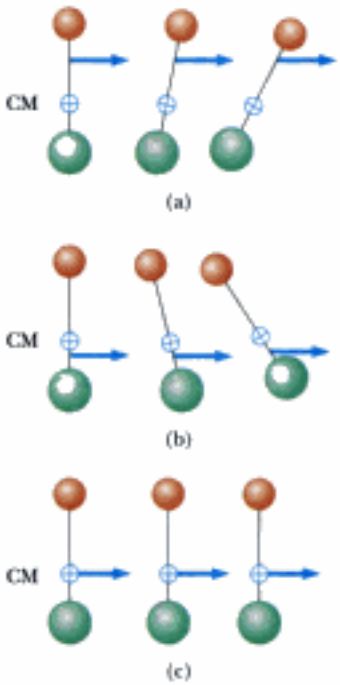


Figura activa 9.16 Dos partículas de masas diferentes están conectadas por una varilla rígida y ligera. (a) El sistema gira en el sentido de las manecillas del reloj cuando se aplica una fuerza entre la partícula menos masiva y el centro de masa. (b) El sistema gira en sentido contrario al de las manecillas de un reloj cuando se aplica una fuerza entre la partícula más masiva y el centro de masa. (c) El sistema se mueve en la dirección de la fuerza sin girar cuando una fuerza se aplica en el centro de masa.

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, usted podrá escoger el punto en el cual aplicar la fuerza.

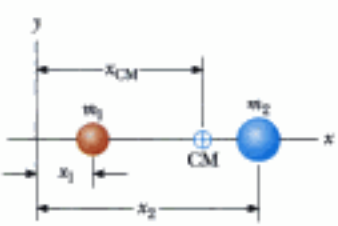


Figura activa 9.17 El centro de masa de dos partículas de masas diferentes sobre el eje x se localiza en x_{CM}, punto entre las partículas, más cercano a la que tiene mayor masa.

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, usted podrá ajustar las masas y posiciones de las partículas para ver el efecto sobre la ubicación del centro de masa.

Materiał chroniony prawem autorskim

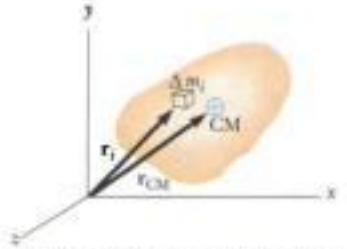


Figura 9.18 Un cuerpo rígido puede ser considerado como una distribución de pequeños elementos de masa Δm_i. El centro de masa está ubicado en el vector de posición $\mathbf{r}_{CM}$, que tiene coordenadas x_{CM}, y_{CM} y z_{CM}.

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\, dm \tag{9.33}$$

que es equivalente a las tres expresiones dadas por las ecuaciones 9.31 y 9.32.

El centro de masa de cualquier objeto simétrico se encuentra sobre un eje de simetría y sobre cualquier plano de simetría.[4] Por ejemplo, el centro de masa de una varilla uniforme se encuentra en la varilla, a la mitad entre sus extremos. El centro de masa de una esfera o un cubo está en su centro geométrico.

El centro de masa de un objeto de forma irregular como lo es una llave de tuercas, se puede determinar al suspender el objeto primero de un punto y luego de otro. En la figura 9.19, la llave se cuelga del punto *A*, y una recta vertical *AB* (que se puede establecer con una plomada) se traza cuando la llave deje de oscilar. La llave se cuelga luego del punto *C* y se traza una segunda recta vertical *CD*. El centro de masa está a la mitad en el mango de la llave, bajo la intersección de estas dos rectas. En general, si la llave se cuelga libremente de cualquier punto, la recta vertical que pase por este punto debe pasar por el centro de masa.

Debido a que un cuerpo rígido es una distribución continua de masa, cada pequeño elemento de masa está sometido a la fuerza gravitacional. El efecto neto de todas estas fuerzas es equivalente al efecto de una sola fuerza $M\mathbf{g}$ que actúe en un punto especial, llamado **centro de gravedad.** Si $\mathbf{g}$ es constante sobre la distribución de masa, entonces el centro de gravedad coincide con el centro de masa. Si un cuerpo rígido gira en un pivote localizado en su centro de gravedad, se balancea en cualquier orientación.

Figura 9.19 Una técnica experimental para determinar el centro de masa de una llave de tuercas. La llave se cuelga libremente primero del punto *A* y luego del punto *C*. La intersección de las dos líneas *AB* y *CD* localiza el centro de masa.

Pregunta rápida 9.10 Un bat de béisbol se corta en la ubicación de su centro de masa, como se muestra en la figura 9.20. La parte con la menor masa es (a) la parte de la derecha (b) la parte de la izquierda (c) Ambas partes tienen la misma masa. (d) imposible de determinar

Figura 9.20 (Pregunta Rápida 9.10) Bat de béisbol cortado en la ubicación de su centro de masa.

Ejemplo 9.13 Centro de masa de tres partículas

Un sistema está formado de tres partículas localizadas como se muestra en la figura 9.21a. Encuentre el centro de masa del sistema.

Solución Establecemos el problema al marcar las masas de las partículas como se muestra en la figura, con $m_1 = m_2 = 1.0$ kg y $m_3 = 2.0$ kg. Usando las ecuaciones definidas para las coordenadas del centro de masa y observando que $z_{CM} = 0$, obtenemos

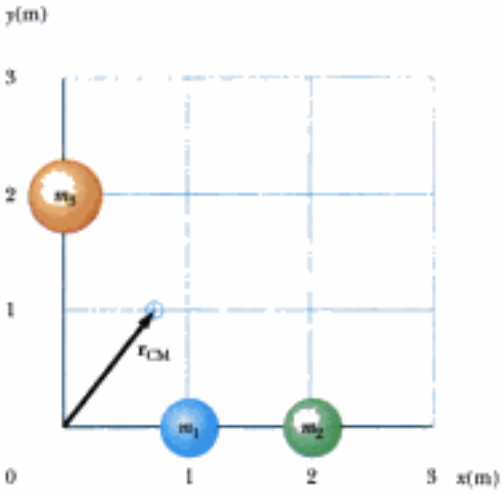
$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0\text{ kg})(1.0\text{ m}) + (1.0\text{ kg})(2.0\text{ m}) + (2.0\text{ kg})(0)}{1.0\text{ kg} + 1.0\text{ kg} + 2.0\text{ kg}}$$

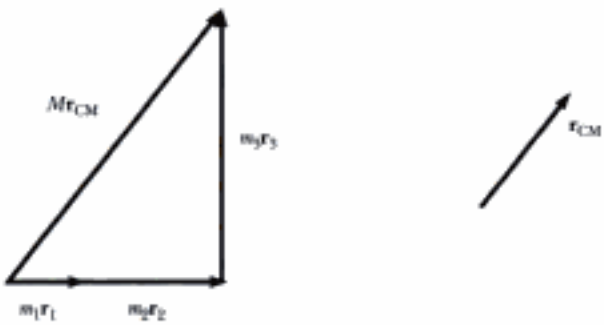
$$= \frac{3.0\text{ kg}\cdot\text{m}}{4.0\text{ kg}} = 0.75\text{ m}$$

[4] Este enunciado es válido sólo para objetos que tienen una masa uniforme por unidad de volumen.

Material chroniony prawem autorskim



(a)



(b)

$$y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0\ \text{kg})(0) + (1.0\ \text{kg})(0) + (2.0\ \text{kg})(2.0\ \text{m})}{4.0\ \text{kg}}$$

$$= \frac{4.0\ \text{kg}\cdot\text{m}}{4.0\ \text{kg}} = 1.0\ \text{m}$$

El vector posición del centro de masa medido desde el origen es, por lo tanto,

$$\mathbf{r}_{CM} = x_{CM}\hat{\mathbf{i}} + y_{CM}\hat{\mathbf{j}} = (0.75\hat{\mathbf{i}} + 1.0\hat{\mathbf{j}})\ \text{m}$$

Podemos verificar este resultado gráficamente al sumar $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3$ y dividir la suma vectorial entre M, la masa total. Esto se muestra en la figura 9.21b.

Figura 9.21 (Ejemplo 9.13) (a) Dos partículas de 1.0 kg están situadas sobre el eje x y una sola partícula de 2.0 kg está sobre el eje y, como se muestra. El vector indica la ubicación del centro de masa. (b) Suma vectorial de $m_i r_i$ y el vector resultante para r_{CM}.

Ejemplo 9.14 El centro de masa de una varilla

(A) Demuestre que el centro de masa de una varilla de masa M y longitud L se encuentra a la mitad entre sus extremos, suponiendo que la varilla tiene masa uniforme por unidad de longitud.

Solución La varilla se muestra alineada a lo largo del eje x en la figura 9.22, de modo que $y_{CM} = z_{CM} = 0$. Además, si llamamos λ a la masa por unidad de longitud (esta cantidad se denomina *densidad de masa lineal*), entonces $\lambda = M/L$ para la varilla uniforme que aquí suponemos. Si dividimos la varilla en elementos de longitud dx, entonces la masa de cada elemento es $dm = \lambda\, dx$. La ecuación 9.31 da

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\, dx = \frac{\lambda}{M}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

Debido a que $\lambda = M/L$, esto se reduce a

$$x_{CM} = \frac{L^2}{2M}\left(\frac{M}{L}\right) = \frac{L}{2}$$

Uno también puede usar argumentos de simetría para obtener el mismo resultado.

(B) Suponga que una varilla *no es uniforme* y que su masa por unidad de longitud varía linealmente con x según la expresión $\lambda = \alpha x$, donde α es una constante. Encuentre la coordenada x del centro de masa como una fracción de L.

Solución En este caso, sustituimos dm con $\lambda\, dx$, donde λ no es constante. Por lo tanto, x_{CM} es

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\, dx = \frac{1}{M}\int_0^L x\alpha x\, dx$$

$$= \frac{\alpha}{M}\int_0^L x^2\, dx = \frac{\alpha L^3}{3M}$$

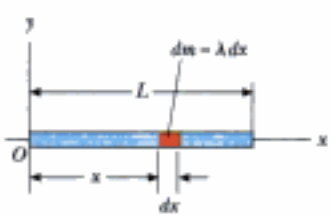


Figura 9.22 (Ejemplo 9.14) Geometría empleada para hallar el centro de masa de una varilla uniforme.

Materiał chroniony prawem autorskim

Podemos eliminar α si observamos que la masa total de la varilla está relacionada con α por medio de la relación

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda\, dx = \int_0^L \alpha x\, dx = \frac{\alpha L^2}{2}$$

Sustituyendo esto en la expresión para x_{CM} tendremos

$$x_{CM} = \frac{\alpha L^3}{3\alpha L^2/2} = \tfrac{2}{3}L$$

Ejemplo 9.15 Centro de masa de un triángulo recto

Líneas antes se ha pedido al estudiante colgar un anuncio metálico de un solo alambre vertical. El anuncio tiene la forma triangular que se muestra en la figura 9.23a. La parte baja del anuncio debe estar paralela al suelo. ¿A qué distancia del extremo izquierdo del anuncio se debe unir el alambre de soporte?

Solución El alambre debe unirse en un punto directamente arriba del centro de gravedad del anuncio, que es el mismo que su centro de masa, porque está en un campo gravitacional uniforme. Suponemos que el anuncio triangular tiene una densidad uniforme y masa total M. Debido a que el anuncio es una distribución continua de masa, debemos usar la expresión integral en la ecuación 9.31 para hallar la coordenada x del centro de masa.

Dividimos el triángulo en franjas angostas de ancho dx y altura y, como se muestra en la figura 9.23b, donde y es la altura de la hipotenusa del triángulo arriba del eje x para un valor dado de x. La masa de cada franja es el producto del volumen de la franja y la densidad ρ del material del cual está hecho el anuncio: $dm = \rho y t\, dx$, donde t es el grosor del anuncio metálico. La densidad del material es la masa total del anuncio dividida entre su volumen total (área del triángulo por el grosor), de modo que

$$dm = \rho y t\, dx = \left(\frac{M}{\frac{1}{2}abt}\right) y t\, dx = \frac{2My}{ab}\, dx$$

Con el uso de la ecuación 9.31 para hallar la coordenada x del centro de masa, tendremos

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\int_0^a x\, \frac{2My}{ab}\, dx = \frac{2}{ab}\int_0^a xy\, dx$$

Para continuar más a fondo y evaluar la integral, debemos expresar y en términos de x. La recta que representa la hipotenusa del triángulo de la figura 9.23b tiene una pendiente de b/a y pasa por el origen, de modo que la ecuación de esta recta es $y = (b/a)x$. Con esta sustitución para y en la integral, tenemos

$$x_{CM} = \frac{2}{ab}\int_0^a x\left(\frac{b}{a}x\right) dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2\, dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$
$$= \tfrac{2}{3}a$$

En consecuencia, el alambre debe unirse al anuncio a una distancia de dos tercios de la longitud del borde inferior desde el extremo izquierdo. También podríamos hallar la coordenada y del centro de masa del anuncio, pero esto no es necesario para determinar dónde debe unirse el alambre.

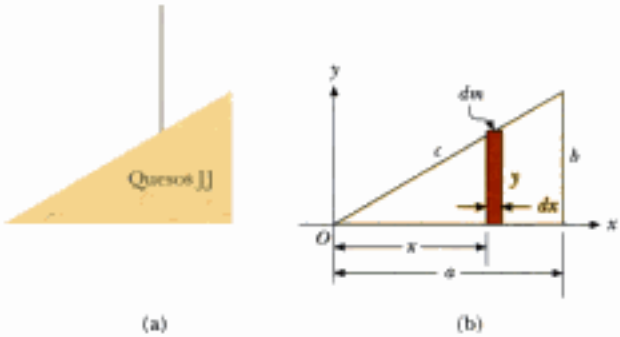


Figura 9.23 (Ejemplo 9.15) (a) Anuncio triangular a colgarse de un solo alambre. (b) Construcción geométrica para localizar el centro de masa.

9.6 Movimiento de un sistema de partículas

Podemos empezar a comprender el significado físico y utilidad del concepto de centro de masa al tomar la derivada respecto al tiempo del vector posición dado por la ecuación 9.30. De la sección 4.1 sabemos que la derivada respecto al tiempo de un vector de posición es por definición una velocidad. Si suponemos que M permanece constante para un sistema de partículas, esto es, no entran ni salen partículas del sistema, obtenemos la siguiente expresión para la **velocidad del centro de masa** del sistema:

Velocidad del centro de masa

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{M} \tag{9.34}$$

Donde $\mathbf{v}_i$ es la velocidad de la i-ésima partícula. Al reacomodar la ecuación 9.34 resulta

Cantidad total de movimiento de un sistema de partículas

$$M\mathbf{v}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{tot} \tag{9.35}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Por lo tanto, concluimos que **la cantidad total de movimiento lineal del sistema es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa.** En otras palabras, la cantidad total de movimiento lineal del sistema es igual a la de una sola partícula de masa M que se mueva con una velocidad $\mathbf{v}_{CM}$.

Si ahora derivamos la ecuación 9.34 con respecto al tiempo, obtenemos **la aceleración del centro de masa** del sistema:

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{a}_i \tag{9.36}$$

Aceleración del centro de masa

Al reacomodar esta expresión y usar la segunda ley de Newton, obtenemos

$$M\mathbf{a}_{CM} = \sum m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \tag{9.37}$$

donde $\mathbf{F}_i$ es la fuerza neta sobre la partícula i.

Las fuerzas sobre cualquier partícula del sistema pueden incluir fuerzas externas (de fuera del sistema) y fuerzas internas (de dentro del sistema). Sin embargo, por la tercera ley de Newton, la fuerza interna ejercida por la partícula 1 sobre la partícula 2, por ejemplo, es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza interna ejercida por la partícula 2 sobre la partícula 1. Por lo tanto, cuando sumamos todas las fuerzas internas de la ecuación 9.37, se cancelan en pares y encontramos que la fuerza neta sobre el sistema es causada *sólo* por fuerzas externas. Así, podemos escribir la ecuación 9.37 en la forma

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{CM} \tag{9.38}$$

Segunda ley de Newton para un sistema de partículas

Esto es, **la fuerza externa neta sobre un sistema de partículas es igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masa.** Si comparamos esto con la segunda ley de Newton para una sola partícula, vemos que el modelo de partícula que hemos empleado en varios capítulos se puede describir en términos del centro de masa:

El centro de masa de un sistema de partículas de masa combinada M se mueve como una partícula equivalente de masa M se movería bajo la influencia de la fuerza externa neta sobre el sistema.

Finalmente, vemos que si la fuerza externa neta es cero, entonces de la ecuación 9.38 se deduce que

$$M\mathbf{a}_{CM} = M\frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = 0$$

de modo que

$$M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{p}_{tot} = \text{constante} \qquad (\text{cuando } \sum \mathbf{F}_{ext} = 0) \tag{9.39}$$

Esto es, la cantidad total de movimiento lineal de un sistema de partículas se conserva si no hay una fuerza externa neta que actúe sobre el sistema. Se deduce que para un sistema aislado de partículas, tanto la cantidad total de movimiento como la velocidad del centro de masa son constantes en el tiempo, como se muestra en la figura 9.24. Ésta es una generalización para un sistema de numerosas partículas de la ley de conservación de la cantidad de movimiento analizada en la sección 9.1 para un sistema de dos partículas.

Supongamos que un sistema aislado, formado por dos o más miembros, está en reposo. El centro de masa de este sistema permanece en reposo a menos que sobre él actúe una fuerza externa. Por ejemplo, considere un sistema formado por un nadador que está de pie sobre una balsa, con el sistema está inicialmente en reposo. Cuando el nadador salta horizontalmente de la balsa, ésta se mueve en la dirección contraria a la del nadador y el centro de masa del sistema permanece en reposo (si pasamos por alto la fricción entre la balsa y el agua). Además, la cantidad de movimiento lineal del nadador es igual en magnitud a la de la balsa pero en dirección opuesta.

Como otro ejemplo, supongamos que un átomo inestable inicialmente en reposo se rompe de pronto en dos fragmentos de masas M_1 y M_2, con velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, respectivamente. Debido a que es cero la cantidad total de movimiento del sistema antes de la ruptu-

Materiał chroniony prawem autorskim

Richard Megna/Fundamental

Figura 9.24 Fotografía de destellos múltiples que muestra una vista superior de una llave de tuercas que se mueve sobre una superficie horizontal. Los puntos blancos están situados en el centro de masa de la llave, y muestran que el centro de masa se mueve en línea recta cuando la llave gira.

ra, la cantidad total de movimiento del sistema después del rompimiento también debe ser cero. Por lo tanto, $M_1\mathbf{v}_1 + M_2\mathbf{v}_2 = 0$. Si se conoce la velocidad de uno de los fragmentos, se puede calcular la velocidad de retroceso del otro fragmento.

Pregunta rápida 9.11 Los veraneantes de un barco crucero están ansiosos por llegar a su siguiente destino. Deciden tratar de acelerar el barco al reunirse en la proa (el frente) y correr todos a un tiempo hacia la popa (atrás) del barco. Cuando están corriendo hacia la popa, la rapidez del barco es (a) más alta de lo que era antes (b) no cambia (c) más baja que antes (d) imposible de determinar.

Pregunta rápida 9.12 Los veraneantes de la Pregunta rápida 9.11 paran de correr cuando llegan a la popa del barco. Una vez que han dejado de correr, la rapidez del barco es (a) más alta de lo que era antes que empezaran a correr (b) no hay cambio respecto a lo que era antes que empezaran a correr (c) más baja de lo que era antes que empezaran a correr (d) imposible de determinar.

Ejemplo conceptual 9.16 El oso que se desliza

Supongamos que el lector tranquiliza un oso polar sobre un glaciar liso, como parte de un trabajo de investigación. ¿Cómo podría estimar la masa del oso usando una cinta de medir, una cuerda y el conocimiento de su propia masa?

Solución Amarre un extremo de la cuerda alrededor del oso, y luego ponga la cinta de medir sobre el hielo con un extremo en la posición original del oso, como se ve en la figura 9.25. Tome el extremo libre de la cuerda y póngase a sí mismo como se

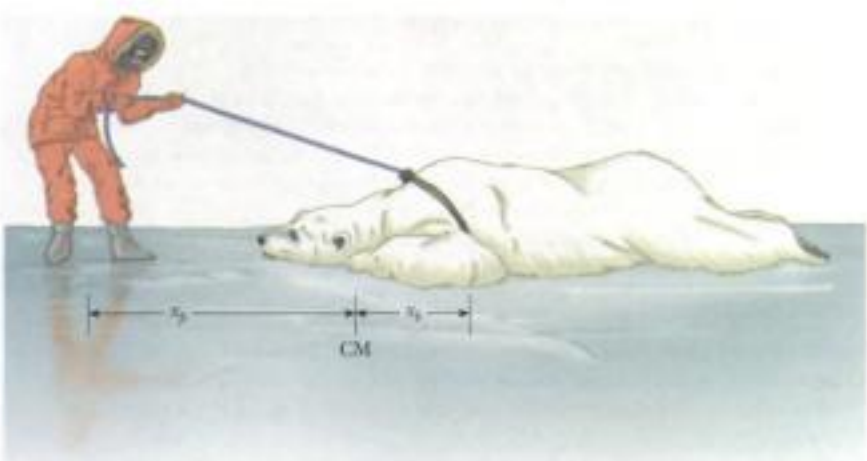


Figura 9.25 (Ejemplo conceptual 9.16) El centro de masa de un sistema aislado permanece en reposo a menos de que actúe sobre él una fuerza externa. ¿Cómo determinaría usted la masa del oso polar?

Materiał chroniony prawem autorskim

muestra, observando su posición. Quítese sus zapatos de picos y tire de la cuerda mano sobre mano. Su mano y el oso se deslizarán sobre el hielo hasta encontrarse con el oso. De la cinta, observe qué distancia se desliza, x_p, y cuánto se desliza el oso, x_b. El punto donde usted se encuentre con el oso es la ubicación fija del centro de masa del sistema (oso más usted), y así se puede determinar la masa del oso a partir de $m_b x_b = m_p x_p$. (Desafortunadamente, usted no puede regresar a sus zapatos de picos y estará en un grave problema si el oso despierta).

Ejemplo conceptual 9.17 Proyectil que explota

Un proyectil disparado al aire explota de pronto en varios fragmentos (figura 9.26). ¿Qué se puede decir acerca del movimiento del centro de masa del sistema formado por todos los fragmentos después de la explosión?

Solución Si se desprecia la resistencia del aire, la única fuerza externa sobre el proyectil es la fuerza gravitacional. Por lo tanto, si el proyectil no explotara, continuaría moviéndose a lo largo de la trayectoria parabólica indicada por la línea punteada de la figura 9.26. Debido a que las fuerzas causadas por la explosión son internas, no afectan el movimiento del centro de masa del sistema (los fragmentos). Así, después de la explosión, el centro de masa de los fragmentos sigue la misma trayectoria parabólica que tendría el proyectil si no hubiera habido explosión.

Figura 9.26 (Ejemplo conceptual 9.17) Cuando un proyectil explota en varios fragmentos, el centro de masa del sistema formado por todos los fragmentos sigue la misma trayectoria parabólica que el proyectil hubiera tomado si no hubiera habido explosión.

Ejemplo 9.18 El cohete que explota

Un cohete es disparado verticalmente hacia arriba. En el instante en que alcanza una altitud de 1 000 m y una rapidez de 300 m/s, explota en tres fragmentos que tienen igual masa. Un fragmento continúa moviéndose hacia arriba con una rapidez de 450 m/s después de la explosión. El segundo fragmento tiene una rapidez de 240 m/s y se mueve al este inmediatamente después de la explosión. ¿Cuál es la velocidad del tercer fragmento inmediatamente después de la explosión?

Solución Llamemos M a la masa total del cohete; por lo tanto, la masa de cada fragmento es $M/3$. Como las fuerzas de la explosión son internas al sistema y no pueden afectar su cantidad total de movimiento, la cantidad total de movimiento $\mathbf{p}_i$ del cohete justo antes de la explosión, debe ser igual a la cantidad total de movimiento $\mathbf{p}_f$ de los fragmentos inmediatamente después de la explosión.

Antes de la explosión,

$$\mathbf{p}_i = M\mathbf{v}_i = M(300\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s})$$

Después de la explosión

$$\mathbf{p}_f = \frac{M}{3}(240\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s}) + \frac{M}{3}(450\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}) + \frac{M}{3}\mathbf{v}_f$$

donde $\mathbf{v}_f$ es la velocidad desconocida del tercer fragmento. Al igualar estas dos expresiones (porque $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f$) tendremos

$$\frac{M}{3}\mathbf{v}_f + \frac{M}{3}(240\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s}) + \frac{M}{3}(450\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}) = M(300\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s})$$

$$\mathbf{v}_f = (-240\hat{\mathbf{i}} + 450\hat{\mathbf{j}})\ \text{m/s}$$

¿Qué aspecto tiene la suma de los vectores de cantidad de movimiento para los tres fragmentos?

9.7 Propulsión de un cohete

Cuando vehículos como automóviles o locomotoras son propulsados, la fuerza motriz para el movimiento es la fricción. En el caso del automóvil, la fuerza motriz es la fuerza ejercida por el pavimento sobre el auto. Una locomotora "empuja" contra las vías; por lo tanto, la fuerza motriz es la fuerza ejercida por las vías sobre la locomotora. No obstante, un cohete que se mueva en el espacio no tiene caminos ni vías contra los que empuje, por lo cual la fuente de la propulsión de un cohete debe ser algo diferente a la fricción. La figura 9.27 es una impresionante fotografía del despegue de una nave espacial. **La operación de un cohete depende de la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal como se aplica a un sistema de partículas, donde el sistema es el cohete más su combustible expulsado.**

Materiał chroniony prawem autorskim

Cortesía de la NASA

Figura 9.27 En el despegue, los motores de combustible líquido del transbordador espacial generan un enorme empuje, que además son auxiliados por dos impulsores de combustible sólido. Esta fotografía muestra el despegue del transbordador espacial *Columbia*, que se perdió en un trágico accidente durante su intento de aterrizaje el 1 de febrero de 2003 (poco antes que este libro se imprimiera).

La propulsión de un cohete se puede comprender si se considera primero un sistema mecánico formado por una ametralladora montada sobre un carro con ruedas. Cuando es disparada, cada bala recibe una cantidad de movimiento $m\mathbf{v}$ en alguna dirección, donde $\mathbf{v}$ se mide con respecto a un marco terrestre estacionario. Debe conservarse la cantidad de movimiento del sistema formado por el carro, la ametralladora y las balas. En consecuencia, por cada bala disparada, el cañón y el carro deben recibir una cantidad de movimiento en la dirección opuesta. Esto es, la fuerza de reacción ejercida por la bala del cañón acelera el carro y el cañón, y el carro se mueve en la dirección contraria a la de las balas. Si n es el número de balas disparadas por segundo, entonces la fuerza promedio ejercida sobre el cañón es $\overline{\mathbf{F}} = nm\mathbf{v}$.

De un modo semejante, cuando un cohete se desplaza en el espacio libre, su cantidad de movimiento lineal cambia cuando parte de su masa es liberada en forma de gases expulsados. **Debido a que los gases reciben cantidad de movimiento cuando son expulsados del motor, el cohete recibe una cantidad de movimiento en la dirección opuesta.** Por lo tanto, el cohete es acelerado como resultado del "empuje," o impulso, de los gases de escape. En el espacio libre, el centro de masa del sistema (cohete más gases expulsados) se mueve uniformemente, independiente del proceso de propulsión.[5]

Suponga que en algún tiempo t, la magnitud de la cantidad de movimiento de un cohete más su combustible es $(M + \Delta m)v$, donde v es la rapidez del cohete con respecto a la Tierra (figura 9.28a). En un corto intervalo Δt, el cohete expulsa combustible de masa Δm, por lo que al final de este intervalo la rapidez del cohete es $v + \Delta v$, donde Δv es el cambio en rapidez del cohete (figura 9.28b). Si el combustible es expulsado con una rapidez v_e con respecto al cohete (el subíndice "e" significa *escape*, y v_e suele denominarse *rapidez de escape*), la velocidad del combustible con respecto a un marco de referencia estacionario es $v - v_e$.

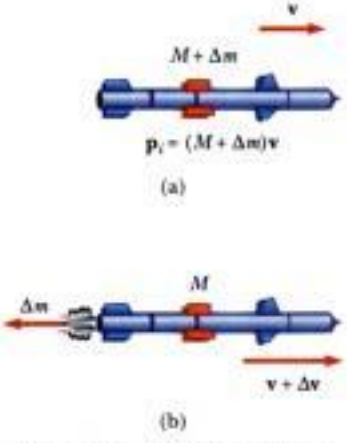


Figura 9.28 Propulsión de un cohete. (a) La masa inicial del cohete, más todo su combustible, es $M + \Delta m$ en un tiempo t, y su rapidez es v. (b) En un tiempo $t + \Delta t$, la masa del cohete se ha reducido a M y una cantidad de combustible Δm ha sido expulsada. La rapidez del cohete aumenta en una cantidad Δv.

[5] Es interesante notar que el cohete y la ametralladora representan casos del inverso de una colisión perfectamente inelástica: se conserva cantidad de movimiento, pero la energía cinética del sistema aumenta (a expensas de la energía química potencial del combustible).

Materiał chroniony prawem autorskim

Por lo tanto, si igualamos la cantidad total inicial de movimiento del sistema y la cantidad total final de movimiento, obtenemos

$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

donde M representa la masa del cohete y su combustible restante después que una cantidad de combustible de masa Δm ha sido expulsada. La simplificación de esta expresión da

$$M\,\Delta v = v_e\,\Delta m$$

También podríamos haber llegado a este resultado al considerar el sistema en el marco de referencia del centro de masa, que es un marco que tiene la misma velocidad que el centro de masa del sistema. En este marco, la cantidad total de movimiento del sistema es cero; por lo tanto, si el cohete gana una cantidad de movimiento $M\Delta v$ al expulsar parte de su combustible, el combustible expulsado obtiene una cantidad de movimiento $v_e\,\Delta m$ en la dirección *opuesta*, de modo que $M\Delta v - v_e\,\Delta m = 0$. Si ahora tomamos el límite cuando Δt se va a cero, hacemos que $\Delta v \rightarrow dv$ y $\Delta m \rightarrow dm$. Además, el aumento en la masa de escape dm corresponde a una disminución igual en la masa del cohete, de modo que $dm = -dM$. Nótese que dM es negativa porque representa una disminución en masa, por lo cual $-dM$ es un número positivo. Usando este dato, obtenemos

$$M\,dv = v_e\,dm = -v_e\,dM \tag{9.40}$$

Dividimos la ecuación entre M e integramos, tomando como M_i la masa inicial del cohete más el combustible, y como M_f la masa final del cohete más su combustible restante. Esto da

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

$$v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right) \tag{9.41}$$

Expresión para la propulsión de un cohete

Ésta es la expresión básica para la propulsión de cohetes. Primero, nos dice que el aumento en rapidez de un cohete es proporcional a la rapidez de escape v_e de los gases expulsados. Por lo tanto, la rapidez de escape debe ser muy alta. En segundo término, el aumento en la rapidez del cohete es proporcional al logaritmo natural de la razón M_i/M_f. En consecuencia, esta razón debe ser tan grande como sea posible, lo cual significa que la masa del cohete sin su combustible debe ser tan pequeña como sea posible y el cohete debe llevar tanto combustible como sea posible.

El **empuje** sobre el cohete es la fuerza ejercida sobre él por los gases de escape expulsados. Podemos obtener una expresión para el empuje a partir de la ecuación 9.40:

$$\text{Empuje} = M\frac{dv}{dt} = \left|v_e\frac{dM}{dt}\right| \tag{9.42}$$

Esta expresión nos muestra que el empuje aumenta cuando aumenta la rapidez de escape y cuando aumenta la rapidez de cambio de masa (llamada *rapidez de quemado*).

Cortesía de la NASA

La fuerza de un aparato propulsado por nitrógeno, controlado manualmente, permite a un astronauta moverse libremente en el espacio sin cordones restrictivos, usando la fuerza de empuje del nitrógeno expulsado.

Ejemplo 9.19 Un cohete en el espacio

Un cohete que se mueve en el espacio libre tiene una rapidez de 3.0×10^3 m/s con respecto a la Tierra. Sus motores se encienden, y el combustible es expulsado en una dirección opuesta al movimiento del cohete a una rapidez de 5.0×10^3 m/s con respecto al cohete.

(A) ¿Cuál es la rapidez del cohete con respecto a la Tierra, una vez que la masa del cohete se reduce a la mitad de su masa antes de la ignición?

Solución Podemos pensar que la rapidez que buscamos debe ser mayor que la rapidez original porque el cohete está acelerando. Al aplicar la ecuación 9.41 obtenemos

$$v_f = v_i + v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

$$= 3.0 \times 10^3\ \text{m/s} + (5.0 \times 10^3\ \text{m/s})\ln\left(\frac{M_i}{0.5\,M_i}\right)$$

$$= \mathbf{6.5 \times 10^3\ m/s}$$

(B) ¿Cuál es el empuje sobre el cohete si éste quema combustible a razón de 50 kg/s?

Solución Con el uso de la ecuación 9.42,

$$\text{Empuje} = \left|v_e\frac{dM}{dt}\right| = (5.0 \times 10^3\ \text{m/s})(50\ \text{kg/s})$$

$$= \mathbf{2.5 \times 10^5\ N}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 9.20 Combatiendo un incendio

Dos bomberos deben aplicar una fuerza total de 600 N para estabilizar una manguera que está descargando agua a razón de 3 600 L/min. Estime la rapidez del agua cuando sale por la boquilla.

Solución El agua está saliendo a 3600 L/min, que es 60 L/s. Si sabemos que 1 L de agua tiene una masa de 1 kg, estimamos que unos 60 kg de agua salen por la boquilla en cada segundo. Cuando el agua sale por la manguera, ejerce sobre ésta un empuje que debe ser contrarrestado por la fuerza de 600 N ejercida por los bomberos. Por lo tanto, al aplicar la ecuación 9.42 tendremos

$$\text{Empuje} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right|$$

$$600\ \text{N} = |v_e(60\ \text{kg/s})|$$

$$v_e = \mathbf{10\ m/s}$$

Combatir incendios es un trabajo peligroso. Si la boquilla se deslizara de sus manos, el movimiento de la manguera debido al empuje que recibe del agua que sale con gran rapidez, podría lesionar a los bomberos.

RESUMEN

La cantidad de **movimiento lineal p** de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{9.2}$$

La ley de **conservación de la cantidad de movimiento lineal** indica que se conserva la cantidad total de movimiento de un sistema aislado. Si dos partículas forman un sistema aislado, se conserva la cantidad de movimiento del sistema, cualquiera que sea la naturaleza de la fuerza entre ellas. Por lo tanto, la cantidad total de movimiento del sistema en todo momento es igual a su cantidad total inicial de movimiento, o sea que

$$\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f} \tag{9.5}$$

El **impulso** impartido a una partícula por una fuerza F es igual al cambio en la cantidad de movimiento de la partícula:

$$\mathbf{I} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt = \Delta\mathbf{p} \tag{9.8, 9.9}$$

Esto se conoce como el teorema del **impulso y cantidad de movimiento.**

Las fuerzas impulsivas son con frecuencia muy fuertes en comparación con otras fuerzas sobre el sistema, y por lo general actúan durante un tiempo muy corto, como en el caso de colisiones.

Cuando chocan dos partículas, la cantidad total de movimiento del sistema aislado antes de la colisión, siempre es igual a la cantidad total de movimiento después del choque, sin importar la naturaleza de la colisión. Una **colisión inelástica** es aquella para la cual la energía cinética total del sistema no se conserva. Una **colisión perfectamente inelástica** es aquella en la que los cuerpos en colisión se quedan pegados después de la colisión. Una **colisión elástica** es aquella en la que se conserva la energía cinética del sistema.

En una colisión en dos o tres dimensiones, los componentes de cantidad de movimiento de un sistema aislado en cada una de las direcciones (x, y y z) se conservan independientemente.

El vector de posición del centro de masa de un sistema de partículas se define como

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M} \tag{9.30}$$

donde $M = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema y $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición de la i-ésima partícula.

Materiał chroniony prawem autorskim

El vector de posición del centro de masa de un cuerpo rígido se puede obtener de la expresión integral

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,dm \tag{9.33}$$

La velocidad del centro de masa para un sistema de partículas es

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{M} \tag{9.34}$$

La cantidad total de movimiento de un sistema de partículas es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa.

La segunda ley de Newton aplicada a un sistema de partículas es

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{CM} \tag{9.38}$$

donde $\mathbf{a}_{CM}$ es la aceleración del centro de masa y la suma es sobre todas las fuerzas externas. El centro de masa se mueve como una partícula imaginaria de masa M bajo la influencia de la fuerza externa resultante sobre el sistema.

PREGUNTAS

1. ¿Una fuerza grande siempre produce un impulso más grande sobre un objeto que una fuerza más pequeña? Explique.
2. Si la rapidez de una partícula se duplica, ¿por qué factor cambia su cantidad de movimiento? ¿Por qué factor cambia su energía cinética?
3. Si dos partículas tienen energías cinéticas iguales, ¿son necesariamente iguales sus cantidades de movimiento? Explique.
4. Cuando está en movimiento, una pelota de béisbol lanzada lleva energía cinética y cantidad de movimiento. (a) ¿Podemos decir que lleva una fuerza que puede ejercer sobre cualquier objeto al que golpee? (b) ¿Puede la pelota comunicar más energía cinética al objeto que golpea de la que lleva inicialmente? (c) ¿Puede la pelota de béisbol comunicar al cuerpo que golpea más cantidad de movimiento de la que lleva la pelota inicialmente? Explique sus respuestas.
5. Un sistema aislado está inicialmente en reposo. ¿Es posible para las partes del sistema estar en movimiento en algún tiempo posterior? Si es así, explique cómo podría ocurrir esto.
6. Si dos objetos chocan y uno está inicialmente en reposo, ¿es posible para ambos estar en reposo después de la colisión? ¿Es posible para uno estar en reposo después de la colisión? Explique.
7. Explique cómo se conserva la cantidad de movimiento lineal cuando una pelota rebota en el piso.
8. Una bomba, inicialmente en reposo, explota en varios pedazos. (a) ¿Se conserva la cantidad de movimiento lineal del sistema? (b) ¿Se conserva la energía cinética del sistema? Explique.
9. Una pelota de arcilla se lanza contra una pared de ladrillo. La arcilla se detiene y se queda pegada en la pared. ¿Se viola el principio de conservación de la cantidad de movimiento en este ejemplo?
10. Una persona está de pie perfectamente inmóvil y luego da un paso hacia delante. Antes del paso su cantidad de movimiento era cero, pero después tiene cierta magnitud. ¿Se viola el principio de conservación de la cantidad de movimiento en este caso?
11. Cuando una pelota baja por un plano inclinado, aumenta su cantidad de movimiento lineal. ¿Se viola el principio de conservación de la cantidad de movimiento en este proceso?
12. Considere una colisión perfectamente inelástica entre un auto y un gran camión. ¿Cuál vehículo experimenta un mayor cambio en energía cinética como resultado de la colisión?
13. Un tirador experto dispara un rifle cuando está de pie con la culata del arma contra su hombro. Si la cantidad de movimiento hacia delante de una bala es la misma que la cantidad de movimiento hacia atrás del rifle, ¿por qué no es tan peligroso ser golpeado por el rifle que por la bala?
14. Un deportista de salto de garrocha cae desde una altura de 6.0 m sobre un colchón de caucho celular. ¿Es posible calcular su rapidez justo antes que llegue al colchón? ¿Se puede calcular la fuerza ejercida sobre él por el colchón? Explique.
15. Los bomberos deben aplicar grandes fuerzas para sostener firmemente una manguera contra incendios (figura Q9.15). ¿Qué factores relacionados con la proyección de agua determinan la magnitud de la fuerza necesaria para mantener estacionario el extremo de la manguera contra incendios?

© Bill Stormont/The Stock Market

Figura Q9.15

16. Una sábana grande es sostenida verticalmente por dos estudiantes. Un tercer estudiante, que resulta ser el lanzador estrella de un equipo de béisbol, lanza un huevo crudo a la sábana. Explique por qué el huevo no se rompe cuando choca con la sábana, cualquiera que sea su rapidez inicial. (Si el lector intenta esta demostración, asegúrese que el lanzador haga blanco en la sábana cerca del centro de ésta, y no permita que el huevo caiga en el piso después de ser atrapado).

Materiał chroniony prawem autorskim

17. Una patinadora está inmóvil sobre una pista de hielo sin fricción. Un amigo de ella le lanza directamente un disco abombado de plástico (Frisbee). ¿En cuál de los siguientes casos es máxima la cantidad de movimiento transferida a la patinadora? (a) La patinadora atrapa el disco y lo retiene. (b) La patinadora atrapa el disco momentáneamente, pero luego lo deja caer verticalmente hacia abajo. (c) La patinadora atrapa el disco, lo sostiene momentáneamente, y luego lo regresa a su amigo.

18. En una colisión entre dos partículas, ¿cambia la energía cinética de cada partícula como resultado de la colisión?

19. Tres pelotas son lanzadas simultáneamente al aire. ¿Cuál es la aceleración del centro de masa de ellas cuando están en movimiento?

20. Una persona balancea una regla graduada en posición horizontal sobre los dedos índices extendidos de sus dos manos, y luego junta lentamente sus dedos. La regla permanece balanceada y los dos dedos siempre se encuentran en la marca de 50 cm, sin importar sus posiciones originales. (¡Inténtelo!) Explique.

21. Es frecuente que la NASA utilice la gravedad de un planeta para "lanzar" una sonda a su ruta hacia un planeta más distante. La interacción del planeta y la nave espacial es una colisión en la que los objetos no se tocan. ¿Cómo es posible que la sonda aumente su rapidez en esta forma?

22. La Luna gira alrededor de la Tierra. Modele su órbita como circular. ¿Se conserva la cantidad de movimiento lineal de la Luna? ¿Se conserva su energía cinética?

23. Un huevo crudo que se deje caer al piso se rompe al impacto. No obstante, un huevo crudo que se deje caer sobre un grueso colchón de caucho celular desde una altura de 1 m rebota sin romperse. ¿Por qué es esto posible? Si el estudiante intenta este experimento, asegúrese de atrapar el huevo después de su primer rebote.

24. ¿Puede el centro de masa de un objeto estar localizado en una posición en la que no haya masa? Si es así, dé ejemplos.

25. Un malabarista lanza tres bolas en un ciclo continuo. Cualquiera de ellas está en contacto con sus manos durante un quinto del tiempo. Describa el movimiento del centro de masa de las tres bolas. ¿Qué fuerza promedio ejerce el malabarista sobre una bola mientras la toca?

26. ¿Acelera el centro de masa de un cohete en el espacio libre? Explique. ¿Puede la velocidad de un cohete rebasar la rapidez de escape del combustible? Explique.

27. A principios del siglo XX, Robert Goddard propuso enviar un cohete a la Luna. Sus críticos argumentaron que en el vacío, como el que existe entre la Tierra y la Luna, los gases emitidos por el cohete no tendrían nada contra qué empujar para impulsar el cohete. Según la revista *Scientific American* (enero de 1975), Goddard colocó una pistola en un vacío y con ella disparó un cartucho de salva. (Un cartucho de salva no tiene balas y dispara sólo el relleno y gases calientes producidos por la pólvora). ¿Qué ocurrió cuando disparó el arma?

28. Explique cómo podría usarse un globo aerostático para demostrar el mecanismo que hace posible la propulsión de cohetes.

29. Sobre el tema de las siguientes posiciones, exprese el lector su propio punto de vista y explique para apoyarlo. (a) La mejor teoría del movimiento es que la fuerza produce aceleración. (b) La verdadera medida de la efectividad de una fuerza es el trabajo que ésta realiza, y la mejor teoría del movimiento es que el trabajo realizado sobre un objeto cambia su energía. (c) La verdadera medida del efecto de una fuerza es el impulso, y la mejor teoría de movimiento es que el impulso aplicado en un objeto cambia su cantidad de movimiento.

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, difícil = solución guiada con sugerencias disponibles en http://www.pse6.com

= use computadora para resolver el problema = problemas numéricos y simbólicos por pares

Sección 9.1 Cantidad de movimiento lineal y su conservación

1. Una partícula de 3.00 kg tiene una velocidad de $(3.00\hat{i} - 4.00\hat{j})$. (a) Encuentre sus componentes x y y de la cantidad de movimiento. (b) Encuentre la magnitud y dirección de su cantidad de movimiento.

2. Una pelota de 0.100 kg es lanzada al aire verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 15.0 m/s. Encuentre la cantidad de movimiento de la pelota (a) en su máxima altura y (b) a la mitad de su máxima altura.

3. ¿Con qué rapidez puede el lector hacer que se mueva la Tierra? En particular, cuando salta tan alto como pueda, ¿cuál es el orden de magnitud de la máxima rapidez de retroceso que le dé a la Tierra? Modele la Tierra como un cuerpo perfectamente sólido. En su resolución, exprese las cantidades físicas que tome como datos y los valores que mida o estime para ellos.

4. Dos bloques de masas M y $3M$ se colocan sobre una superficie horizontal sin fricción. Un resorte ligero está unido a uno de ellos, y los bloques son empujados junto con el resorte entre ellos (figu-

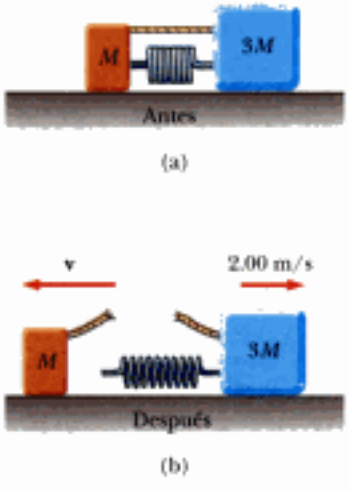


Figura P9.4

Materiał chroniony prawem autorskim

ra P9.4). Una cuerda, que inicialmente mantiene juntos los bloques, se quema; después de esto, el bloque de masa $3M$ se mueve a la derecha con una rapidez de 2.00 m/s. (a) ¿Cuál es la rapidez del bloque de masa M? (b) Encuentre la energía potencial elástica original en el resorte si $M = 0.350$ kg.

5. (a) Una partícula de masa m se mueve con cantidad de movimiento p. Demuestre que la energía cinética de la partícula es $K = p^2/2m$. (b) Exprese la magnitud de la cantidad de movimiento de la partícula en términos de su energía cinética y la masa.

Sección 9.2 Impulso y cantidad de movimiento

6. Un amigo dice que, mientras tenga puesto su cinturón de seguridad, puede sujetar un niño de 12.0 kg en un choque de frente a 60.0 mi/h con un muro de ladrillo en el que el compartimiento de pasajeros del auto se detiene en 0.050 0 s. Demuestre que la violenta fuerza durante el choque va a arrebatar al niño de los brazos del amigo. Un niño siempre debe estar en una silla para niño asegurada con un cinturón de seguridad en el asiento trasero de un auto.

7. En la figura P9.7 se muestra una gráfica estimada de fuerza *vs.* tiempo para una pelota de béisbol golpeada por un bat. De esta curva, determine (a) el impulso comunicado a la pelota, (b) la fuerza promedio ejercida sobre la pelota y (c) la máxima fuerza ejercida sobre la pelota.

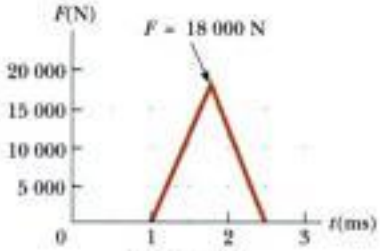


Figura P9.7

8. Una pelota de 0.150 kg de masa se deja caer del reposo desde una altura de 1.25 m. Rebota del piso para alcanzar una altura de 0.960 m. ¿Qué impulso dio el piso a la pelota?

9. Una esfera de acero de 3.00 kg golpea una pared con una rapidez de 10.0 m/s a un ángulo de 60.0° con la superficie. Rebota con la misma velocidad y ángulo (figura P9.9). Si la esfera está en contacto con la pared durante 0.200 s, ¿cuál es la fuerza promedio ejercida por la pared sobre la esfera?

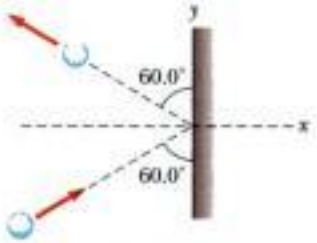


Figura P9.9

10. Un jugador de tenis recibe un tiro con la pelota (0.600 0 kg) que se desplaza horizontalmente a 50.0 m/s y regresa el tiro con la pelota, moviéndose horizontalmente a 40.0 m/s en dirección opuesta. (a) ¿Cuál es el impulso comunicado a la pelota por la raqueta? (b) ¿Qué trabajo realiza la raqueta sobre la pelota?

11. En un juego de softbol de lanzamiento lento, una pelota de softbol de 0.200 kg cruza el plato a 15.0 m/s a un ángulo de 45.0° abajo de la horizontal. El bateador golpea la pelota hacia el jardín central, dándole una velocidad de 40.0 m/s a 30.0° arriba de la horizontal. (a) Determine el impulso comunicado a la pelota. (b) Si la fuerza sobre la pelota aumenta linealmente durante 4.00 ms, se mantiene constante durante 20.0 ms, y luego decrece a cero linealmente en otros 4.00 ms, ¿cuál es la máxima fuerza sobre la pelota?

12. Una nadadora profesional se lanza desde una plataforma de 10 m sobre la superficie del agua. Estime el orden de magnitud de la fuerza promedio de impacto que ella experimenta en su colisión con el agua. Exprese las cantidades que tome como datos y sus valores.

13. Una manguera de jardín se mantiene como se muestra en la figura P9.13. La manguera está originalmente llena de agua sin movimiento. ¿Qué fuerza adicional es necesaria para mantener estacionaria la boquilla después de conectar el flujo de agua, si la tasa de descarga es de 0.600 kg/s con una rapidez de 25.0 m/s?

Figura P9.13

14. Un deslizador de masa m está libre de deslizarse a lo largo de una vía horizontal de aire. Es empujado contra un lanzador en un extremo de la vía. Modelo el lanzador como un resorte ligero de constante de fuerza k comprimido una distancia x. El deslizador se suelta desde el reposo. (a) Demuestre que el deslizador alcanza una rapidez de $v = x(k/m)^{1/2}$. (b) ¿Alcanza una mayor rapidez un deslizador de masa grande o pequeña? (c) Demuestre que el impulso impartido al deslizador está dado por la expresión $x(km)^{1/2}$. (d) ¿Se inyecta un mayor impulso en una masa grande o en una pequeña? (e) ¿Se realiza más trabajo en una masa grande o en una pequeña?

Sección 9.3 Colisiones en una dimensión

15. Las fotografías estroboscópicas de alta velocidad muestran que la cabeza de un palo de golf, de 200 g de masa, se mueve a 55.0 m/s justo antes de golpear una pelota de golf de 46.0 g en reposo sobre una te. Después de la colisión, la cabeza del palo se mueve (en la misma dirección) a 40.0 m/s. Encuentre la rapidez de la pelota de golf inmediatamente después del impacto.

16. Una tiradora de arco dispara una flecha hacia una diana que se desliza hacia ella con una rapidez de 2.50 m/s sobre una superficie

Materiał chroniony prawem autorskim

lisa y resbalosa. La flecha de 22.5 g es disparada con una rapidez de 35.0 m/s y atraviesa la diana de 300 g, que es detenida por el impacto. ¿Cuál es la rapidez de la flecha después de atravesar la diana?

17. Una bala de 10.0 g es disparada a un bloque estacionario de madera (m = 5.00 kilos). El movimiento relativo de la bala se detiene dentro del bloque. La rapidez de la combinación formada por la bala y la madera inmediatamente después de la colisión es 0.600 m/s. ¿Cuál fue la rapidez original de la bala?

18. Un furgón de ferrocarril de 2.50×10^4 kg de masa se mueve con una rapidez de 4.00 m/s. Choca y se acopla con otros tres furgones acoplados, cada uno de la misma masa que el furgón solo y que se mueven en la misma dirección con una rapidez inicial de 2.00 m/s. (a) ¿Cuál es la rapidez de los cuatro furgones después de la colisión? (b) ¿Cuánta energía mecánica se pierde en la colisión?

19. Cuatro furgones de ferrocarril, cada uno de 2.50×10^4 kg de masa, están acoplados juntos y se mueven por inercia a lo largo de vías horizontales a una rapidez v_i hacia el sur. Un actor de cine, muy fuerte pero muy tonto, que viaja en el segundo furgón, desacopla el furgón del frente y le da un gran empujón, aumentando así su rapidez a 4.00 m/s hacia el sur. Los tres furgones restantes continúan moviéndose hacia el sur, ahora a 2.00 m/s. (a) Encuentre la rapidez inicial de los furgones. (b) ¿Cuánto trabajo realizó el actor? (c) Exprese la relación entre el proceso descrito aquí y el proceso del Problema 18.

20. Dos bloques están libres de deslizarse a lo largo de una vía de madera sin fricción, *ABC*, que se muestra en la figura P9.20. El bloque de masa m_1 = 5.00 kg se suelta desde *A*. Sobresaliendo de su extremo delantero está el polo norte de un potente imán, que repele el polo norte de un imán idéntico incrustado en el extremo trasero del bloque de masa m_2 = 10.0 kilos, inicialmente en reposo. Los dos bloques nunca se tocan. Calcule la máxima altura a la que m_1 sube después de la colisión elástica.

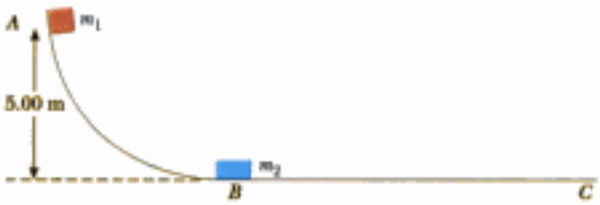


Figura P9.20

21. Una muchacha de 45.0 kg está de pie sobre un madero que tiene una masa de 150 kg. El madero, originalmente en reposo, está libre de deslizarse sobre un lago helado, que es una superficie de apoyo plana y sin fricción. La muchacha empieza a caminar a lo largo del madero a una rapidez constante de 1.50 m/s con respecto al madero. (a) ¿Cuál es su rapidez con respecto a la superficie del hielo? (b) ¿Cuál es la rapidez del madero con respecto a la superficie del hielo?

22. Casi todos sabemos intuitivamente que, en un choque de frente entre un gran camión de volteo y un pequeño auto compacto, es mejor estar en el camión que en el auto. ¿Por qué es esto? Muchas personas imaginan que la fuerza de colisión ejercida sobre el auto es mucho mayor que la experimentada por el camión. Para justificar este punto de vista, afirman que el auto resulta aplastado mientras que el camión apenas tiene una abolladura. Esta idea de fuerzas desiguales, por supuesto, es falsa. La tercera ley de Newton nos dice que ambos cuerpos experimentan fuerzas de la misma magnitud. El camión sufre menos daño porque está hecho de metal fuerte. Pero, ¿qué pasa a los dos conductores? ¿Experimentan las mismas fuerzas? Para contestar esta pregunta, suponga que cada uno de los vehículos está inicialmente moviéndose a 8.00 m/s y que experimentan una colisión de frente perfectamente inelástica. Cada uno de los conductores tiene una masa de 80.0 kilos. Incluyendo los conductores, las masas totales vehiculares son 800 kg para el auto y 4 000 kg para el camión. Si el tiempo de colisión es de 0.120 s, ¿qué fuerza ejerce el cinturón de seguridad sobre cada conductor?

23. Un neutrón en un reactor nuclear experimenta una colisión elástica de frente con un núcleo de un átomo de carbono que inicialmente está en reposo. (a) ¿Qué fracción de energía cinética del neutrón se transfiere al núcleo de carbono? (b) Si la energía cinética inicial del neutrón es 1.60×10^{-13} J, encuentre su energía cinética final y la energía cinética del núcleo de carbono después de la colisión. (La masa del núcleo de carbono es casi 12.0 veces la masa del neutrón).

24. Como se ve en la figura P9.24, una bala de masa m y rapidez v atraviesa completamente el disco de un péndulo de masa M. La bala emerge con una rapidez $v/2$. El disco del péndulo está suspendido por una varilla rígida de longitud ℓ y masa despreciable. ¿Cuál es el valor mínimo de v tal que el disco del péndulo apenas oscile todo un círculo vertical completo?

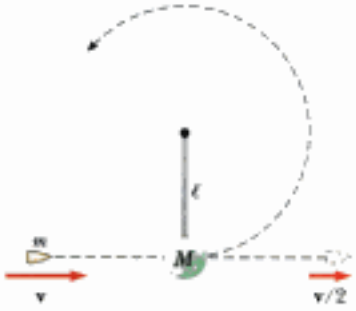


Figura P9.24

25. Una bola de arcilla pegajosa de 12.0 g se lanza horizontalmente a un bloque de madera de 100 g inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal. La arcilla se pega al bloque. Después del impacto, el bloque se desliza 7.50 m antes de detenerse. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es 0.650, ¿cuál era la rapidez de la arcilla inmediatamente antes del impacto?

26. Una bala de 7.00 g, cuando es disparada desde una pistola a un bloque de madera de 1.00 kg sujeto en un tornillo de banco, penetra el bloque a una profundidad de 8.00 cm. **¿Qué pasaría si?** Este bloque de madera es colocado sobre una superficie horizontal sin fricción, y una segunda bala de 7.00 g es disparada desde una pistola en el bloque. ¿A qué profundidad penetra la bala en el bloque en este caso?

27. (2) Tres carros de masas de 4.00 kg, 10.0 kg y 3.00 kg se mueven sobre una vía horizontal sin fricción con magnitudes de rapidez de 5.00 m/s, 3.00 m/s, y 4.00 m/s, como se ve en la figura P9.27. Unos acopladores Velcro hacen que los carros se peguen entre sí después de chocar. Encuentre la velocidad final del tren de tres carros. (b) **¿Qué pasaría si?** La respuesta que el estudiante dé, ¿requiere que todos los carros choquen y se peguen juntos al mismo tiempo? ¿Qué pasa si chocan en un orden diferente?

Materiał chroniony prawem autorskim

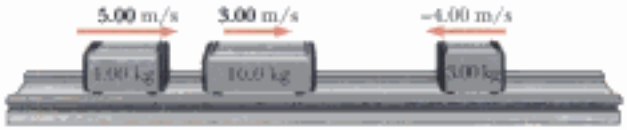


Figura P9.27

Sección 9.4 Colisiones en dos dimensiones

28. Un defensa de 90.0 kg que corre al este con una rapidez de 5.00 m/s es tracleado por un oponente de 95.0 kg que corre al norte con una rapidez de 3.00 m/s. Si la colisión es perfectamente inelástica, (a) calcule la rapidez y dirección de los jugadores inmediatamente después de la tacleada y (b) determine la energía mecánica perdida como resultado de la colisión. Tome en cuenta la energía faltante.

29. Dos discos de tejo de igual masa, uno anaranjado y el otro amarillo, toman parte en una colisión tangencial elástica. El disco amarillo está inicialmente en reposo y es golpeado por el disco anaranjado que se mueve con una rapidez de 5.00 m/s. Después de la colisión, el disco anaranjado se mueve a lo largo de una dirección que forma un ángulo de 37.0° con su dirección inicial de movimiento. Las velocidades de los dos discos son perpendiculares después de la colisión. Determine la rapidez final de cada uno de los discos.

30. Dos discos de tejo de igual masa, uno anaranjado y el otro amarillo, toman parte en una colisión tangencial elástica. El disco amarillo está inicialmente en reposo y es golpeado por el disco anaranjado que se mueve con una rapidez v_i. Después de la colisión, el disco amarillo se mueve a lo largo de una dirección que forma un ángulo θ con su dirección inicial de movimiento. Las velocidades de los dos discos son perpendiculares después de la colisión. Determine la rapidez final de cada uno de los discos.

31. La masa del disco azul de la figura P9.31 es 20.0% mayor que la masa del verde. Antes de chocar, los discos se aproximan entre sí con cantidades de movimiento de iguales magnitudes y direcciones opuestas, y el disco verde tiene una rapidez inicial de 10.0 m/s. Encuentre la rapidez de los discos después de la colisión si la mitad de la energía cinética se pierde durante la colisión.

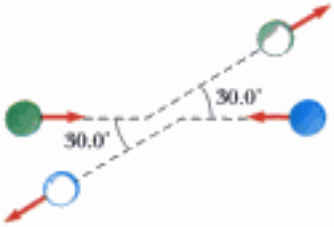


Figura P9.31

32. Dos automóviles de igual masa se aproximan a un crucero. Un vehículo viaja con una velocidad de 13.0 m/s hacia el este, y el otro viaja al norte con rapidez v_{2i}. Ninguno de los conductores ve al otro. Los vehículos chocan en el crucero y se quedan pegados, dejando marcas paralelas de patinazo a un ángulo de 55.0° al norte del este. El límite de rapidez para ambos caminos es de 35 mi/h, y el conductor del vehículo que se dirige al norte dice que él estaba dentro del límite de rapidez cuando ocurrió el choque. ¿Dice la verdad?

33. Una bola de billar que se mueve a 5.00 m/s golpea una bola estacionaria de la misma masa. Después de la colisión, la primera bola se mueve, a 4.33 m/s, a un ángulo de 30.0° con respecto a la línea original de movimiento. Si se supone una colisión elástica (y sin hacer caso de la fricción y el movimiento de rotación), encuentre la velocidad de la bola golpeada después de la colisión.

34. Un protón, que se mueve con velocidad $\hat{\mathbf{i}}$, choca elásticamente con otro protón que está inicialmente en reposo. Si los dos protones tienen igual rapidez después del choque, encuentre (a) la rapidez de cada protón después de la colisión en términos de v_i y (b) la dirección de los vectores de velocidad después de la colisión.

35. Un cuerpo de 3.00 kg de masa, que se mueve con una velocidad inicial de $\hat{\mathbf{i}}$, choca y se queda pegado con un cuerpo de 2.00 kg de masa con una velocidad inicial de $\hat{\mathbf{j}}$. Encuentre la velocidad final del cuerpo combinado.

36. Dos partículas con masas m y $3m$ se mueven una hacia la otra a lo largo del eje x con la misma rapidez inicial v_i. La partícula m se desplaza a la izquierda, en tanto que la partícula $3m$ viaja a la derecha. Experimentan una colisión tangencial elástica tal que la partícula m se mueve hacia abajo después de la colisión, a ángulos rectos desde su dirección inicial. (a) Encuentre la rapidez final de las dos partículas. (b) ¿Cuál es el ángulo θ el que se dispersa la partícula $3m$?

37. Un núcleo atómico inestable de masa 17.0×10^{-27} kg inicialmente en reposo se desintegra en tres partículas. Una de las partículas, de masa 5.00×10^{-27} kg, se mueve a lo largo del eje y con una rapidez de 6.00×10^{6} m/s. Otra partícula, de masa 8.40×10^{-27} kilos, se mueve a lo largo del eje x con una rapidez de 4.00×10^{6} m/s. Encuentre (a) la velocidad de la tercera partícula y (b) el aumento total de energía cinética en el proceso.

Sección 9.5 El centro de masa

38. Cuatro cuerpos están situados a lo largo del eje y como sigue: un cuerpo de 2.00 kg está a +3.00 m, un cuerpo de 3.00 kg está a +2.50 m, un cuerpo de 2.50 kg está en el origen, y un cuerpo de 4.00 kg está a −0.500 m. ¿Dónde está el centro de masa de estos cuerpos?

39. Una molécula de agua está formada por un átomo de oxígeno con dos átomos de hidrógeno unidos a él (figura P9.39). El ángulo entre los dos enlaces es 106°. Si los enlaces son de 0.100 nm de largo, ¿dónde está el centro de masa de la molécula?

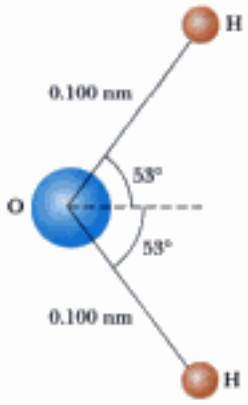


Figura P9.39

Materiał chroniony prawem autorskim

40. La masa de la Tierra es de 5.98×10^{24} kg, y la masa de la Luna es 7.36×10^{22} kg. La distancia de separación, medida entre sus centros, es 3.84×10^{8} m. Localice el centro de masa del sistema formado por la Tierra y la Luna, medido desde el centro de la Tierra.

41. Una pieza uniforme de lámina de acero tiene la forma que se ve en la figura P9.41. Calcule las coordenadas x e y del centro de masa de la pieza.

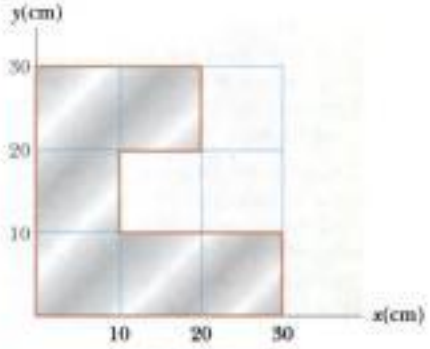


Figura P9.41

42. (a) Considere un cuerpo sólido cuyas diferentes porciones tienen diferentes elevaciones. Suponga que la aceleración en caída libre es uniforme sobre el cuerpo. Demuestre que la energía potencial gravitacional del sistema formado por el cuerpo y la Tierra está dada por $U_g = Mgy_{CM}$, donde M es la masa total del cuerpo y y_{CM} es la elevación de su centro de masa sobre el nivel de referencia escogido. (b) Calcule la energía potencial de gravitacional asociada con una rampa construida sobre un terreno nivelado, con piedra de densidad 3 800 kg/m^3 y en todas sus dimensiones es de 3.60 m de ancho. En una vista lateral, la rampa se ve como triángulo recto con altura 15.7 m en el extremo superior y su base es de 64.8 m (figura P9.42).

Figura P9.42

43. Una varilla de 30.0 cm de longitud tiene una densidad lineal (masa por longitud) dada por

$$\lambda = 50.0\ \text{g/m} + 20.0x\ \text{g/m}^2,$$

donde x es la distancia desde un extremo, medida en metros. (a) ¿Cuál es la masa de la varilla? (b) ¿A qué distancia del extremo $x = 0$ está su centro de masa?

44. En los Juegos Olímpicos de 1968, el saltador Dick Fosbury, de la universidad de Oregon, introdujo una nueva técnica de salto de altura llamada "caída Fosbury." Contribuyó a mejorar la marca mundial en unos 30 cm y en la actualidad es usada por todos los saltadores de nivel mundial. En esta técnica, el saltador pasa boca arriba sobre la barra al tiempo que arquea la espalda cuanto le es posible, como se ve en la figura P9.44a. Esta acción coloca el centro de masa fuera de su cuerpo, abajo de su espalda. A medida que su cuerpo pasa sobre la barra, su centro de masa pasa abajo de la barra. Debido a que una energía de entrada dada implica cierta elevación para su centro de masa, la acción de arquear la espalda significa que su cuerpo está más alto que si su espalda estuviera recta. Como modelo, considere el saltador como una varilla delgada uniforme de longitud L. Cuando la varilla está recta, su centro de masa está en su centro. Ahora doble la varilla en un arco circular, de modo que subtiende un ángulo de 90.0° en el centro del arco, como se ve en la figura P9.44b. En esta configuración, ¿qué tan fuera de la varilla está el centro de masa?

(a)

(b)

Figura P9.44

Sección 9.6 Movimiento de un sistema de partículas

45. Una partícula de 2.00 kg tiene una velocidad de $(2.00\hat{\mathbf{i}} - 3.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s, y una partícula de 3.00 kg tiene una velocidad de $(1.00\hat{\mathbf{i}} + 6.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s. Encuentre (a) la velocidad del centro de masa y (b) la cantidad total de movimiento del sistema.

46. Considere un sistema de dos partículas en el plano xy: $m_1 = 2.00$ kg está en la ubicación $\mathbf{r}_1 = (1.00\hat{\mathbf{i}} + 2.00\hat{\mathbf{j}})$ m y tiene una velocidad de $(3.00\hat{\mathbf{i}} + 0.500\hat{\mathbf{j}})$; $m_2 = 3.00$ kg está en $\mathbf{r}_2 = (-4.00\hat{\mathbf{i}} - 3.00\hat{\mathbf{j}})$ y tiene una velocidad de $(3.00\hat{\mathbf{i}} - 2.00\hat{\mathbf{j}})$. (a) Grafique

Materiał chroniony prawem autorskim

estas partículas en papel milimétrico o cuadrícula. Dibuje sus vectores de posición y muestre sus velocidades. (b) Encuentre la posición del centro de masa del sistema y márquela en la cuadrícula. (c) Determine la velocidad del centro de masa y también muéstrela sobre el diagrama. (d) ¿Cuál es la cantidad total de movimiento lineal del sistema?

47. Romeo (77.0 kg) divierte a Julieta (55.0 kg) al pulsar su guitarra desde la parte posterior de su bote en reposo en aguas en calma, a 2.70 m de distancia de Julieta, que está en el frente del bote. Después de la serenata, Julieta cuidadosamente se pasa a la parte posterior del bote (lejos de la playa) para plantar un beso en la mejilla de Romeo. ¿Cuánto se movió el bote de 80.0 kg hacia la playa a la que da el frente?

48. Una bola de masa 0.200 kg tiene una velocidad de $150\hat{\mathbf{i}}$ m/s; una bola de 0.300 kg de masa tiene una velocidad de $-0.400\hat{\mathbf{i}}$ m/s. Se encuentran en una colisión elástica de frente. (a) Encuentre sus velocidades después de la colisión. (b) Encuentre la velocidad del centro de masa de ellas antes y después de la colisión.

Sección 9.7 Propulsión de un cohete

49. La primera etapa del vehículo espacial Saturno V consumió combustible y oxidante a razón de 1.50×10^4 kg/s, con una rapidez de escape de 2.60×10^3 m/s. (a) Calcule el empuje producido por estos motores. (b) Encuentre la aceleración del vehículo inmediatamente que despega de la plataforma de lanzamiento en la Tierra, si la masa inicial del vehículo era de 3.00×10^6 kilos. *Nota:* El estudiante debe incluir la fuerza gravitacional para resolver la parte (b).

50. Los motores cohete modelo se clasifican por el empuje, duración del empuje e impulso total, entre otras características. Un motor cohete modelo tamaño C5 tiene un empuje promedio de 5.26 N, una masa de combustible de 12.7 g, y una masa inicial de 25.5 g. La duración del combustible es 1.90 s. (a) ¿Cuál es la rapidez promedio de escape del motor? (b) Si este motor se coloca en un cuerpo de cohete de 53.5 g de masa, ¿cuál es la velocidad final del cohete si es disparada hacia el espacio exterior? Suponga que el combustible se quema a un ritmo constante.

51. Un cohete para uso en las profundidades del espacio debe ser capaz de impulsar una carga total (carga útil más bastidor del cohete y motor) de 3.00 toneladas métricas a una rapidez de 10 000 m/s. (a) Tiene motor y combustible diseñados para producir una rapidez de escape de 2 000 m/s. ¿Cuánto combustible más oxidante se requieren? (b) Si un diseño diferente de combustible y motor pudieran dar una rapidez de escape de 5 000 m/s, ¿qué cantidad de combustible y oxidante sería necesaria para el mismo trabajo?

52. *Ciencia de cohetes.* Un cohete tiene una masa total $M_i = 360$ kg, incluyendo 330 kg de combustible y oxidante. En el espacio interestelar arranca desde el reposo, encendiendo su motor en el tiempo $t = 0$, y expulsa los gases a una rapidez relativa $v_e = 1\,500$ m/s a un ritmo constante $k = 2.50$ kg/s. El combustible durará un tiempo real de combustión de 330 kg/(2.5 kg/s) = 132 s, pero define un "tiempo proyectado de vaciado" como $T_p = M_i/k = 144$ s. (Éste sería el tiempo quemándose si el combustible pudiera usar su carga útil y los tanques de combustible como combustible, e incluso las paredes de la cámara de combustión.) (a) Demuestre que durante la combustión la velocidad del cohete está dada como función del tiempo por

$$v(t) = -v_e \ln[1 - (t/T_p)]$$

(b) Haga una gráfica de la velocidad del cohete como función del tiempo, para tiempos que corren de 0 a 132 s. (c) Demuestre que la aceleración del cohete es

$$a(t) = v_e/(T_p - t)$$

(d) Haga una gráfica de la aceleración como función del tiempo. (e) Demuestre que la posición del cohete es

$$x(t) = v_e(T_p - t)\ln[1 - (t/T_p)] + v_e t$$

(f) Haga una gráfica de la posición durante la quema.

53. Una nave espacial en órbita es descrita no como un ambiente de "cero g", sino como "microgravedad" para sus ocupantes y para experimentos a bordo. Los astronautas experimentan bandazos debido a los movimientos de equipo y otros astronautas, y debido a la descarga de materiales desde la nave. Suponga que una nave espacial de 3 500 kg experimenta una aceleración de $2.50\ \mu g = 2.45 \times 10^{-5}$ m/s^2 debido a una fuga de uno de sus sistemas hidráulicos de control. Se sabe que el fluido escapa con una rapidez de 70.0 m/s en el vacío del espacio. ¿Cuánto líquido se perderá en 1 h si la fuga no se detiene?

Problemas adicionales

54. Dos deslizadores se ponen en movimiento sobre una vía de aire. Un resorte de constante de fuerza k está unido al extremo cercano de un deslizador. El primer deslizador, de masa m_1, tiene una velocidad $\mathbf{v}_1$, y el segundo deslizador, de masa m_2, se mueve más lentamente, con velocidad $\mathbf{v}_2$, como se ve en la figura P9.54. Cuando m_1 choca con el resorte unido a m_2 y comprime el resorte a su máxima compresión $x_{máx}$, la velocidad de los deslizadores es $\mathbf{v}$. En términos de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, m_1, m_2 y k, encuentre (a) la velocidad $\mathbf{v}$ a máxima compresión, (b) la máxima compresión $x_{máx}$, y (c) la velocidad de cada deslizador después que m_1 ha perdido contacto con el resorte.

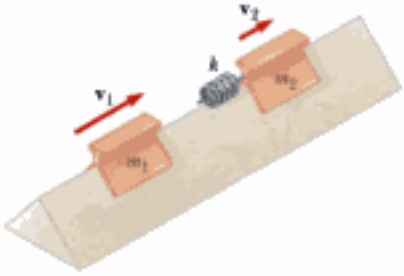


Figura P9.54

55. **Problema de repaso.** Una persona de 60.0 kg que corre a una rapidez inicial de 4.00 m/s salta sobre un carro de 120 kg inicialmente en reposo (figura P9.55). La persona se desliza sobre la superficie superior del carro y finalmente llega al reposo con respecto al carro. El coeficiente de fricción cinética entre la persona y el carro es de 0.400. La fricción entre el carro y el suelo se puede despreciar. (a) Encuentre la velocidad final de la persona y el carro con respecto al suelo. (b) Encuentre la fuerza de fricción que actúa sobre la persona mientras él se desliza por la superficie superior del carro. (c) ¿Cuánto tiempo actúa la fuerza de fricción sobre la persona? (d) Encuentre el cambio en la cantidad de movimiento de la persona y el cambio en la cantidad de movimiento del carro. (e) Determine el desplazamiento de la persona con respecto al suelo mientras se desliza sobre el carro. (f) Determine

Materiał chroniony prawem autorskim

el desplazamiento del carro con respecto al suelo mientras la persona se desliza. (g) Encuentre el cambio en energía cinética de la persona. (h) Encuentre el cambio en energía cinética del carro. (i) Explique por qué las respuestas a (g) y (h) difieren. (¿Qué clase de colisión es ésta, y qué explica la pérdida de energía mecánica?).

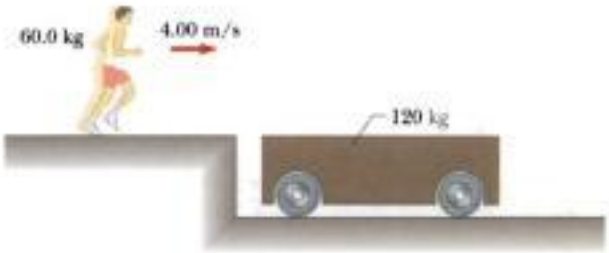


Figura P9.55

56. Una pelota de golf (m = 46.0 g) es golpeada con una fuerza que forma un ángulo de 45.0° con la horizontal. La pelota llega al suelo a 200 m de distancia sobre una calle (de golf). Si el palo de golf y la pelota están en contacto durante 7.00 ms, ¿cuál es la fuerza promedio de impacto? (Desprecie la resistencia del aire).

57. Un astronauta de 80.0 kg está trabajando en los motores de su nave, que se desplaza en el espacio con una velocidad constante. El astronauta, con el deseo de tener una mejor vista del universo, se empuja contra la nave y más tarde se encuentra 30.0 m detrás de la nave. Sin un impulsor, la única forma de regresar a la nave es lanzar su llave de 0.500 kg directamente alejándose de la nave. Si él empuja la llave con una rapidez de 20.0 m/s con respecto a la nave, ¿cuánto tarda el astronauta en llegar a la nave?

58. Una bala de masa m es disparada a un bloque de masa M inicialmente en reposo en el borde de una mesa sin fricción de altura h (figura P9.58). La bala permanece en el bloque, y después del impacto el bloque cae a una distancia d de la parte baja de la mesa. Determine la rapidez inicial de la bala.

Figura P9.58

59. Una esfera de 0.500 kg que se mueve con una velocidad $(2.00\hat{\mathbf{i}} - 3.00\hat{\mathbf{j}} + 1.00\hat{\mathbf{k}})$ m/s golpea otra esfera de masa 1.50 kg que se mueve con una velocidad $(-1.00\hat{\mathbf{i}} + 2.00\hat{\mathbf{j}} - 3.00\hat{\mathbf{k}})$ m/s. (a) Si la velocidad de la esfera de 0.500 kg después de la colisión es $(-1.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}} - 8.00\hat{\mathbf{k}})$ encuentre la velocidad final de la esfera de 1.50 kg e identifique la clase de colisión (elástica, inelástica, o perfectamente inelástica). (b) Si la velocidad de la esfera de 0.500 kg después de la colisión es $(-0.250\hat{\mathbf{i}} + 0.750\hat{\mathbf{j}} - 2.00\hat{\mathbf{k}})$ m/s, encuentre la velocidad final de la esfera de 1.50 kg, e identifique la clase de colisión. (c) **¿Qué pasaría si?** Si la velocidad de la esfera de 0.500 kg después de la colisión es $(-1.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}} + a\hat{\mathbf{k}})$ m/s,, encuentre el valor de a y la velocidad de la esfera de 1.50 kg después de una colisión elástica.

60. Un pequeño bloque de masa m_1 = 0.500 kg se suelta desde el reposo en la parte superior de una cuña curva sin fricción de masa m_2 = 3.00 kg, que apoya sobre una superficie horizontal sin fricción como en la figura P9.60a. Cuando el bloque se separa de la cuña, su velocidad se mide y es 4.00 m/s a la derecha, como en la figura P9.60b. (a) ¿Cuál es la velocidad de la cuña después que el bloque llega a la superficie horizontal? (b) ¿Cuál es la altura h de la cuña?

Figura P9.60

61. Una cubeta de masa m y volumen V se une a un carro ligero, cubriendo por completo su superficie superior. El carro recibe un empujón a lo largo de un camino recto, horizontal y liso. Está lloviendo, de modo que el carro corre sin fricción, con la cubeta gradualmente llenándose de agua. Para el tiempo en que la cubeta está llena, su rapidez es v. (a) ¿Cuál era la rapidez inicial v_i del carro? Sea ρ la densidad del agua. (b) **¿Qué pasaría si?** Suponga que cuando la cubeta está llena a la mitad, le aparece una pequeña fuga en el fondo, de modo que el nivel del agua permanece constante de ahí en adelante. Describa cualitativamente lo que ocurre a la rapidez del carro después que aparece la fuga.

62. Una bombera de 75.0 kg baja por un poste resbaladizo mientras una fuerza de fricción constante de 300 N retarda su movimiento. Una plataforma horizontal de 20.0 kg es sostenida por un resorte en el fondo del poste para amortiguar la caída. La bombera inicia desde el reposo 4.00 m arriba de la plataforma, y la constante de resorte es de 4 000 N/m. Encuentre (a) la rapidez de la bombera inmediatamente antes que ella choque con la plataforma y (b) la máxima distancia que el resorte se comprime. (Suponga que la fuerza de fricción actúa durante todo el movimiento).

63. George de la Selva, con masa m, se columpia de una liana ligera que cuelga de una rama de un árbol estacionario. Una segunda liana de igual longitud cuelga del mismo punto, y un gorila de mayor masa M se columpia en dirección contraria en ella. Ambas lianas están horizontales cuando los primates inician desde el reposo en el mismo momento. George y el gorila se encuentran en el punto más bajo de sus oscilaciones. Cada uno teme que se reviente una liana, de modo que se agarran uno del otro y aguantan. Se columpian juntos hacia arriba, alcanzando un punto donde las lianas forman un ángulo de 35.0° con la vertical. (a) Encuentre el valor de la razón m/M. (b) **¿Qué pasaría si?** Intente esto en casa. Amarre un pequeño imán y un tornillo de acero a

Materiał chroniony prawem autorskim

extremos opuestos de un resorte. Sostenga el centro de la cuerda fija para representar la rama del árbol, y reproduzca un modelo de los movimientos de George y el gorila. ¿Qué cambios en su análisis harán que éste aplique a esta situación? **¿Qué pasaría si?** Suponga que el imán es potente, de modo que notoriamente atrae al tornillo a una distancia de unos centímetros. Entonces el tornillo se estará moviendo más rápido justo antes que se pegue al imán. ¿Hace esto una diferencia?

64. Un cañón está rígidamente unido a un carro, que puede moverse a lo largo de rieles horizontales pero está conectado a un poste por medio de un resorte grande, inicialmente sin estirar y con constante de fuerza $k = 2.00 \times 10^4$ N/m, como en la figura P9.64. El cañón dispara un proyectil de 200 kilos a una velocidad de 125 m/s dirigido 45.0° sobre la horizontal. (a) Si la masa del cañón y su carro es de 5 000 kilos, encuentre la rapidez de retroceso del cañón. (b) Determine la máxima extensión del resorte. (c) Encuentre la máxima fuerza que el resorte ejerce sobre el carro. (d) Considere el sistema formado por el cañón, carro y proyectil. ¿Se conserva la cantidad de movimiento de este sistema durante el disparo? ¿Por qué sí o por qué no?

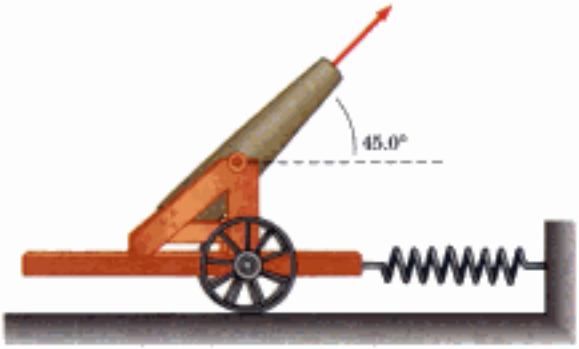


Figura P9.64

65. Una estudiante realiza un experimento de péndulo balístico usando un aparato semejante al que se muestra en la figura 9.11b. Ella obtiene los siguientes datos promedio: $h = 8.68$ cm, $m_1 = 68.8$ g, y $m_2 = 263$ g. Los símbolos se refieren a las cantidades en la figura 9.11a. (a) Determine la rapidez inicial v_{1A} del proyectil. (b) La segunda parte de su experimento es obtener v_{1A} al disparar el mismo proyectil horizontalmente (con el péndulo removido de la trayectoria), al medir su posición horizontal final x y la distancia de caída y (figura P9.65). Demuestre que la rapidez inicial del proyectil está relacionada con x y y por medio de la relación

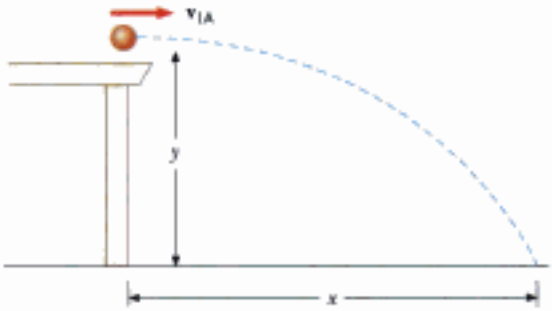


Figura P9.65

$$v_{1A} = \frac{x}{\sqrt{2y/g}}$$

¿Qué valor numérico obtiene ella para v_{1A} con base en sus valores medidos de $x = 257$ cm y $y = 85.3$ cm? ¿Qué factores podrían explicar la diferencia en este valor en comparación con el obtenido en la parte (a)?

66. Pequeños cubos de hielo, cada uno de masa 5.00 g, bajan por una pista sin fricción en un chorro continuo, como se ve en la figura P9.66. Iniciando desde el reposo, cada cubo baja toda una distancia vertical neta de 1.50 m y se separa del extremo inferior de la pista a un ángulo de 40.0° sobre la horizontal. En el punto más alto de su trayectoria subsiguiente, el cubo golpea una pared vertical y rebota con la mitad de la rapidez que tenía en el impacto. Si 10.0 cubos golpean la pared por segundo, ¿qué fuerza promedio es ejercida sobre la pared?

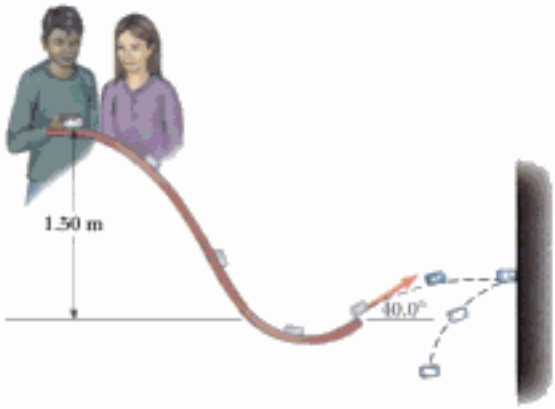


Figura P9.66

67. Una bala de 5.00 g que se mueve con una rapidez inicial de 400 m/s es disparada contra un bloque de 1.00 kg al que atraviesa, como se ve en la figura P9.67. El bloque, inicialmente esta en reposo en una superficie horizontal sin fricción, está conectado a un resorte con constante de fuerza de 900 N/m. Si el bloque se mueve 5.00 cm a la derecha después del impacto, encuentre (a) la rapidez a la que la bala emerge del bloque y (b) la energía mecánica convertida en energía interna en la colisión.

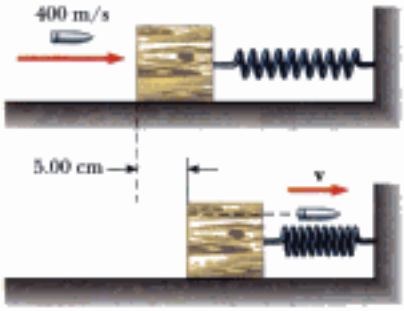


Figura P9.67

68. Considere como un sistema el Sol con la Tierra en una órbita circular a su alrededor. Encuentre la magnitud del cambio en la velocidad del Sol con respecto al centro de masa del sistema so-

Materiał chroniony prawem autorskim

bre un periodo de 6 meses. Desprecie la influencia de otros cuerpos celestes. El estudiante puede obtener los datos astronómicos necesarios de las pastas del libro.

69. **Problema de repaso.** Hay (podría decirse) tres teoría de movimiento parecidas. La segunda ley de Newton, que expresa que la fuerza total sobre un objeto le produce aceleración; el teorema del trabajo y la energía cinética, que expresa que el trabajo total sobre un objeto produce su cambio en la energía cinética; y el teorema del impulso y la cantidad de movimiento, que dice que el impulso total sobre un cuerpo produce el cambio en la cantidad de movimiento. En este problema, el estudiante compara predicciones de las tres teorías en un caso particular. Un cuerpo de 3.00 kg tiene una velocidad $7.00\hat{\mathbf{j}}$ m/s. A continuación, una fuerza total $12.0\hat{\mathbf{i}}$ N actúa sobre el cuerpo durante 5.00 s. (a) Calcule la velocidad final del cuerpo, usando el teorema del impulso y la cantidad de movimiento. (b) Calcule su aceleración a partir de $\mathbf{a} = (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i)/\Delta t$. (c) Calcule su aceleración a partir de $\mathbf{a} = \Sigma\mathbf{F}/m$. (d) Encuentre el desplazamiento vectorial del cuerpo a partir de $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}_i t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$. (e) Encuentre el trabajo realizado sobre el objeto desde $W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}$. (f) Encuentre la energía cinética final desde $\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_f\cdot\mathbf{v}_f$. (g) Encuentre la energía cinética final con $\frac{1}{2}mv_i^2 + W$.

70. Un cohete tiene masa total $M_i = 360$ kg, incluyendo 330 kg de combustible y oxidante. En el espacio interestelar inicia desde el reposo. Su motor se enciende en el tiempo $t = 0$ y expulsa gases de escape con una rapidez relativa $v_e = 1\,500$ m/s a un ritmo constante de 2.50 kg/s. La combustión dura hasta que el combustible se agota, en el tiempo 330 kg/(2.5 kg/s) = 132 s. Establezca y ejecute un análisis de computadora del movimiento, según el método de Euler. Encuentre (a) la velocidad final del cohete y (b) la distancia que recorre durante la quema.

71. Una cadena de longitud L y masa total M se suelta desde el reposo con su extremo inferior tocando apenas la parte superior de una mesa, como se ve en la figura P9.71a. Encuentre la fuerza ejercida por la mesa sobre la cadena después que la cadena ha caído toda una distancia x, como en la figura P9.71b. (Suponga que cada eslabón se detiene en el instante en que llega a la mesa).

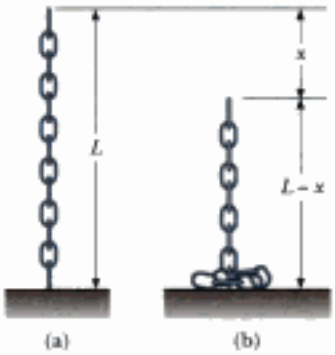


Figura P9.71

72. Arena de una tolva estacionaria cae sobre una banda transportadora en movimiento a razón de 5.00 kg/s, como se ve en la figura P9.72. La banda transportadora está sostenida por rodillos sin fricción y se mueve a una rapidez constante de 0.750 m/s bajo la acción de una fuerza externa horizontal constante $\mathbf{F}_{ext}$ proporcionada por el motor que mueve la cadena. Encuentre (a) la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento de la arena en la dirección horizontal, (b) la fuerza de fricción ejercida por la banda sobre la arena, (c) la fuerza externa $\mathbf{F}_{ext}$, (d) el trabajo realizado por $\mathbf{F}_{ext}$ en 1 s, y (e) la energía cinética adquirida por la arena que cae cada segundo debido al cambio en su movimiento horizontal. (f) ¿Por qué son diferentes las respuestas a (d) y (e)?

73. Un palo de golf está hecho de un eje conectado a una cabeza del palo. El palo de golf se puede modelar como una varilla uniforme de longitud ℓ y masa m_1 que se extiende radialmente desde la superficie de una esfera de radio R y masa m_2. Encuentre la ubicación del centro de masa del palo, medido desde el centro de la cabeza del palo.

Respuestas a las *preguntas rápidas*

9.1 (d) Dos cuerpos idénticos ($m_1 = m_2$) que se desplazan con la misma rapidez ($v_1 = v_2$) tienen las mismas energías cinéticas y las mismas magnitudes de cantidad de movimiento. También es posible, sin embargo, para combinaciones particulares de masas y velocidades satisfacer $K_1 = K_2$ pero no $p_1 = p_2$. Por ejemplo, un cuerpo de 1 kg que se mueva a 2 m/s tiene la misma energía cinética que un cuerpo de 4 kilos que se mueva a 1 m/s, pero es evidente que los dos no tienen las mismas cantidades de movimiento. En vista que no tenemos información acerca de masas y magnitudes de rapidez, no podemos escoger entre (a), (b) o (c).

9.2 (b), (c), (a) Cuanto más lenta sea la bola, más fácil es atraparla. Si la cantidad de movimiento de la bola de medicina es la misma que la cantidad de movimiento de la pelota de béisbol, la rapidez de la bola de medicina debe ser 1/10 de la rapidez de la pelota de béisbol debido a que la bola de medicina tiene 10 veces la masa. Si las energías cinéticas son iguales, la rapidez de la bola de medicina debe ser $1/\sqrt{10}$ de la rapidez de la pelota de béisbol debido al término cuadrado de la rapidez de la ecuación para K. La bola de medicina es más difícil de atrapar cuando tiene la misma rapidez que la pelota de béisbol.

9.3 (c) La pelota y la Tierra ejercen fuerzas una sobre la otra, de modo que ninguna es un sistema aislado. Debemos incluir ambas en el sistema para que la fuerza de interacción sea interna al sistema.

9.4 (d) De la ecuación 9.4, si $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ = constante, entonces se deduce que $\Delta\mathbf{p}_1 + \Delta\mathbf{p}_2 = 0$ y $\Delta\mathbf{p}_1 = -\Delta\mathbf{p}_2$. Mientras el cambio en cantidad de movimiento sea el mismo, el cambio en la *velocidad* no es más grande para el auto.

9.5 (c) y (e) El cuerpo 2 tiene una mayor aceleración debido a su menor masa. Por lo tanto, toma menos tiempo recorrer la dis-

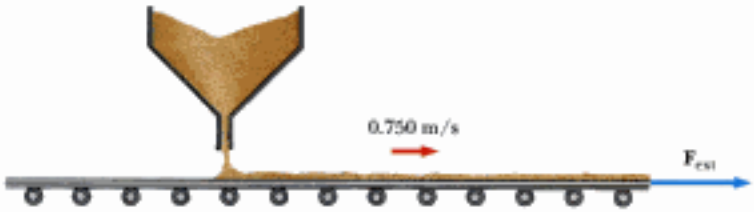


Figura P9.72

Materiał chroniony prawem autorskim

tancia d. Aun cuando la fuerza aplicada a los cuerpos 1 y 2 es la misma, el cambio en cantidad de movimiento es menor para el cuerpo 2 porque Δt es menor. El trabajo $W = Fd$ realizado sobre ambos cuerpos es el mismo porque F y d son iguales en los dos casos. Por lo tanto, $K_1 = K_2$.

9.6 (b) y (d). El mismo impulso se aplica a ambos cuerpos, de modo que experimentan el mismo cambio en cantidad de movimiento. El cuerpo 2 tiene una mayor aceleración debido a su menor masa. Por lo tanto, la distancia que el cuerpo 2 cubre en el intervalo Δt es mayor que la distancia para el cuerpo 1. En consecuencia, se realiza más trabajo sobre el cuerpo 2 y $K_2 > K_1$.

9.7 (a) Los tres son iguales. Como el pasajero pasa de la rapidez inicial del auto a un alto total, el cambio en cantidad de movimiento (igual al impulso) es igual, sin importar qué detenga al pasajero. (b) El tablero, el cinturón de seguridad, la bolsa de aire. El tablero detiene al pasajero muy rápidamente en un choque de frente, lo cual resulta en una fuerza muy grande. El cinturón de seguridad toma más tiempo, de modo que la fuerza es menor. Utilizada junto con el cinturón de seguridad, la bolsa de aire prolonga más aún el tiempo de frenado del pasajero, notablemente para su cabeza, que de otra forma se mueve violentamente hacia delante.

9.8 (a) Si se transforma toda la energía cinética inicial, entonces nada se mueve después de la colisión. En consecuencia, la cantidad final de movimiento del sistema es necesariamente cero y, por lo tanto, la cantidad inicial de movimiento del sistema debe ser cero. Mientras (b) y (d) *juntas* satisfacen las condiciones, ninguna lo haría *por sí sola*.

9.9 (b) Debido a que se conserva la cantidad de movimiento del sistema formado por la pelota de tenis de mesa y la bola de boliche, $\mathbf{p}_{Ti} + 0 = \mathbf{p}_{Tf} + \mathbf{p}_B$. Como la pelota de tenis de mesa rebota en la mucho más grande bola de boliche con aproximadamente la misma rapidez, $\mathbf{p}_{Tf} = -\mathbf{p}_{Ti}$. Como consecuencia, $\mathbf{p}_B = 2\mathbf{p}_{Ti}$. La energía cinética se puede expresar como $K = p^2/2m$. Debido a la masa mucho más grande de la bola de boliche, su energía cinética es mucho mayor que la de la pelota de tenis de mesa.

9.10 (b) La parte de donde se sujeta el bat tendrá menos masa que la parte del extremo del bat. Para ver por qué esto es así, tome el origen de coordenadas como el centro de masa antes de cortar el bat. Sustituya cada parte cortada con una pequeña esfera situada en el centro de masa de cada parte. La esfera que represente la pieza donde se sujeta el bat está más lejos del origen, pero el producto de menos masa y mayor distancia balancea el producto de mayor masa y menos distancia para la parte del extremo:

9.11 (a) Éste es el mismo efecto que el nadador que se lanza de la balsa que acabamos de ver. El sistema barco–pasajeros está aislado. Si los pasajeros empiezan todos a correr en una dirección, la rapidez del barco aumenta (*muy poco*) en la otra dirección.

9.12 (b) Una vez que dejen de correr, la cantidad de movimiento del sistema es igual a la que era antes que empezaran a correr; no se puede cambiar la cantidad de movimiento de un sistema aislado por medio de fuerzas internas. En caso que se piense que los pasajeros podrían hacer esto una y otra vez para aprovechar el aumento en rapidez *mientras estén corriendo*, recuerde que van a reducir la velocidad del barco cada vez que regresen a la proa.

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 10

Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

10.1 Posición, velocidad y aceleración angulares

10.2 Cinemática rotacional: movimiento rotacional con aceleración angular constante

10.3 Cantidades angulares y lineales

10.4 Energía cinética rotacional

10.5 Cálculo de momentos de inercia

10.6 Momento de torsión

10.7 Relación entre momento de torsión y aceleración angular

10.8 Trabajo, potencia y energía en el movimiento rotacional

10.9 Movimiento de rotación de un cuerpo rígido

▲ *El pasatiempo malayo llamado gasing comprende el giro de trompos que pueden tener masas de hasta 20 kilos. Los jugadores profesionales pueden hacer girar sus trompos de modo que duren horas antes de detenerse. En este capítulo estudiaremos el movimiento rotacional de cuerpos como estos trompos (Cortesía de Tourism Malaysia)*

Materiał chroniony prawem autorskim

Cuando un cuerpo rígido como una rueda gira alrededor de su eje, el movimiento no puede ser analizado si se trata ese cuerpo como partícula, porque en cualquier instante diferentes partes del cuerpo tienen velocidades lineales y aceleraciones lineales diferentes. No obstante, podemos analizar el movimiento si consideramos un cuerpo rígido como si estuviera compuesto de un conjunto de partículas, cada una de las cuales tiene su velocidad lineal y aceleración lineal propias.

Al tratar con un cuerpo rotando, el análisis se simplifica grandemente si se supone que el cuerpo es rígido. Un **cuerpo rígido** es aquel que no se deforma, esto es, las posiciones relativas de todas las partículas de que está compuesto el cuerpo, permanecen constantes. Todos los cuerpos reales son deformables hasta cierto grado, pero nuestro modelo de cuerpo rígido es útil en numerosas situaciones en las que la deformación es insignificante.

Cuerpo rígido

10.1 Posición, velocidad y aceleración angulares

La figura 10.1 ilustra una vista superior de un disco compacto en rotación. El disco está rotando alrededor de un eje fijo que pasa por O. El eje es perpendicular al plano de la figura. Investiguemos el movimiento de sólo uno de los millones de "partículas" que conforman el disco. Una partícula en P está a una distancia fija r del origen y rota alrededor de éste en un círculo de radio r. (De hecho, *toda* partícula del disco experimenta movimiento circular alrededor de O.) Es conveniente representar la posición de P con sus coordenadas polares (r, θ), donde r es la distancia desde el origen a P y θ se mide *en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj* desde alguna recta de referencia, como se muestra en la figura 10.1a. En esta representación, la única coordenada para la partícula que cambia en el tiempo es el ángulo θ; r permanece constante. Cuando la partícula se mueve a lo largo del círculo desde la recta de referencia ($\theta = 0$), recorre un arco de longitud s, como se ve en la figura 10.1b. La longitud s del arco está relacionada con el ángulo θ por medio de la relación

$$s = r\theta \tag{10.1a}$$

$$\theta = \frac{s}{r} \tag{10.1b}$$

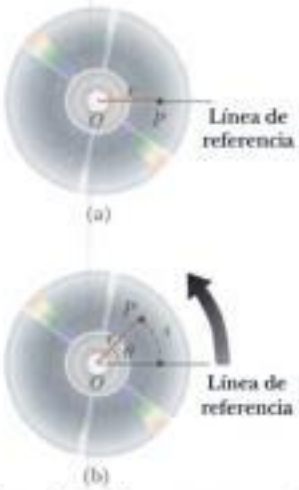


Figura 10.1 Disco compacto que gira alrededor de un eje fijo que pasa por O perpendicular al plano de la figura. (a) Para definir la posición angular del disco, se escoge una recta de referencia fija. Una partícula en P está ubicada a una distancia r desde el eje de rotación en O. (b) Cuando el disco gira, el punto P recorre una longitud de arco s en una trayectoria circular de radio r.

Nótense las dimensiones de θ de la ecuación 10.1b. Como θ es la razón entre una longitud de arco y el radio del círculo, es un puro número. No obstante, por lo común damos a θ la unidad artificial de **radián** (rad), donde

un radián es el ángulo subtendido por una longitud de arco igual al radio del arco.

Debido a que la circunferencia de un círculo es $2\pi r$, se deduce de la ecuación 10.1b que $360°$ corresponde a un ángulo de $(2\pi r/r)\text{rad} = 2\pi$ rad. (Nótese también que 2π rad corresponde a una revolución completa.) En consecuencia, $1 \text{ rad} = 360°/2\pi \approx 57.3°$. Para con-

Materiał chroniony prawem autorskim

¡ADVERTENCIA!

10.1 Recuerde el radián

En ecuaciones rotacionales, debemos usar ángulos expresados en *radianes*. No caiga en la trampa de usar ángulos medidos en grados en ecuaciones rotacionales.

vertir un ángulo en grados a un ángulo en radianes, usamos el hecho de que π rad = 180°, o sea

$$\theta\,(\text{rad}) = \frac{\pi}{180^\circ}\,\theta\,(\text{deg})$$

Por ejemplo, 60° es igual a $\pi/3$ rad y 45° es igual a $\pi/4$ rad.

Debido a que el disco de la figura 10.1 es un cuerpo rígido, cuando la partícula se mueve a lo largo del círculo desde la recta de referencia, todas las demás partículas del cuerpo recorren el mismo ángulo θ. Por lo tanto, **podemos asociar el ángulo θ con todo el cuerpo rígido, así como con una partícula individual.** Esto nos permite definir una *posición angular* de un cuerpo rígido en su movimiento rotacional. Escogemos una recta de referencia sobre el objeto, por ejemplo la recta que enlaza O y una partícula seleccionada sobre el objeto. La **posición angular** del cuerpo rígido es el ángulo θ entre esta recta de referencia sobre el objeto y la recta de referencia fija en el espacio, que a veces se escoge como eje x. Esto es semejante a la forma en que identificamos la posición de un cuerpo en movimiento de traslación, la distancia x entre el cuerpo y la posición de referencia, que es el origen, $x = 0$.

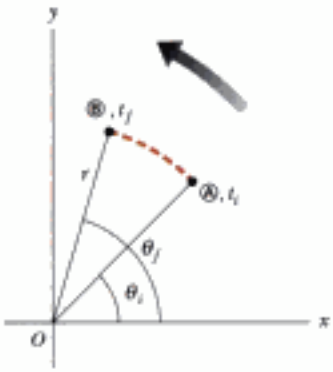


Figura 10.2 Una partícula en un cuerpo rígido en rotación se mueve de Ⓐ a Ⓑ a lo largo del arco de un círculo. En el intervalo $\Delta t = t_f - t_i$, el radio vector barre un desplazamiento angular $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$.

Cuando la partícula en cuestión de nuestro cuerpo rígido avanza de la posición Ⓐ a la posición Ⓑ en un intervalo Δt como en la figura 10.2, la recta de referencia de longitud r barre un ángulo $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$. Esta cantidad $\Delta\theta$ se define como el **desplazamiento angular** del cuerpo rígido:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

La rapidez a la que ocurre este desplazamiento angular puede ser variable. Si el cuerpo rígido gira rápidamente, este desplazamiento puede ocurrir en un corto intervalo. Si gira lentamente, este desplazamiento ocurre en un intervalo más largo. Estos ritmos diferentes de rotación se pueden cuantificar si introducimos la *rapidez angular*. Definimos la **rapidez angular promedio** $\bar{\omega}$ como la razón entre el desplazamiento angular del cuerpo rígido y el intervalo Δt durante el que ocurre el desplazamiento:

Rapidez angular promedio

$$\bar{\omega} \equiv \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{10.2}$$

En analogía con la rapidez lineal, la **rapidez angular instantánea** ω se define como el límite de la razón $\Delta\theta/\Delta t$ a medida que Δt se aproxima a cero:

Rapidez angular instantánea

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{10.3}$$

La rapidez angular tiene unidades de radianes por segundo (rad/s), que se pueden escribir como segundo^{-1} (s^{-1}) porque los radianes no son dimensionales. Tomamos ω como positiva cuando θ sea creciente (movimiento en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj en la figura 10.2) y negativa cuando θ sea decreciente (en sentido de las manecillas del reloj en la figura 10.2).

Pregunta rápida 10.1 Un cuerpo rígido está rotando en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de un eje fijo. Cada uno de los siguientes pares de cantidades representa una posición angular inicial y posición angular final del cuerpo rígido. ¿Cuál de los conjuntos puede ocurrir *sólo* si el cuerpo rígido gira más de 180°? (a) 3 rad, 6 rad (b) −1 rad, 1 rad (c) 1 rad, 5 rad.

Pregunta rápida 10.2 Suponga que el cambio en la posición angular para cada uno de los pares de valores de la Pregunta rápida 10.1 ocurre en 1 s. ¿Qué opción representa el promedio de la rapidez angular más baja?

Materiał chroniony prawem autorskim

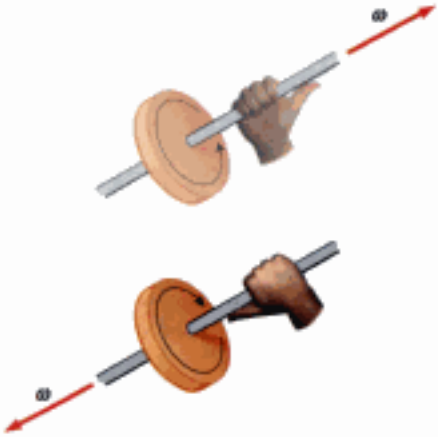


Figura 10.3 Regla de la mano derecha para determinar la dirección del vector de velocidad angular.

Si la rapidez angular instantánea de un objeto cambia de ω_i a ω_f en el intervalo Δt, el objeto tiene una aceleración angular. La **aceleración angular promedio** $\bar{\alpha}$ (alfa) de un cuerpo rígido en rotación se define como la razón de cambio en la rapidez angular respecto al intervalo Δt durante el cual ocurre el cambio en la rapidez angular:

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{10.4}$$

Aceleración angular promedio

En analogía con la aceleración lineal, la **aceleración angular instantánea** se define como el límite de la razón $\Delta\omega/\Delta t$ cuando Δt se aproxima a cero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \tag{10.5}$$

Aceleración angular instantánea

La aceleración angular tiene unidades de radianes por segundo al cuadrado (rad/s^2), o sólo segundo^{-2} (s^{-2}). Nótese que α es positiva cuando un cuerpo rígido que gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj aumenta su rapidez, o cuando un cuerpo rígido que rota en el sentido de las manecillas del reloj es frenado durante algún intervalo.

Cuando un cuerpo rígido está rotando alrededor de un eje *fijo*, **toda partícula del cuerpo gira el mismo ángulo en un intervalo dado, y tiene la misma rapidez angular y la misma aceleración angular.** Esto es, las cantidades θ, ω y α caracterizan el movimiento de rotación de todo el cuerpo rígido, así como a partículas individuales del cuerpo. Con el uso de estas cantidades, podemos simplificar grandemente el análisis de la rotación de un cuerpo rígido.

La posición angular (θ), la rapidez angular (ω), y la aceleración angular α son análogas a la posición lineal (x), rapidez lineal (v), y aceleración lineal (a). Las variables θ, ω y α difieren dimensionalmente de las variables x, v y a sólo por un factor que tiene la unidad de longitud. (Vea la sección 10.3.)

No hemos especificado ninguna dirección para la rapidez angular y aceleración angular. Estrictamente hablando, ω y α son las magnitudes de los vectores[1] de velocidad angular y la aceleración angular $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$, respectivamente, y siempre deben ser positivas. Sin embargo, debido a que estamos considerando rotación alrededor de un eje fijo, podemos usar notación no vectorial e indicar las direcciones de los vectores si asignamos un signo positivo o negativo a ω y α, como se estudió antes con respecto a las ecuaciones 10.3 y 10.5. Para rotación alrededor de un eje fijo, la única dirección que especifica de manera única el movimiento rotacional es la dirección a lo largo del eje de rotación. Por lo tanto, las direcciones de $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son a lo largo de este eje. Si un cuerpo gira en el plano xy como en la figura 10.1, la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ es fuera del plano del diagrama cuando la rotación es en sentido contrario de las manecillas de un reloj, y entrando en el plano del diagrama cuando la rotación es en el sentido de las manecillas de un reloj. Para ilustrar esta convención, es conveniente usar la *regla de la mano derecha* demostrada en la figura 10.3. Cuando los cuatro dedos de la

[1] Aun cuando no lo verificamos aquí, la velocidad angular instantánea y la aceleración angular instantánea son cantidades vectoriales, pero los correspondientes valores promedio no lo son. Esto es porque los desplazamientos angulares no se suman como cantidades vectoriales para rotaciones finitas.

¡ADVERTENCIA!

10.2 Especifique sus ejes

Al resolver problemas de rotación, se debe especificar un eje de rotación. Ésta es una característica nueva que no se encuentra en nuestro estudio de movimiento de traslación. La selección es arbitraria, pero una vez hecha, debe conservarse en forma consistente en todo el problema. En algunos problemas, la situación física sugiere un eje natural, como es el centro de una rueda de automóvil; en otros problemas, puede que no haya una selección obvia y el estudiante debe aplicar su juicio.

Materiał chroniony prawem autorskim

mano derecha se colocan en la dirección de rotación, el pulgar derecho extendido apunta en la dirección de $\boldsymbol{\omega}$. La dirección de $\boldsymbol{\alpha}$ se deduce de su definición $\alpha = d\omega/dt$. Es en la misma dirección que $\boldsymbol{\omega}$ si la rapidez angular es creciente en el tiempo, y es antiparalela a $\boldsymbol{\omega}$ si la rapidez angular es decreciente en el tiempo.

Pregunta rápida 10.3 Un cuerpo rígido está girando con una rapidez angular $\omega < 0$. El vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y el vector de aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ son antiparalelos. La rapidez angular del cuerpo rígido es (a) en el sentido de las manecillas de un reloj y creciente (b) en sentido contrario al de las manecillas de un reloj y decreciente (c) en sentido contrario al de las manecillas de un reloj y creciente (d) en sentido contrario al de las manecillas de un reloj y decreciente.

10.2 Cinemática rotacional: movimiento rotacional con aceleración angular constante

En nuestro estudio de movimiento lineal, encontramos que la forma más sencilla de movimiento acelerado para analizar es la de movimiento bajo aceleración lineal constante. Del mismo modo, para movimiento rotacional alrededor de un eje fijo, el movimiento acelerado más simple para analizar es el movimiento bajo aceleración angular constante. Por lo tanto, a continuación desarrollamos relaciones cinemáticas para este tipo de movimiento. Si escribimos la ecuación 10.5 en la forma $d\omega = \alpha\, dt$, y hacemos $t_i = 0$ y $t_f = t$, la integración de esta expresión directamente da

Ecuaciones cinemáticas rotacionales

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \qquad \text{(para constante } \alpha) \tag{10.6}$$

donde ω_i es la rapidez angular del cuerpo rígido en el tiempo $t = 0$. La ecuación 10.6 nos permite hallar la rapidez angular ω_f del cuerpo en cualquier tiempo t posterior. Al sustituir la ecuación 10.6 en la ecuación 10.3 e integrar una vez más, obtenemos

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \qquad \text{(para constante } \alpha) \tag{10.7}$$

donde θ_i es la posición angular del cuerpo rígido en el tiempo $t = 0$. La ecuación 10.7 nos permite hallar la posición angular θ_f del cuerpo en cualquier tiempo posterior t. Si eliminamos t de las ecuaciones 10.6 y 10.7, obtenemos

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \qquad \text{(para constante } \alpha) \tag{10.8}$$

Esta ecuación nos permite hallar la rapidez angular ω_f del cuerpo rígido para cualquier valor de su posición angular θ_f. Si eliminamos α entre las ecuaciones 10.6 y 10.7, obtenemos

$$\theta_f = \theta_i + \tfrac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \qquad \text{(para constante } \alpha) \tag{10.9}$$

Nótese que estas expresiones cinemáticas para movimiento rotacional bajo aceleración angular constante son de la misma forma matemática que las de movimiento lineal bajo aceleración lineal constante. Pueden ser generadas desde las ecuaciones para movimiento lineal al hacer las sustituciones $x \rightarrow \theta$, $v \rightarrow \omega$ y $a \rightarrow \alpha$. La tabla 10.1 compara las ecuaciones cinemáticas para movimiento rotacional y lineal.

¡ADVERTENCIA!

10.3 ¿Igual que traslación?

Las ecuaciones de la 10.6 a la 10.9 y la tabla 10.1 sugieren que la cinemática rotacional es casi igual a la cinemática de traslación. Esto es caso verdadero, con dos diferencias clave: (1) en cinemática rotacional, se debe especificar un eje de rotación (según la Advertencia 10.2); (2) en movimiento de rotación, el cuerpo sigue regresando a su orientación original; así, nos pueden pedir el número de revoluciones hechas por un cuerpo rígido. Este concepto no tiene significado en movimiento de traslación, pero está relacionado a $\Delta\theta$, que es análogo a Δx.

Materiał chroniony prawem autorskim

Tabla 10.1

Ecuaciones cinemáticas para movimiento rotacional y lineal bajo aceleración constante

Movimiento rotacional alrededor de un eje fijo	Movimiento lineal
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$

Pregunta rápida 10.4 Considere de nuevo los pares de posiciones angulares para el cuerpo rígido de la Pregunta rápida 10.1. Si el cuerpo inicia desde el reposo en la posición angular inicial, se mueve en sentido contrario al de las manecillas de un reloj con aceleración angular constante, y llega a la posición angular final con la misma rapidez angular en los tres casos, ¿para cuál selección es más alta la aceleración angular?

Ejemplo 10.1 Rueda giratoria

Una rueda gira con aceleración angular constante de 3.50 rad/s².

(A) Si la rapidez angular de la rueda es 2.00 rad/s en $t_i = 0$, ¿qué desplazamiento angular gira la rueda en 2.00 s?

Solución Podemos usar la figura 10.2 para representar la rueda. Arreglamos la ecuación 10.7 para que nos dé desplazamiento angular:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i = \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$
$$= (2.00\ \text{rad/s})(2.00\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(3.50\ \text{rad/s}^2)(2.00\ \text{s})^2$$
$$= \mathbf{11.0\ rad} = (11.0\ \text{rad})(57.3°/\text{rad}) = \mathbf{630°}$$

(B) ¿Cuántas revoluciones ha girado la rueda durante este intervalo?

Solución Multiplicamos el desplazamiento angular hallado en la parte (A) por un factor de conversión para hallar el número de revoluciones:

$$\Delta\theta = 630°\left(\frac{1\ \text{rev}}{360°}\right) = \mathbf{1.75\ rev}$$

(C) ¿Cuál es la rapidez angular de la rueda en $t = 2.00$ s?

Solución Debido a que la aceleración angular y la rapidez angular son ambas positivas, nuestra respuesta debe ser mayor a 2.00 rad/s. Con el uso de la ecuación 10.6 encontramos

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t = 2.00\ \text{rad/s} + (3.50\ \text{rad/s}^2)(2.00\ \text{s})$$
$$= \mathbf{9.00\ rad/s}$$

Podríamos obtener también este resultado con la ecuación 10.8 y los resultados de la parte (A). ¡Inténtelo!

¿Qué pasaría si? **Suponga que una partícula se mueve a lo largo de una recta con aceleración constante de 3.50 m/s². Si la velocidad de la partícula es 2.00 m/s en $t_i = 0$, ¿qué desplazamiento se mueve la partícula en 2.00 s? ¿Cuál es la velocidad de la partícula en $t = 2.00$ s?**

Respuesta Nótese que estas preguntas son análogas de traslación a las partes (A) y (C) del problema original. La solución matemática sigue exactamente la misma forma. Para el desplazamiento,

$$\Delta x = x_f - x_i = v_i t + \tfrac{1}{2}at^2$$
$$= (2.00\ \text{m/s})(2.00\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(3.50\ \text{m/s}^2)(2.00\ \text{s})^2$$
$$= 11.0\ \text{m}$$

y para la velocidad,

$$v_f = v_i + at = 2.00\ \text{m/s} + (3.50\ \text{m/s}^2)(2.00\ \text{s}) = 9.00\ \text{m/s}$$

Nótese que no hay analogía de traslación a la parte (B) porque el movimiento de traslación no es repetitivo como el movimiento rotacional.

10.3 Cantidades angulares y lineales

En esta sección deducimos algunas relaciones útiles entre la rapidez y aceleración angulares de un cuerpo rígido en rotación y la rapidez y aceleración lineales de un punto en el cuerpo. Para hacerlo así, debemos tener en mente que cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, como en la figura 10.4, **toda partícula del objeto se mueve en un círculo cuyo centro es el eje de rotación.**

Materiał chroniony prawem autorskim

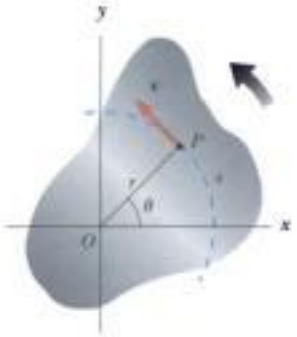


Figura activa 10.4 Cuando un cuerpo rígido rota alrededor del eje fijo que pasa por O, el punto P tiene una velocidad tangencial $\mathbf{v}$ que es siempre tangente a la trayectoria circular de radio r.

En el vínculo **Active Figures** *en* **http://www.pse6.com**, *usted podrá mover el punto P y observar la velocidad tangencial cuando gira el cuerpo.*

Debido a que el punto P de la figura 10.4 se mueve en un círculo, el vector de velocidad lineal $\mathbf{v}$ es siempre tangente a la trayectoria circular, y por lo tanto se denomina *velocidad tangencial*. La magnitud de la velocidad tangencial del punto P es por definición la rapidez tangencial $v = ds/dt$, donde s es la distancia recorrida por este punto medida a lo largo de la trayectoria circular. Recordando que $s = r\theta$ (ecuación 10.1a) y observando que r es constante, obtenemos

$$v = \frac{ds}{dt} = r\,\frac{d\theta}{dt}$$

Debido a que $d\theta/dt = \omega$ (vea la ecuación 10.3), vemos que

$$v = r\omega \tag{10.10}$$

Esto es, la rapidez tangencial de un punto sobre un cuerpo rígido en rotación es igual a la distancia perpendicular de ese punto desde el eje de rotación multiplicada por la rapidez angular. Por lo tanto, aun cuando todo punto del objeto rígido tiene la misma rapidez *angular*, no todo punto tiene la misma rapidez *tangencial* porque r no es la misma para todos los puntos sobre el cuerpo. La ecuación 10.10 muestra que la rapidez tangencial de un punto sobre el objeto rotando aumenta cuando uno se mueve hacia fuera del centro de rotación, como esperaríamos intuitivamente. El extremo exterior de un bat de béisbol en un lanzamiento del *pitcher* se mueve más rápido que el mango del bat.

Podemos relacionar la aceleración angular del cuerpo rígido en rotación con la aceleración tangencial del punto P si tomamos la derivada de v con respecto al tiempo:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\,\frac{d\omega}{dt}$$

Relación entre aceleración tangencial y angular

$$a_t = r\alpha \tag{10.11}$$

Esto es, el componente tangencial de la aceleración lineal de un punto en un cuerpo rígido en rotación es igual a la distancia del punto desde el eje de rotación multiplicada por la aceleración angular.

En la sección 4.4 encontramos que un punto que se mueve en una trayectoria circular experimenta una aceleración radial a_r de magnitud v^2/r dirigida hacia el centro de rotación (figura 10.5). Debido a que $v = r\omega$ para un punto P sobre un cuerpo giratorio, podemos expresar la aceleración centrípeta en ese punto en términos de la rapidez angular como

$$a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \tag{10.12}$$

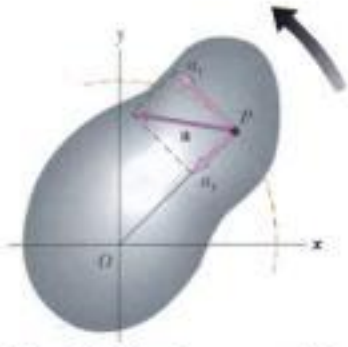


Figura 10.5 Cuando un cuerpo rígido rota alrededor de un eje fijo que pasa por O, el punto P experimenta un componente tangencial de aceleración lineal a_t y un componente radial de aceleración lineal a_r. La aceleración lineal total de este punto es $\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r$.

El vector de aceleración lineal total en el punto es $\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r$, donde la magnitud de $\mathbf{a}_r$ es la aceleración centrípeta a_r. Debido a que $\mathbf{a}$ es un vector que tiene un componente radial y uno tangencial, la magnitud de $\mathbf{a}$ en el punto P sobre el cuerpo rígido rotando es

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \tag{10.13}$$

Pregunta rápida 10.5 Andy y Charlie se divierten en un tiovivo (volantín). Andy sube a un caballo que está en el borde exterior de la plataforma circular, el doble de alejado del centro de la plataforma circular que Charlie, que pasea en un caballo que está más hacia el centro del aparato. Cuando el tiovivo está girando a una rapidez angular constante, la rapidez angular de Andy es (a) doble de la de Charlie (b) igual que la de Charlie (c) la mitad de la de Charlie (d) imposible de determinar.

Pregunta rápida 10.6 Considere de nuevo la situación del tiovivo de la Pregunta rápida 10.5. Cuando el tiovivo está rotando a una rapidez angular constante, la rapidez tangencial de Andy es (a) doble de la de Charlie (b) igual que la de Charlie (c) la mitad de la de Charlie (d) imposible de determinar.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 10.2 Reproductor de discos compactos (CD)

En un disco compacto (figura 10.6), la información de audio está almacenada en una serie de "hoyos" y áreas planas sobre la superficie del disco. La información se almacena digitalmente, y la alternación entre hoyos y áreas planas sobre la superficie representa unos y ceros binarios que lee el reproductor de los CD, y los convierte en ondas sonoras. Los hoyos y áreas planas son detectados por un sistema formado por un láser y lentes. La longitud de una hilera de unos y ceros que representan una parte de la información es la misma en todo el disco, ya sea que la información esté cerca del centro del disco o cerca de su borde exterior. Para que esta longitud de unos y ceros siempre pase por el sistema de láser y lentes en el mismo periodo, la rapidez tangencial de la superficie del disco en la ubicación de la lente debe ser constante. Esto requiere, según la ecuación 10.10, que varíe la rapidez angular de la lente cuando el sistema de láser y lentes se mueva radialmente a lo largo del disco. En un reproductor típico de CD, la rapidez constante de la superficie en el punto del sistema láser y lentes es 1.3 m/s.

George Semple

Figura 10.6 (Ejemplo 10.2) Un disco compacto.

(A) Encuentre la rapidez angular del disco en revoluciones por minuto cuando la información está siendo leída desde la primera pista más interior (r = 23 mm) y la pista final más exterior (r = 58 mm).

Solución Con el uso de la ecuación 10.10, podemos hallar la rapidez angular que nos dará la rapidez tangencial pedida en la posición de la pista más interior.

$$\omega_i = \frac{v}{r_i} = \frac{1.3\ \text{m/s}}{2.3 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 57\ \text{rad/s}$$
$$= (57\ \text{rad/s})\left(\frac{1\ \text{rev}}{2\pi\ \text{rad}}\right)\left(\frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}}\right)$$
$$= \mathbf{5.4 \times 10^2\ rev/min}$$

Para la pista exterior,

$$\omega_f = \frac{v}{r_f} = \frac{1.3\ \text{m/s}}{5.8 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 22\ \text{rad/s}$$
$$= \mathbf{2.1 \times 10^2\ rev/min}$$

El aparato ajusta la rapidez angular ω del disco dentro de este margen, de modo que la información se mueve frente al lente objetivo a un ritmo constante.

(B) El tiempo máximo de reproducción de un CD estándar de música es 74 minutos y 33 segundos. ¿Cuántas revoluciones hace el disco durante ese tiempo?

Solución Sabemos que la rapidez angular es siempre decreciente, y suponemos que decrece continuamente, con α constante. Si t = 0 es el instante en que arranca el disco, con rapidez angular de 57 rad/s, entonces el valor final del tiempo t es (74 min)(60 s/min) + 33 s = 4 473 s. Estamos buscando el desplazamiento angular $\Delta\theta$ durante este intervalo. Usamos la ecuación 10.9:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i = \tfrac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$$
$$= \tfrac{1}{2}(57\ \text{rad/s} + 22\ \text{rad/s})(4\,473\ \text{s})$$
$$= 1.8 \times 10^5\ \text{rad}$$

Convertimos este desplazamiento angular a revoluciones:

$$\Delta\theta = 1.8 \times 10^5\ \text{rad}\left(\frac{1\ \text{rev}}{2\pi\ \text{rad}}\right) = \mathbf{2.8 \times 10^4\ rev}$$

(C) ¿Cuál es la longitud total de la pista que se mueve frente a la lente objetivo durante este tiempo?

Solución Debido a que conocemos la velocidad lineal (constante) y el intervalo, éste es un cálculo sencillo:

$$x_f = v_f t = (1.3\ \text{m/s})(4\,473\ \text{s}) = \mathbf{5.8 \times 10^3\ m}$$

¡Más de 5.8 kilometros de pista gira frente a la lente objetivo!

(D) ¿Cuál es la aceleración angular del CD durante el intervalo de 4 473 s? Suponga que α es constante.

Solución El método más directo de resolver este problema, es usar la ecuación 10.6 y los resultados de la parte (A). Deberíamos obtener un número negativo para la aceleración angular, porque el disco gira cada vez con más lentitud en la dirección positiva a medida que transcurre el tiempo. Nuestra respuesta también debe ser relativamente pequeña, dado que toma un tiempo tan largo, más de una hora, para lograr el cambio en rapidez angular:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{22\ \text{rad/s} - 57\ \text{rad/s}}{4\,473\ \text{s}}$$
$$= \mathbf{-7.8 \times 10^{-3}\ rad/s^2}$$

El disco experimenta una reducción gradual en su ritmo de rotación, como se esperaba.

Materiał chroniony prawem autorskim

Figura 10.7 Cuerpo rígido que gira alrededor del eje z con rapidez angular ω. La energía cinética de la partícula de masa m_i es $\frac{1}{2}m_i v_i^2$. La energía cinética total del cuerpo se denomina energía cinética rotacional.

10.4 Energía cinética rotacional

En el capítulo 7, definimos la energía cinética de un cuerpo como la energía asociada con su movimiento en el espacio. Un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo permanece estacionario en el espacio, de modo que no hay energía cinética asociada con movimiento de traslación. Sin embargo, las partículas individuales que conforman el cuerpo en rotación, se mueven por el espacio y siguen trayectorias circulares. En consecuencia, debe haber energía cinética asociada con el movimiento rotacional.

Consideremos un objeto como un conjunto de partículas, y supongamos que gira alrededor de un eje fijo z con una rapidez angular ω. La figura 10.7 muestra el cuerpo en rotación e identifica una partícula del objeto localizada a una distancia r_i desde el eje de rotación. Cada una de estas partículas tiene energía cinética determinada por su masa y rapidez tangencial. Si la masa de la i-ésima partícula es m_i y su rapidez tangencial es v_i, su energía cinética es

$$K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

Para continuar, recordemos que aun cuando toda partícula del cuerpo rígido tiene la misma rapidez angular ω, las magnitudes de la velocidad tangencial individual dependen de la distancia r_i desde el eje de rotación según la expresión $v_i = r_i\omega$ (vea la ecuación 10.10). La energía cinética *total* del cuerpo rígido en rotación es la suma de las energías cinéticas de las partículas individuales:

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2\omega^2$$

Podemos escribir esta expresión en la forma

$$K_R = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 \tag{10.14}$$

de hemos factorizado ω^2 de la suma porque es común a toda partícula. Simplificamos esta expresión al definir la cantidad entre paréntesis como el **momento de inercia I:**

Momento de inercia

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{10.15}$$

De la definición de momento de inercia, vemos que tiene dimensiones de ML^2 ($kg \cdot m^2$ en unidades del SI).[2] Con esta notación, la ecuación 10.14 se convierte en

Energía cinética rotacional

$$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{10.16}$$

Aun cuando por lo general decimos que la cantidad $\frac{1}{2}I\omega^2$ es la **energía cinética rotacional,** no es una forma nueva de energía. Es energía cinética ordinaria porque se deduce de la suma de energías cinéticas individuales de las partículas contenidas en el cuerpo rígido. No obstante, la forma matemática de la energía cinética dada por la ecuación 10.16 es conveniente cuando estamos tratando con movimiento rotacional, siempre que sepamos cómo calcular I.

Es importante que el estudiante reconozca la analogía entre energía cinética asociada con el movimiento lineal $\frac{1}{2}mv^2$ y energía cinética rotacional $\frac{1}{2}I\omega^2$. Las cantidades I y ω en movimiento rotacional son análogas a m y v en movimiento lineal, respectivamente. (De hecho, I toma el lugar de m y ω toma el lugar de v cada vez que comparemos la ecuación de movimiento lineal con su similar rotacional.) El momento de inercia es una medida de la resistencia de un objeto a cambios en su movimiento rotacional, igual que la masa es una medida de la tendencia de un cuerpo a resistirse a cambios en su movimiento lineal.

¡ADVERTENCIA!

10.4 No hay valor individual de momento de inercia

Hay una gran diferencia entre masa y momento de inercia. Masa es una propiedad inherente de un cuerpo. El momento de inercia de un cuerpo depende de la selección que se haga de su eje de rotación. Así, no hay un valor individual del momento de inercia para un cuerpo. Hay un valor mínimo del momento de inercia, que es el calculado alrededor de un eje que pasa por el centro de masa del cuerpo.

[2] Los ingenieros civiles usan momento de inercia para caracterizar las propiedades elásticas (rigidez) de estructuras como son vigas cargadas. En consecuencia, a veces es útil incluso en un contexto no rotacional.

Materiał chroniony prawem autorskim

Pregunta rápida 10.7 Una sección de tubo hueco y un cilindro sólido tienen radio, masa y longitud iguales. Ambos giran alrededor de sus largos ejes centrales con la misma rapidez angular. ¿Cuál cuerpo tiene más alta energía cinética rotacional? (a) el tubo hueco (b) el cilindro sólido (c) tienen la misma energía cinética rotacional (d) imposible de determinar.

Ejemplo 10.3 La molécula de oxígeno

Considere una molécula de oxígeno (O_2) que gira en el plano xy alrededor del eje z. El eje de rotación pasa por el centro de la molécula, perpendicular a su longitud. La masa de cada átomo de oxígeno es 2.66×10^{-26} kg, y a temperatura ambiente la separación promedio entre los dos átomos es $d = 1.21 \times 10^{-10}$ m. (Los átomos se modelan como partículas).

(A) Calcule el momento de inercia de la molécula alrededor del eje z.

Solución Ésta es una aplicación sencilla de la definición de I. Como cada átomo está a una distancia $d/2$ del eje z, el momento de inercia alrededor del eje es

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{md^2}{2}$$

$$= \frac{(2.66 \times 10^{-26}\ \text{kg})(1.21 \times 10^{-10}\ \text{m})^2}{2}$$

$$= \mathbf{1.95 \times 10^{-46}\ kg \cdot m^2}$$

Éste es un número muy pequeño, consistente con las minúsculas masas y distancias que intervienen.

(B) Si la rapidez angular de la molécula alrededor del eje z es 4.60×10^{12} rad/s, ¿cuál es la energía cinética rotacional?

Solución Aplicamos el resultado que acabamos de calcular para el momento de inercia en la ecuación para K_R:

$$K_R = \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(1.95 \times 10^{-46}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)(4.60 \times 10^{12}\ \text{rad/s})^2$$

$$= \mathbf{2.06 \times 10^{-21}\ J}$$

Ejemplo 10.4 Cuatro cuerpos en rotación

Cuatro pequeñas esferas se sujetan a los extremos de dos varillas de masa despreciable que se encuentra en el plano xy (figura 10.8). Supondremos que los radios de las esferas son pequeños en comparación con las dimensiones de las varillas.

(A) Si el sistema gira alrededor del eje y (figura 10.8a) con una rapidez angular ω, encontramos el momento de inercia y la energía cinética rotacional alrededor de este eje.

Solución Primero, nótese que las dos esferas de masa m, que se encuentran sobre el eje y, no contribuyen a I_y (esto es, $r_i = 0$ para estas esferas alrededor de este eje). Al aplicar la ecuación 10.15 obtenemos

$$I_y = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 = \mathbf{2Ma^2}$$

Por lo tanto, la energía cinética rotacional alrededor del eje y es

$$K_R = \tfrac{1}{2} I_y \omega^2 = \tfrac{1}{2}(2Ma^2)\omega^2 = \mathbf{Ma^2\omega^2}$$

El hecho que las dos esferas de masa m no entren en este resultado tiene sentido porque no tienen movimiento alrededor del eje de rotación, por lo que no tienen energía cinética rotacional. Por lógica similar, esperamos que el momento de inercia alrededor del eje x sea $I_x = 2mb^2$ con una energía cinética rotacional alrededor de ese eje de $K_R = mb^2\omega^2$.

(B) Suponga que el sistema gira en el plano xy alrededor de un eje (el eje z) que pasa por O (figura 10.8b). Calcule el momento de inercia y energía cinética rotacional alrededor de este eje.

Solución Como r_i en la ecuación 10.15 es la distancia entre una esfera y el eje de rotación, obtenemos

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = \mathbf{2Ma^2 + 2mb^2}$$

$$K_R = \tfrac{1}{2} I_z \omega^2 = \tfrac{1}{2}(2Ma^2 + 2mb^2)\omega^2 = (Ma^2 + mb^2)\omega^2$$

Si comparamos los resultados de las partes (A) y (B), concluimos que el momento de inercia y, por lo tanto, la energía cinética rotacional asociada con una rapidez angular dada, depende del eje de rotación. En la parte (B), esperamos que el resultado incluya las cuatro esferas y distancias, porque todas las esferas están girando en el plano xy. Además, el hecho de que la energía cinética rotacional de la parte (A) es más pequeña que la de la parte (B) indica, con base en el teorema del trabajo y la energía cinética, que necesitaría menos trabajo para poner el sistema en rotación alrededor del eje y que alrededor del eje z.

Materiał chroniony prawem autorskim

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si la masa M es mucho mayor que m? ¿Cómo se comparan las respuestas a las partes (A) y (B)?

Respuesta Si $M \gg m$, entonces m se puede despreciar y el momento de inercia y energía cinética rotacional de la parte (B) se convierte en

$$I_z = 2Ma^2 \quad \text{y} \quad K_R = Ma^2\omega^2$$

que son iguales que las respuestas de la parte (A). Si las masas m de las dos esferas rojas de la figura 10.8 son insignificantes, entonces estas esferas se pueden eliminar de la figura y las rotaciones alrededor de los ejes y y z son equivalentes.

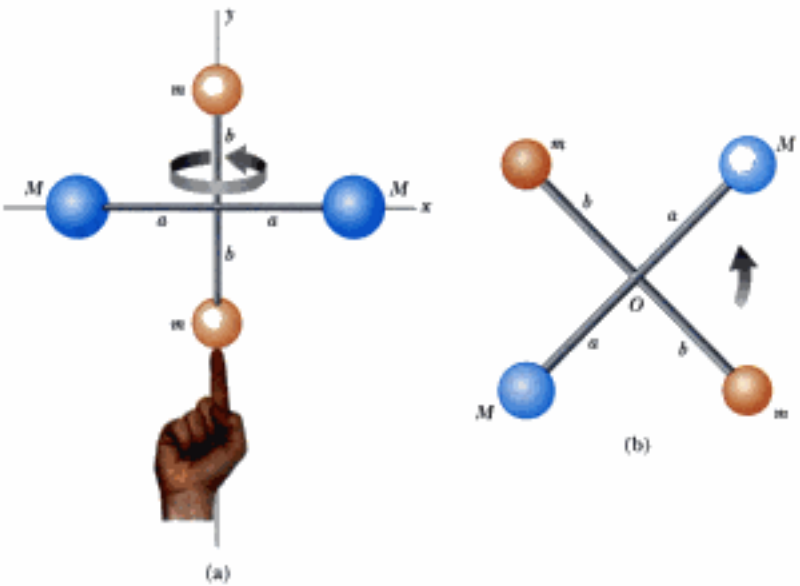


Figura 10.8 (Ejemplo 10.4) Cuatro esferas forman un bastón poco común. (a) El bastón se hace girar alrededor del eje y. (b) El bastón se hace girar alrededor del eje z.

10.5 Cálculo de momentos de inercia

Podemos evaluar el momento de inercia de un cuerpo rígido extendido si imaginamos que el objeto está dividido en numerosos pequeños elementos de volumen, cada uno de los cuales tiene masa Δm_i. Usamos la definición $I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i$ y tomamos el límite de esta suma como $\Delta m_i \to 0$. En este límite, la suma se convierte en integral del volumen del objeto:

Momento de inercia de un cuerpo rígido

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2\, dm \tag{10.17}$$

Por lo general, es más fácil calcular momentos de inercia en términos del volumen de los elementos en lugar de sus masas, y podemos fácilmente hacer el cambio al usar la ecuación 1.1, $\rho = m/V$, donde ρ es la densidad del objeto y V es su volumen. De esta ecuación, la masa de un pequeño elemento es $dm = \rho\, dV$. Sustituyendo este resultado en la ecuación 10.17 tendremos

$$I = \int \rho r^2\, dV$$

Si el objeto es homogéneo, entonces ρ es constante y la integral se puede evaluar para una geometría conocida. Si ρ no es constante, entonces su variación con la posición debe conocerse para completar la integración.

La densidad dada por $\rho = m/V$ a veces se conoce como *densidad volumétrica de masa*, porque representa masa por unidad de volumen. Con frecuencia empleamos otras formas de expresar densidad. Por ejemplo, cuando tratamos con una lámina de grosor uniforme t, podemos definir una *densidad de masa de superficie* $\sigma = \rho t$, que representa *masa por unidad de área*. Por último, cuando la masa está distribuida a lo largo de una varilla de área de sección transversal uniforme A, a veces usamos *densidad lineal de masa* $\lambda = M/L = \rho A$, que es *masa por unidad de longitud*.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 10.5 Aro delgado uniforme

Encuentre el momento de inercia de un aro delgado uniforme de masa M y radio R alrededor de un eje perpendicular al plano del aro y que pasa por su centro (figura 10.9).

Solución Como el aro es delgado, todos los elementos de masa dm están a la misma distancia $r = R$ del eje, por lo cual, aplicando la ecuación 10.17, obtenemos para el momento de inercia alrededor del eje z que pasa por O:

$$I_z = \int r^2\, dm = R^2 \int dm = \boldsymbol{MR^2}$$

Nótese que este momento de inercia es el mismo que el de una sola partícula de masa M colocada a una distancia R del eje de rotación.

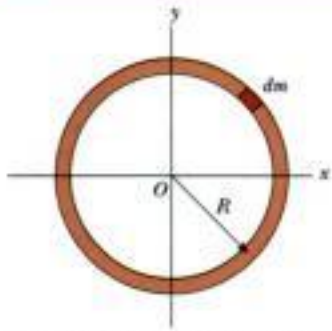


Figura 10.9 (Ejemplo 10.5) Los elementos de masa dm de un aro uniforme están todos a la misma distancia de O.

Ejemplo 10.6 Varilla rígida uniforme

Calcule el momento de inercia de una varilla rígida uniforme de longitud L y masa M (figura 10.10) alrededor de un eje perpendicular a la varilla (el eje y) y pasa por su centro de masa.

Solución El elemento sombreado de longitud dx de la figura 10.10 tiene una masa dm igual a la masa por unidad de longitud λ multiplicada por dx:

$$dm = \lambda\, dx = \frac{M}{L}\, dx$$

Sustituyendo esta expresión por dm en la ecuación 10.17, con $r = x$, obtenemos

$$I_y = \int r^2\, dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L}\, dx = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2\, dx$$

$$= \frac{M}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \boldsymbol{\tfrac{1}{12}ML^2}$$

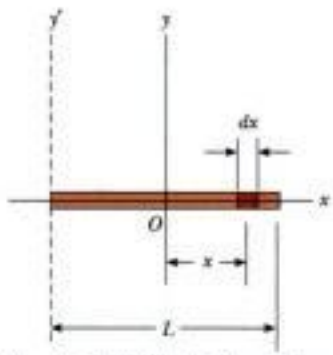


Figura 10.10 (Ejemplo 10.6) Varilla rígida uniforme de longitud L. El momento de inercia alrededor del eje y es menor que el que hay alrededor del eje y'. Este último eje se examina en el ejemplo 10.8.

Ejemplo 10.7 Cilindro sólido uniforme

Un cilindro sólido uniforme tiene radio R, masa M y longitud L. Calcule su momento de inercia alrededor de su eje central (el eje z en la figura 10.11).

Solución Es conveniente dividir el cilindro en muchas capas cilíndricas, cada una de las cuales tiene radio r, grosor dr, y longitud L, como se muestra en la figura 10.11. El volumen dV de cada capa es su área de sección transversal multiplicada por su longitud: $dV = L\,dA = L(2\pi r)\,dr$. Si la masa por unidad de volumen es ρ, entonces la masa de este elemento diferencial de volumen es $dm = \rho\, dV = 2\pi\rho L r\, dr$. Sustituyendo esta expresión por dm en la ecuación 10.17, obtenemos

$$I_z = \int r^2\, dm = \int r^2(2\pi\rho L r\, dr) = 2\pi\rho L \int_0^R r^3 dr = \tfrac{1}{2}\pi\rho L R^4$$

Como el volumen total del cilindro es $\pi r^2 L$, vemos que $\rho = M/V = M/\pi r^2 L$. Sustituyendo este valor por ρ en el resultado que aparece líneas antes, tendremos

$$I_z = \tfrac{1}{2}MR^2$$

Figura 10.11 (Ejemplo 10.7) Cálculo de I alrededor del eje z para un cilindro sólido uniforme.

¿Qué pasaría si? **¿Qué pasaría si la longitud del cilindro de la figura 10.11 aumenta a $2L$, mientras que la masa M y el radio R se mantienen fijos? ¿En qué forma cambia esto el momento de inercia del cilindro?**

Materiał chroniony prawem autorskim

Respuesta Nótese que el resultado para el momento de inercia de un cilindro no depende de L, la longitud del cilindro. En otras palabras, aplica igualmente bien a un cilindro largo y disco plano que tengan la misma masa M y mismo radio R. Entonces, el momento de inercia del cilindro no sería afectado al cambiar su longitud.

La tabla 10.2 da los momentos de inercia para diversos cuerpos alrededor de ejes específicos. Los momentos de inercia de cuerpos rígidos con geometría sencilla (alta simetría) son relativamente fáciles de calcular, siempre que el eje de rotación coincida con un eje de simetría. Sin embargo, el cálculo de momentos de inercia alrededor de un eje arbitrario puede ser engorroso, incluso para un cuerpo altamente simétrico. Por fortuna, el uso de un importante teorema, llamado **teorema de los ejes paralelos,** con frecuencia simplifica el cálculo. Suponga que el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro de masa de un objeto es I_{CM}. El teorema de los ejes paralelos expresa que el momento de inercia alrededor de cualquier eje paralelo a este eje, y a una distancia D del mismo eje, es

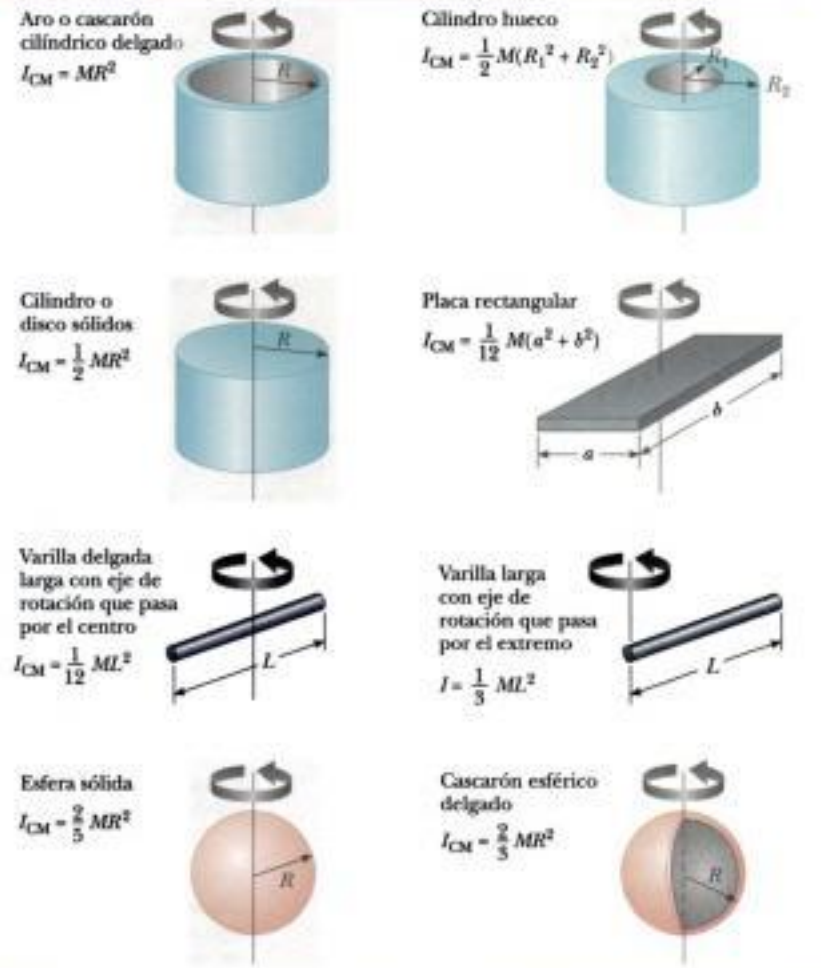
Teorema de los ejes paralelos

$$I = I_{CM} + MD^2 \tag{10.18}$$

Para demostrar el teorema de los ejes paralelos, suponga que un cuerpo rota en el plano xy alrededor del eje z, como se ve en la figura 10.12, y que las coordenadas del centro de masa son x_{CM}, y_{CM}. Hagamos que el elemento de masa dm tenga coordenadas x, y. Debido a que

Tabla 10.2

Momentos de inercia de cuerpos rígidos homogéneos con diferentes geometrías



Materiał chroniony prawem autorskim

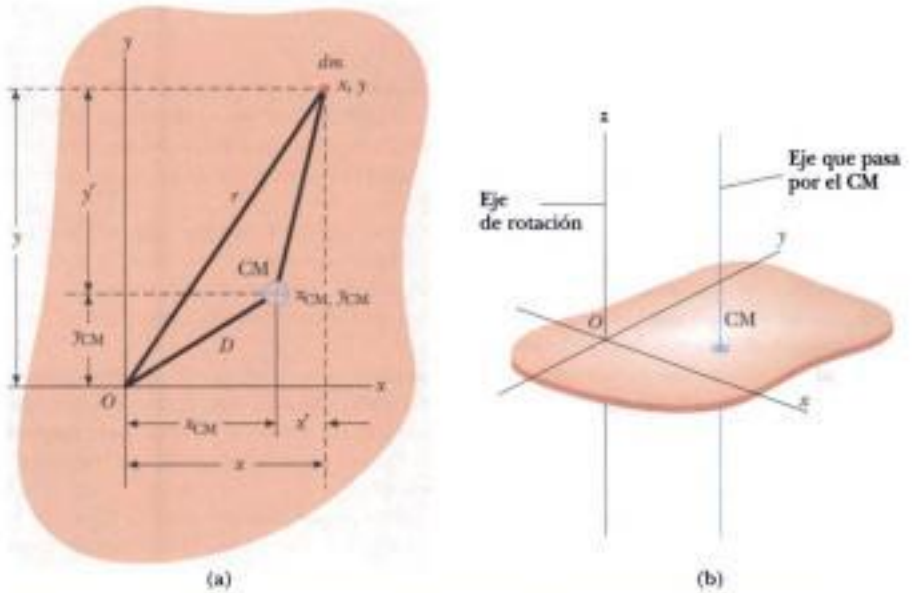


Figura 10.12 (a) El teorema de los ejes paralelos: si el momento de inercia alrededor de un eje perpendicular a la figura que pasa por el centro de masa es I_{CM}, entonces el momento de inercia alrededor del eje z es $I_z = I_{CM} + MD^2$. (b) Dibujo en perspectiva que muestra el eje z (el eje de rotación) y el eje paralelo que pasa por el CM.

este elemento está a una distancia $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ del eje z, el momento de inercia alrededor del eje z es

$$I = \int r^2\, dm = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

Sin embargo, podemos relacionar las coordenadas x, y del elemento de masa dm con las coordenadas de este mismo elemento colocado en un sistema de coordenadas que tiene el centro de masa del cuerpo como su origen. Si las coordenadas del centro de masa son x_{CM}, y_{CM} del sistema original de coordenadas con centro en O, entonces de la figura 10.12a vemos que las relaciones entre las coordenadas sin prima y con prima son $x = x' + x_{CM}$ y $y = y' + y_{CM}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int [(x' + x_{CM})^2 + (y' + y_{CM})^2]\, dm \\ &= \int [(x')^2 + (y')^2]\, dm + 2x_{CM} \int x'\, dm + 2y_{CM} \int y'\, dm + (x_{CM}^2 + y_{CM}^2) \int dm \end{aligned}$$

La primera integral es, por definición, el momento de inercia alrededor de un eje que es paralelo al eje z y pasa por el centro de masa. Las segundas dos integrales son cero porque, por definición del centro de masa, $\int x'\, dm = \int y'\, dm = 0$. La última integral es simplemente MD^2 porque $\int dm = M$ y $D^2 = x_{CM}^2 + y_{CM}^2$. Por lo tanto, concluimos que

$$I = I_{CM} + MD^2$$

Ejemplo 10.8 Aplicación del teorema de los ejes paralelos

Considere una vez más la varilla rígida uniforme de masa M y longitud L que se ilustra en la figura 10.10. Encuentre el momento de inercia de la varilla alrededor de un eje perpendicular a la varilla que pasa por un extremo (el eje y' de la figura 10.10).

Solución Intuitivamente, esperamos que el momento de inercia sea mayor que $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$ porque hay masa hasta una distancia de L alejada del eje de rotación, mientras que la máxima distancia en el ejemplo 10.6 era sólo $L/2$. Como la distancia entre el eje del centro de masa y el eje y' es $D = L/2$, el teorema de ejes paralelos da

$$I = I_{CM} + MD^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

Por lo tanto, es cuatro veces más difícil cambiar la rotación de una varilla que gira alrededor de su extremo que cambiar el movimiento de una que rotar alrededor de su centro.

Materiał chroniony prawem autorskim

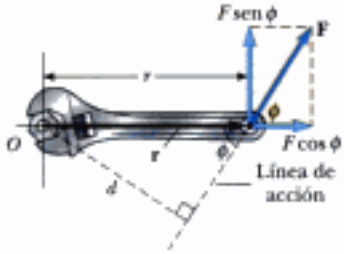


Figura 10.13 La fuerza **F** tiene mayor tendencia a la rotación alrededor de O cuando aumenta F y cuando aumenta el brazo de momento d. El componente F sen ϕ tiende a hacer girar la llave alrededor de O.

¡ADVERTENCIA!

10.5 El momento de torsión depende de la selección del eje

Es igual que el momento de inercia, no hay un valor único del momento de torsión; su valor depende de la selección del eje de rotación.

10.6 Momento de torsión

¿Por qué las bisagras y perilla de una puerta se instalan cerca de extremos opuestos de la puerta? Imagine tratar de hacer girar una puerta al aplicar una fuerza de magnitud F perpendicular a la superficie de la puerta, pero a diferentes distancias de las bisagras. Se logra una mayor rapidez de rotación de la puerta si se aplica la fuerza cerca de la perilla que aplicándola cerca de las bisagras.

Si no se puede aflojar un tornillo muy apretado con una llave de cruz, ¿qué se hace para aflojar el tornillo? Por intuición se puede usar una llave con mango más largo, o poner un tubo sobre la llave existente para hacerla más larga. Esto es parecido a la situación con la puerta. Es más fácil producir un cambio en movimiento rotacional (de la puerta o el tornillo) al aplicar la fuerza más lejos del eje de rotación.

Cuando se ejerce una fuerza sobre un cuerpo rígido que hace pivote alrededor de un eje, el cuerpo tiende a rotar alrededor de ese eje. La tendencia de una fuerza a hacer rotar un objeto alrededor de algún eje se mide por una cantidad vectorial llamada **momento de torsión** τ. El momento de torsión es un vector, pero aquí consideramos sólo su magnitud y en el capítulo 11 vamos a explorar su naturaleza vectorial.

Considere la llave de tuercas que hace pivote en el eje que pasa por O en la figura 10.13. La fuerza aplicada **F** actúa a un ángulo ϕ con respecto a la horizontal. Definimos la magnitud del momento de torsión asociado con la fuerza **F** por la expresión

$$\tau = rF \operatorname{sen} \phi = Fd \tag{10.19}$$

donde r es la distancia entre el punto de pivote y el punto de aplicación de **F**, y d es la distancia perpendicular desde el punto de pivote a la línea de acción de **F**. (La *línea de acción* de una fuerza es una línea imaginaria que se prolonga desde ambos extremos del vector que representa la fuerza. La línea punteada que se prolonga desde la cola de **F** de la figura 10.13 es parte de la línea de acción de **F**.) Del triángulo recto de la figura 10.13, que tiene la llave de tuercas como su hipotenusa, vemos que $d = r$ sen ϕ. La cantidad d se denomina **brazo del momento** (o *brazo de palanca*) de **F**.

Brazo del momento

En la figura 10.13, el único componente de **F** que tiende a causar rotación es F sen ϕ, el componente perpendicular a la línea trazada del eje de rotación al punto de aplicación de la fuerza. El componente horizontal F cos ϕ, debido a que su línea de acción pasa por O, no tiene tendencia a producir rotación alrededor de un eje que pasa por O. De la definición de momento de torsión, vemos que la tendencia de rotación aumenta cuando F aumenta y cuando d disminuye. Esto explica la observación de que es más fácil hacer rotar una puerta si empujamos en la perilla en lugar de en cualquier otro punto cerca de la bisagra. También deseamos aplicar nuestro empuje perpendicularmente tan cerca de la puerta como podamos. Empujar de lado en la perilla no hará que la puerta gire.

Si dos o más fuerzas actúan sobre un cuerpo rígido, como en la figura 10.14, cada una tiende a producir rotación alrededor del eje en O. En este ejemplo, $\mathbf{F}_2$ tiende a hacer rotar el cuerpo en el sentido de giro de las manecillas de un reloj, y $\mathbf{F}_1$ tiende a hacerlo rotar en sentido contrario. Usamos la convención de que el signo del momento de torsión que resulta de una fuerza es positivo si la tendencia de rotación de la fuerza es en sentido contrario a las manecillas de un reloj, y es negativo si la tendencia es en el sentido de rotación de las manecillas. Por ejemplo, en la figura 10.14, el momento de torsión que resulta de $\mathbf{F}_1$, que tiene un brazo de momento d_1, es positivo e igual a $+F_1d_1$; el momento de torsión de $\mathbf{F}_2$ es negativo e igual a $-F_2d_2$. Por lo tanto, el momento de torsión *neto* alrededor de O es

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1d_1 - F_2d_2$$

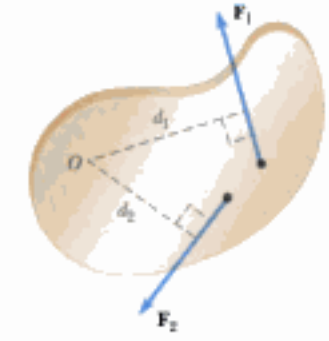


Figura activa 10.14 La fuerza $\mathbf{F}_1$ tiende a hacer rotar el objeto alrededor de O en sentido contrario a las manecillas de un reloj, y $\mathbf{F}_2$ tiende a hacerlo rotar en el sentido de las manecillas.

En el vínculo* Active Figures *en* http://www.pse6.com, *usted podrá cambiar las magnitudes, direcciones y puntos de aplicación de las fuerzas F_1 y F_2 para ver la forma en que el cuerpo acelera bajo la acción de las dos fuerzas.

Un momento de torsión no debe confundirse con una fuerza. Las fuerzas pueden causar un cambio en el movimiento lineal, como lo describe la Segunda Ley de Newton. Las fuerzas también pueden causar un cambio en el movimiento rotacional, pero la efectividad de las fuerzas al causar este cambio, depende de las fuerzas y los brazos de momento de las fuerzas, en la combinación que llamamos *momento de torsión*. El momento de torsión tiene unidades de fuerza por longitud: Newton —metros en unidades del SI—, y debe ser reportado en estas unidades. No confundir el momento de torsión con trabajo, que tiene las mismas unidades pero son conceptos muy diferentes.

Materiał chroniony prawem autorskim

Pregunta rápida 10.8 Si el lector trata de aflojar un tornillo muy apretado de una pieza de madera con un desarmador (destornillador) y no puede, ¿debe encontrar un desarmador que tenga el mango (a) más largo o (b) más gordo?

Pregunta rápida 10.9 Si el lector trata de aflojar un tornillo muy apretado de una pieza de madera con una llave de tuercas y no puede, ¿debe encontrar una llave de cruz que tenga el mango (a) más largo o (b) más gordo?

Ejemplo 10.9 El momento de torsión neto en un cilindro

Un cilindro de una pieza tiene la forma que se ilustra en la figura 10.15, con una sección central que sobresale del tambor mayor. El cilindro está libre para girar alrededor del eje central mostrado en el dibujo. Una cuerda enrollada alrededor del tambor, que tiene radio R_1, ejerce una fuerza $\mathbf{T}_1$ a la derecha en el cilindro. Una cuerda enrollada alrededor del núcleo, que tiene radio R_2, ejerce una fuerza $\mathbf{T}_2$ hacia abajo en el cilindro.

(A) ¿Cuál es el momento de torsión neto sobre el cilindro alrededor del eje de rotación (que es el eje z en la figura 10.15)?

Solución El momento de torsión debido a $\mathbf{T}_1$ es $-R_1T_1$. (El signo es negativo porque el momento de torsión tiende a producir rotación en el sentido de las manecillas de un reloj). El momento de torsión debido a $\mathbf{T}_2$ es $+R_2T_2$. (El signo es positivo porque el momento de torsión tiende a producir rotación en el sentido contrario de las manecillas de un reloj). Por lo tanto, el momento de torsión neto alrededor del eje de rotación es

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = R_2T_2 - R_1T_1$$

Podemos hacer una rápida verificación al observar que si las dos fuerzas son de igual magnitud, el momento de torsión neto es negativo porque $R_1 > R_2$. Iniciando desde el reposo con ambas fuerzas de igual magnitud actuando sobre él, el cilindro rotaría en el sentido de las manecillas del reloj porque $\mathbf{T}_1$ sería más efectivo para hacerlo rotar que $\mathbf{T}_2$.

(B) Suponga que $T_1 = 5.0$ N, $R_1 = 1.0$ m, $T_2 = 15.0$ N y $R_2 = 0.50$ m. ¿Cuál es el momento de torsión neto alrededor del eje de rotación, y en qué dirección gira el cilindro iniciando desde el reposo?

Solución Al evaluar el momento de torsión neto,

$$\sum \tau = (15\text{ N})(0.50\text{ m}) - (5.0\text{ N})(1.0\text{ m}) = \mathbf{2.5\ N\cdot m}$$

Como este momento de torsión es positivo, el cilindro empezará a rotar en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj.

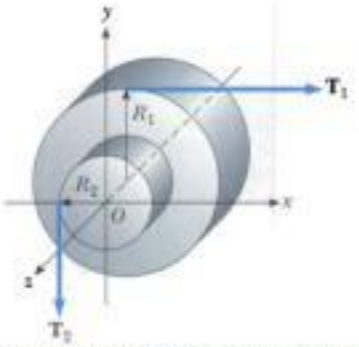


Figura 10.15 (Ejemplo 10.9) Cilindro sólido que hace pivote alrededor del eje z que pasa por O. El brazo de momento de $\mathbf{T}_1$ es R_1, y el brazo de momento de $\mathbf{T}_2$ es R_2.

10.7 Relación entre momento de torsión y aceleración angular

En el capítulo 4, aprendimos que una fuerza neta sobre un cuerpo causa una aceleración del cuerpo y que la aceleración es proporcional a la fuerza neta (Segunda Ley de Newton). En esta sección demostramos la analogía rotacional de la Segunda Ley de Newton; la aceleración angular de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo, es proporcional al momento de torsión neto que actúa alrededor de ese eje. Sin embargo, antes de analizar el caso más complejo de rotación de un cuerpo rígido, es instructivo primero analizar el caso de una partícula que se mueve en una trayectoria circular alrededor de algún punto fijo bajo la influencia de una fuerza externa.

Materiał chroniony prawem autorskim

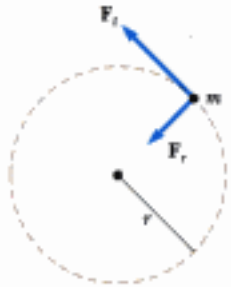


Figura 10.16 Partícula que rota en círculos bajo la influencia de una fuerza tangencial $\mathbf{F}_t$. Una fuerza $\mathbf{F}_r$ en la dirección radial también debe estar presente para mantener el movimiento circular.

Considere una partícula de masa m que rota en un círculo de radio r bajo la influencia de una fuerza tangencial $\mathbf{F}_t$ y una fuerza radial $\mathbf{F}_r$, como se muestra en la figura 10.16. La fuerza tangencial produce una aceleración tangencial $\mathbf{a}_t$, y

$$F_t = ma_t$$

La magnitud del momento de torsión alrededor del centro del círculo debido a $\mathbf{F}_t$ es

$$\tau = F_t r = (ma_t)r$$

Como la aceleración tangencial está relacionada con la aceleración angular por medio de la relación $a_t = r\alpha$ (vea la ecuación 10.11), el momento de torsión se puede expresar como

$$\tau = (mr\alpha)r = (mr^2)\alpha$$

Recordemos, de la ecuación 10.15, que mr^2 es el momento de inercia de la partícula alrededor del eje z que pasa por el origen, de modo que

$$\tau = I\alpha \tag{10.20}$$

Esto es, **el momento de torsión que actúa sobre la partícula es proporcional a su aceleración angular,** y la constante de proporcionalidad es el momento de inercia. Nótese que $\tau = I\alpha$ es la analogía rotacional de la Segunda Ley de Newton del movimiento, $F = ma$.

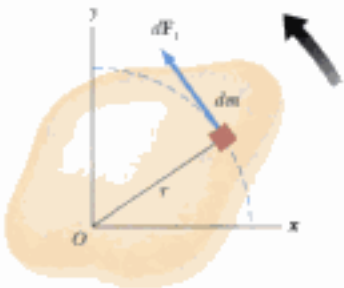


Figura 10.17 Cuerpo rígido que rota alrededor de un eje que pasa por O. Cada elemento de masa dm rota alrededor de O con la misma aceleración angular α, y el momento de torsión neto sobre el cuerpo es proporcional a α.

Ahora ampliamos este análisis a un cuerpo rígido de forma arbitraria que rota alrededor de un eje fijo, como en la figura 10.17. El cuerpo puede ser considerado como un número infinito de elementos de masa dm de tamaño infinitesimal. Si imponemos un sistema de coordenadas cartesianas sobre el cuerpo, entonces cada elemento de masa gira en un círculo alrededor del origen, y cada uno tiene una aceleración tangencial $\mathbf{a}_t$ producido por una fuerza tangencial externa $d\mathbf{F}_t$. Para cualquier elemento dado, sabemos de la Segunda Ley de Newton que

$$dF_t = (dm)a_t$$

El momento de torsión $d\tau$ asociado con la fuerza $d\mathbf{F}_t$ actúa alrededor del origen y está dado por

$$d\tau = r\,dF_t = a_t r\,dm$$

Como $a_t = r\alpha$, la expresión para $d\tau$ se convierte en

$$d\tau = \alpha r^2\,dm$$

Aun cuando cada uno de los elementos de masa del cuerpo rígido pueden tener diferente aceleración lineal $\mathbf{a}_t$, todos tienen la *misma* aceleración angular α. Con esto en mente, podemos integrar la expresión anterior para obtener el momento de torsión neto $\Sigma\tau$ alrededor de O debido a las fuerzas externas:

$$\sum \tau = \int \alpha r^2\,dm = \alpha \int r^2\,dm$$

donde α puede sacarse de la integral, porque es común a todos los elementos de masa. De la ecuación 10.17, sabemos que $\int r^2\,dm$ es el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje de rotación que pasa por O, y por lo tanto la expresión para $\Sigma\tau$ se convierte en

El momento de torsión es proporcional a la aceleración angular

$$\sum \tau = I\alpha \tag{10.21}$$

Nótese que ésta es la misma relación que hallamos para una partícula que se mueve en trayectoria circular (vea la ecuación 10.20). Por lo tanto, de nuevo vemos que el momento de torsión neto alrededor del eje de rotación es proporcional a la aceleración angular del cuerpo, con el factor de proporcionalidad siendo I, una cantidad que depende del eje de rotación y del tamaño y forma del cuerpo. En vista de la compleja naturaleza del sistema, la relación $\Sigma\tau = I\alpha$ es sorprendentemente sencilla y en completa concordancia con observaciones experimentales.

Por último, nótese que el resultado $\Sigma\tau = I\alpha$ también aplica cuando las fuerzas que actúan sobre los elementos de masa tienen componentes radiales, así como componentes tangencial. Esto es porque la línea de acción de todos los componentes radiales deben pasar por el eje de rotación, y por lo tanto todos los componentes radiales producen momento de torsión cero alrededor de ese eje.

Materiał chroniony prawem autorskim

Pregunta rápida 10.10 El lector apaga su taladro eléctrico y encuentra que el intervalo para que la broca se detenga debido al momento de torsión por fricción de la broca es Δt. Usted cambia la broca por una más grande que resulta en que ésta duplica el momento de inercia de todo el mecanismo de giro del taladro. Cuando esta broca más grande gira a la misma rapidez angular que la primera y se apaga el taladro, el momento de torsión por fricción permanece igual que para la situación previa. El tiempo para que esta segunda broca se detenga es (a) $4\Delta t$ (b) $2\Delta t$ (c) Δt (d) $0.5\Delta t$ (e) $0.25\Delta t$ (f) imposible de determinar.

Ejemplo 10.10 Varilla giratoria

Una varilla uniforme de longitud L y masa M, está unida en un extremo a un pivote sin fricción y está libre de rotar alrededor del pivote en el plano vertical, como en la figura 10.18. La varilla se suelta desde el reposo en la posición horizontal. ¿Cuál es la aceleración angular inicial de la varilla y la aceleración lineal inicial de su extremo derecho?

Solución No podemos usar nuestras ecuaciones cinemáticas para hallar α o a porque el momento de torsión ejercido sobre la varilla varía con su posición angular, y por ello ninguna aceleración es constante. Sin embargo, tenemos suficiente información para hallar el momento de torsión, que podemos entonces usar en la ecuación 10.21 para hallar la α inicial y luego la a final.

La única fuerza que contribuye al momento de torsión alrededor de un eje que pasa por el pivote, es la fuerza gravitacional $M\mathbf{g}$ ejercida sobre la varilla. (La fuerza ejercida por el pivote sobre la varilla tiene cero momento de torsión alrededor del pivote porque su brazo de momento es cero.) Para calcular el momento de torsión sobre la varilla, suponemos que la fuerza gravitacional actúa en el centro de masa de la varilla, como se muestra en la figura 10.18. La magnitud del momento de torsión debido a la fuerza alrededor de un eje que pasa por el pivote es

$$\tau = Mg\left(\frac{L}{2}\right)$$

Con $\Sigma\tau = I\alpha$ a $I = \frac{1}{3}ML^2$ para este eje de rotación (vea la tabla 10.2), obtenemos

$$(1) \qquad \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg(L/2)}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

Todos los puntos sobre la varilla tienen esta aceleración angular inicial.

Para hallar la aceleración lineal inicial del extremo derecho de la varilla, usamos la relación $a_t = r\alpha$ (ecuación 10.11), con $r = L$:

$$a_t = L\alpha = \frac{3}{2}g$$

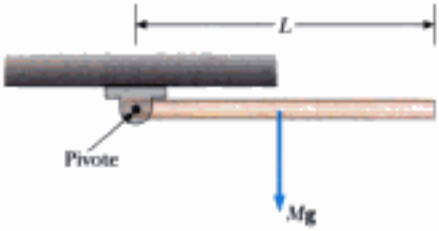


Figura 10.18 (Ejemplo 10.10) Una varilla está libre de girar alrededor de un pivote en el extremo izquierdo.

¿Qué pasaría si? **Qué pasaría si tuviéramos que poner una moneda de un centavo en el extremo de la varilla y soltaría? ¿Estaría el centavo en contacto con la varilla?**

Respuesta El resultado para la aceleración inicial de un punto en el extremo de la varilla muestra que $a_t > g$. Un centavo caería a una aceleración g. Esto significa que si ponemos un centavo en el extremo de la varilla y luego soltamos ésta, el extremo de la varilla cae más rápido que el centavo. El centavo no permanece en contacto con la varilla. (Intente esto con un centavo y una regla graduada.)

Esto hace surgir la pregunta respecto a la ubicación de la varilla en la que podamos poner un centavo que *permanezca* en contacto cuando ambos empiezan a caer. Para hallar la aceleración lineal de un punto arbitrario de la varilla a una distancia $r < L$ desde el punto de pivote, combinamos (1) con la ecuación 10.11:

$$a_t = r\alpha = \frac{3g}{2L}r$$

Para que el centavo permanezca en contacto con la varilla, el caso limitante es que la aceleración lineal deba ser igual a la debida a la gravedad:

$$a_t = g = \frac{3g}{2L}r$$

$$r = \frac{2}{3}L$$

Por lo tanto, un centavo colocado más cerca del pivote que dos tercios de la longitud de la varilla, permanecerá en contacto con la varilla que cae, mientras que un centavo colocado más lejos de este punto, perderá contacto.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo conceptual 10.11 Chimeneas que caen y bloques de juguete

Cuando cae una chimenea alta, con frecuencia se rompe en algún punto de su altura antes de estrellarse en el suelo, como se ve en la figura 10.19. Lo mismo ocurre con una alta torre de bloques de juguete para niños. ¿Por qué ocurre esto?

Solución A medida que la chimenea gira alrededor de su base, cada parte más elevada de la chimenea cae con una mayor aceleración tangencial que la parte que esté bajo ella. (La aceleración tangencial de un punto dado de la chimenea, es proporcional a la distancia de esa parte desde la base.) Cuando aumenta la aceleración angular a medida que la chimenea se inclina más, las partes más altas de la chimenea experimentan una mayor aceleración que la que resultaría sólo por la gravedad; esto es semejante a la situación descrita en el ejemplo 10.10. Esto puede ocurrir sólo si estas partes están siendo jaladas hacia abajo por una fuerza además de la gravitacional. La fuerza que produce este fenómeno es la fuerza de corte de las partes más bajas de la chimenea. En última instancia, la fuerza de corte que produce esta aceleración es mayor que la que puede soportar la chimenea, y la chimenea se rompe.

Figura 10.19 (Ejemplo conceptual 10.11) Una chimenea que cae se rompe en algún punto a lo largo de su altura.

Ejemplo 10.12 Aceleración angular de una rueda

Una rueda de radio R, masa M y momento de inercia I, está montada sobre un eje horizontal sin fricción, como se ve en la figura 10.20. Una cuerda ligera enrollada alrededor de la rueda, sostiene un cuerpo de masa m. Calcule la aceleración angular de la rueda, la aceleración lineal del cuerpo, y la tensión de la cuerda.

Figura 10.20 (Ejemplo 10.12) Un objeto cuelga de un cordón enrollado en una rueda.

Solución La magnitud del momento de torsión sobre la rueda alrededor de su eje de rotación es $\tau = TR$, donde T es la fuerza ejercida por la cuerda sobre el borde de la rueda. (La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre la rueda y la fuerza normal ejercida por el eje sobre la rueda, pasan por el eje de rotación, y es por ello que no producen momento de torsión). Debido a que $\sum\tau = I\alpha$, obtenemos

$$\sum \tau = I\alpha = TR$$

$$(1) \qquad \alpha = \frac{TR}{I}$$

Ahora apliquemos la Segunda Ley de Newton al movimiento del cuerpo, tomando como positiva la dirección hacia abajo:

$$\sum F_y = mg - T = ma$$

$$(2) \qquad a = \frac{mg - T}{m}$$

Las ecuaciones (1) y (2) tienen tres incógnitas: α, a y T. Debido a que el cuerpo y la rueda están unidos por una cuerda que no resbala, la aceleración lineal del cuerpo suspendido es igual a la aceleración tangencial de un punto sobre el borde de la rueda. Por lo tanto, la aceleración angular α de la rueda y la aceleración lineal del cuerpo están relacionadas por $a = R\alpha$. Usando este hecho junto con las ecuaciones (1) y (2), obtenemos

$$(3) \qquad a = R\alpha = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m}$$

$$(4) \qquad T = \frac{mg}{1 + (mR^2/I)}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Sustituyendo la ecuación (4) en la ecuación (2) y despejando a y α, encontramos que

$$(5) \qquad a = \frac{g}{1 + (I/mR^2)}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R + (I/mR)}$$

¿Qué pasaría si? **¿Qué pasaría si la rueda fuera a hacerse muy grande, de modo tal que I se hace muy grande? ¿Qué ocurre a la aceleración a del cuerpo y la tensión T?**

Respuesta Si la rueda se hace infinitamente grande, podemos imaginar que el cuerpo de masa m simplemente colgará de la cuerda sin hacer que la rueda gire.

Podemos demostrar esto matemáticamente al tomar el límite $I \rightarrow \infty$, de modo que la ecuación (5) se convierte en

$$a = \frac{g}{1 + (I/mR^2)} \longrightarrow 0$$

Esto está de conformidad con nuestra conclusión conceptual de que el objeto colgará en reposo. También encontramos que la ecuación (4) se convierte en

$$T = \frac{mg}{1 + (mR^2/I)} \longrightarrow \frac{mg}{1 + 0} = mg$$

Esto es consistente con el hecho de que el cuerpo simplemente cuelga en reposo en equilibrio entre la fuerza gravitacional y la tracción de la cuerda.

Ejemplo 10.13 Repaso de la máquina de Atwood

Dos bloques que tienen masas m_1 y m_2 están conectados entre sí por una cuerda ligera que pasa sobre dos poleas idénticas sin fricción, cada una de las cuales tiene un momento de inercia I y radio R, como se muestra en la figura 10.21a. Encuentre la aceleración de cada bloque y las tensiones T_1, T_2 y T_3 en la cuerda. (Suponga que no hay deslizamiento entre la cuerda y las poleas.)

Solución Compara esta situación con la máquina de Atwood del ejemplo 5.9. El movimiento de m_1 y m_2 es semejante al movimiento de los dos bloques de ese ejemplo. Las diferencias principales son que en el presente ejemplo tenemos dos poleas y cada una de ellas tiene masa. A pesar de estas diferencias, el aparato del presente ejemplo es ciertamente una máquina de Atwood.

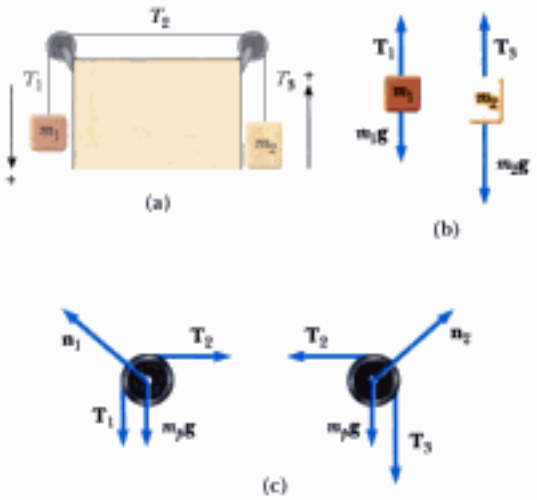


Figura 10.21 (Ejemplo 10.13) (a) Otro aspecto de la máquina de Atwood. (b) Diagramas de cuerpo libre para los bloques. (c) Diagramas de cuerpo libre para las poleas, donde m_pg representa la fuerza gravitacional que actúa sobre cada polea.

Definiremos la dirección hacia abajo como positiva para m_1 y hacia arriba como la dirección positiva para m_2, lo cual nos permite representar la aceleración de ambas masas por una sola variable a y también hace posible que relacionemos una a positiva con una aceleración angular positiva α (contraria al sentido de las manecillas de un reloj) de las poleas. Escribamos la Segunda Ley de Newton del movimiento para cada bloque, usando los diagramas de cuerpo libre para los dos bloques como se muestra en la figura 10.21b:

$$(1) \qquad m_1g - T_1 = m_1a$$

$$(2) \qquad T_3 - m_2g = m_2a$$

A continuación, debemos incluir el efecto de las poleas sobre el movimiento. Los diagramas de cuerpo libre para las poleas se ilustran en la figura 10.21c. El momento de torsión neto alrededor del eje para la polea a la izquierda es $(T_1 - T_2)R$, mientras que el momento de torsión neto para la polea de la derecha es $(T_2 - T_3)R$. Usando la relación $\Sigma\tau = I\alpha$ para cada polea y observando que cada polea tiene la misma aceleración angular α, obtenemos

$$(3) \qquad (T_1 - T_2)R = I\alpha$$

$$(4) \qquad (T_2 - T_3)R = I\alpha$$

Ahora tenemos cuatro ecuaciones con cinco incógnitas: α, a, T_1, T_2 y T_3. También tenemos una quinta ecuación que relaciona las aceleraciones, $a = R\alpha$. Estas ecuaciones se pueden resolver simultáneamente. Sumando las ecuaciones (3) y (4) tendremos

$$(5) \qquad (T_1 - T_3)R = 2I\alpha$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2) tendremos

$$T_3 - T_1 + m_1g - m_2g = (m_1 + m_2)a$$

$$(6) \qquad T_1 - T_3 = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a$$

Sustituyendo (6) en la ecuación (5) tenemos

$$[(m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a]R = 2I\alpha$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Debido a que $\alpha = a/R$, esta expresión se puede simplificar a

$$(m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a = 2I\frac{a}{R^2}$$

$$(7) \qquad a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + 2(I/R^2)}$$

Nótese que si $m_1 > m_2$, la aceleración es positiva; esto significa que el bloque izquierdo acelera hacia abajo, el bloque derecho acelera hacia arriba, y ambas poleas aceleran en sentido contrario al de las manecillas de un reloj. Si $m_1 < m_2$, la aceleración es negativa y los movimientos se invierten. Si $m_1 = m_2$, no se presenta aceleración en absoluto. El lector debe comparar estos resultados con los hallados en el ejemplo 5.9.

La expresión para a se puede sustituir en las ecuaciones (1) y (2) para dar T_1 y T_3. De la ecuación (1),

$$T_1 = m_1g - m_1a = m_1(g - a)$$

$$= m_1\left(g - \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + 2(I/R^2)}\right)$$

$$= 2m_1g\left(\frac{m_2 + (I/R^2)}{m_1 + m_2 + 2(I/R^2)}\right)$$

Del mismo modo, de la ecuación (2),

$$T_3 = m_2g + m_2a = 2m_2g\left(\frac{m_1 + (I/R^2)}{m_1 + m_2 + 2(I/R^2)}\right)$$

Por último, T_2 se puede hallar de la ecuación (3):

$$T_2 = T_1 - \frac{I\alpha}{R} = T_1 - \frac{Ia}{R^2}$$

$$= 2m_1g\left(\frac{m_2 + (I/R^2)}{m_1 + m_2 + 2(I/R^2)}\right) - \frac{I}{R^2}\left(\frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + 2(I/R^2)}\right)$$

$$= \frac{2m_1m_2 + (m_1 + m_2)(I/R^2)}{m_1 + m_2 + 2(I/R^2)}\,g$$

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si las poleas se convierten a poleas sin masa? ¿Se reduce esto a un problema previamente resuelto?

Respuesta Si las poleas se convierten a poleas sin masa, el sistema debería comportarse en la misma forma que la máquina de Atwood de polea sin masa que investigamos en el ejemplo 5.9. La única diferencia es la existencia de dos poleas en lugar de una.

Matemáticamente, si $I \to 0$, la ecuación (7) se convierte en

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + 2(I/R^2)} \longrightarrow a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)g$$

que es el mismo resultado que la ecuación (3) del ejemplo 5.9. Aun cuando las expresiones para las tres tensiones del presente ejemplo son diferentes entre ellas, las tres expresiones se convierten, en el límite $I \to 0$,

$$T = \left(\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)g$$

que es la misma que la ecuación (4) en el ejemplo 5.9.

10.8 Trabajo, potencia y energía en el movimiento rotacional

Hasta este momento, en nuestro análisis de movimiento rotacional en este capítulo, nos concentramos en un método que comprende fuerza, que lleva a la descripción de momento de torsión sobre un cuerpo rígido. A continuación veremos cómo un método de energía puede sernos útil al resolver problemas rotacionales.

Empezamos por considerar la relación entre el momento de torsión que actúa sobre un cuerpo rígido y su movimiento rotacional resultante para generar expresiones para potencia y movimiento rotacional análogas al teorema del trabajo y la energía cinética. Considere el cuerpo rígido que hace pivote en O de la figura 10.22. Suponga que una sola fuerza externa $\mathbf{F}$ se aplica en P, donde $\mathbf{F}$ está en el plano de la página. El trabajo realizado por $\mathbf{F}$ sobre el objeto cuando gira una distancia infinitesimal $ds = r\,d\theta$ es

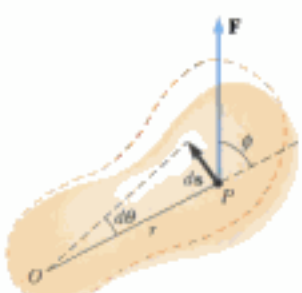


Figura 10.22 Un cuerpo rígido rota alrededor de un eje que pasa por O bajo la acción de una fuerza externa $\mathbf{F}$ aplicada en P.

$$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = (F \operatorname{sen}\phi)\,r\,d\theta$$

donde $F \operatorname{sen}\phi$ *es* el componente tangencial de $\mathbf{F}$, o bien, en otras palabras, el componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento. Nótese que *el componente radial de* $\mathbf{F}$ *no realiza trabajo porque es perpendicular al desplazamiento.*

Materiał chroniony prawem autorskim

Debido a que la magnitud del momento de torsión debido a **F** alrededor de O se define como rF sen ϕ por la ecuación 10.19, podemos escribir el trabajo realizado por la rotación infinitesimal como

$$dW = \tau\, d\theta \tag{10.22}$$

La rapidez a la que el trabajo es realizado por **F** cuando el cuerpo gira alrededor del eje fijo, todo el ángulo $d\theta$ en un intervalo dt, es

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Como dW/dt es la potencia instantánea $\mathcal{P}$ (vea la sección 7.8) entregada por la fuerza y $d\theta/dt = \omega$, esta expresión se reduce a

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \tau\omega \tag{10.23}$$

Potencia entregada a un cuerpo rígido rotando

Esta expresión es análoga a $\mathcal{P} = Fv$ en el caso del movimiento lineal, y la expresión $dW = \tau\, d\theta$ es análoga a $dW = F_x\, dx$.

Al estudiar el movimiento lineal, encontramos el método de la energía sumamente útil para describir el movimiento de un sistema. De lo que aprendimos de movimiento lineal, esperamos que cuando un cuerpo simétrico rota alrededor de un eje fijo, el trabajo realizado por fuerzas externas es igual al cambio en la energía rotacional.

Para demostrar que éste es en realidad el caso, comencemos con $\Sigma\tau = I\alpha$. Usando la regla de la cadena de cálculo, podemos expresar el momento de torsión resultante como

$$\sum \tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\omega$$

Si reacomodamos esta expresión y observamos que $\Sigma\tau\, d\theta = dW$, obtenemos

$$\sum \tau\, d\theta = dW = I\omega\, d\omega$$

Al integrar esta expresión obtenemos el trabajo total realizado por la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema que rota

$$\sum W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega\, d\omega = \tfrac{1}{2}I\omega_f^{\,2} - \tfrac{1}{2}I\omega_i^{\,2} \tag{10.24}$$

Teorema del trabajo y la energía cinética para movimiento rotacional

donde la rapidez angular cambia de ω_i a ω_f. Esto es, **el teorema del trabajo y la energía cinética para movimiento rotacional** expresa que

> el trabajo neto realizado por fuerzas externas al rotar un cuerpo rígido simétrico alrededor de un eje fijo es igual al cambio en la energía rotacional del cuerpo.

En general, entonces, combinando esto con la forma de traslación del teorema del trabajo y la energía cinética del capítulo 7, el trabajo neto realizado por fuerzas externas sobre un cuerpo, es el cambio en su energía cinética *total*, que es la suma de las energías cinéticas de traslación y rotación. Por ejemplo, cuando un *pitcher* lanza una pelota de béisbol, el trabajo realizado por las manos del *pitcher* aparece como energía cinética asociada con la pelota que se mueve en el espacio, así como energía cinética de rotación asociada con el rotar de la pelota.

Además del teorema del trabajo y la energía cinética, otros principios pueden también aplicarse a situaciones de rotación. Por ejemplo, si se aísla un sistema que contiene cuerpos en rotación, se puede usar el principio de conservación de la energía para analizar el sistema, como en el ejemplo 10.14 que sigue.

La tabla 10.3 es una lista de varias ecuaciones que hemos estudiado respecto al movimiento rotacional, junto con las expresiones análogas para movimiento lineal. Las últimas dos ecuaciones de la tabla 10.3, que comprenden la cantidad de movimiento angular L, se estudian en el capítulo 11 y están incluidas aquí sólo para completar.

Materiał chroniony prawem autorskim

Tabla 10.3

Ecuaciones útiles en movimiento rotacional y lineal

Movimiento rotacional alrededor de un eje fijo	Movimiento lineal
Velocidad angular $\omega = d\theta/dt$	Rapidez lineal $v = dx/dt$
Aceleración angular $\alpha = d\omega/dt$	Aceleración lineal $a = dv/dt$
Momento de torsión neto $\sum\tau = I\alpha$	Fuerza neta $\sum F = ma$
Si α = constante $\begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$	Si a = constante $\begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$
Trabajo $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta$	Trabajo $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx$
Energía cinética rotacional $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$	Energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$
Potencia $\mathcal{P} = \tau\omega$	Potencia $\mathcal{P} = Fv$
Cantidad de movimiento angular $L = I\omega$	Cantidad de movimiento angular $p = mv$
Momento de torsión neto $\sum\tau = dL/dt$	Momento de torsión neto $\sum F = dp/dt$

Pregunta rápida 10.11 Una varilla está unida al eje de un motor en el centro de la varilla, de modo que la varilla es perpendicular al eje, como se ve en la figura 10.23a. El motor se conecta y realiza trabajo W sobre la varilla, acelerándola a una rapidez angular ω. El sistema se lleva al reposo, y la varilla se une al eje del motor en un extremo de la varilla, como se ve en la figura 10.23b. El motor se conecta y realiza trabajo W sobre la varilla. La rapidez angular de la varilla en la segunda situación es (a) 4ω (b) 2ω (c) ω (d) 0.5ω (e) 0.25ω (f) imposible de determinar.

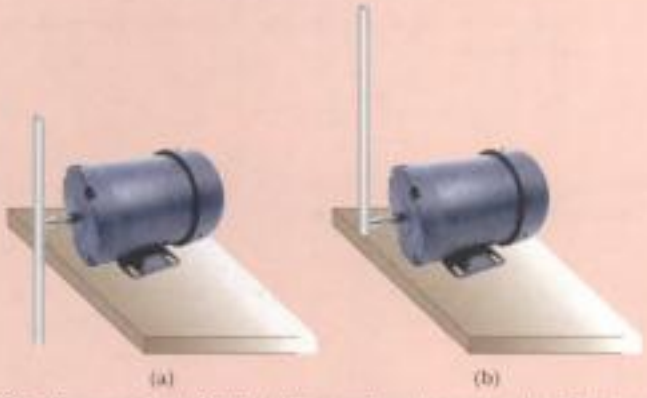


Figura 10.23 (Pregunta rápida 10.11) (a) Una varilla se hace rotar alrededor de su punto medio por un motor. (b) La varilla se hace rotar alrededor de uno de sus extremos.

Ejemplo 10.14 Repaso de una varilla giratoria

Una varilla uniforme de longitud L y masa M está libre de rotar sobre un perno sin fricción que pasa por un extremo (figura 10.24). La varilla se suelta desde el reposo en la posición horizontal.

(A) ¿Cuál es la rapidez angular cuando alcanza su posición más baja?

Solución Para conceptualizar este problema, considere la figura 10.24 e imagine la varilla girando hacia abajo un cuarto de vuelta alrededor del pivote en el extremo izquierdo. En esta situación, la aceleración angular de la varilla no es constante. Así, las ecuaciones cinemáticas para rotación (sección 10.2) no se pueden usar para resolver este problema. Sin embargo, como encontramos con el movimiento de traslación, un método de energía puede hacer relativamente fácil un problema que en apariencia es insoluble. Clasificamos éste como un problema de conservación de la energía.

Materiał chroniony prawem autorskim

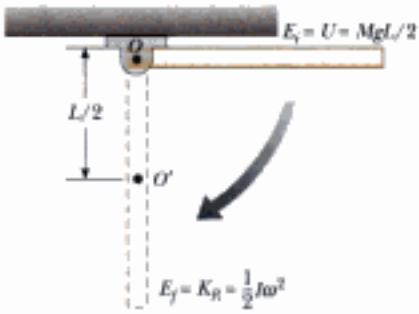


Figura 10.24 (Ejemplo 10.14) Una varilla rígida uniforme que hace pivote en O gira en un plano vertical bajo la acción de la fuerza gravitacional.

Para analizar el problema, consideramos la energía mecánica del sistema de la varilla y la Tierra. Seleccionamos la configuración en la que la varilla pende directamente hacia abajo como la configuración de referencia, para energía potencial gravitacional, y asignamos un valor de cero para esta configuración. Cuando la varilla está en la posición horizontal, no tiene energía cinética rotacional. La energía potencial del sistema en esta configuración con respecto a la configuración de referencia es $MgL/2$, porque el centro de masa de la varilla está a una altura $L/2$ más alta que su posición en la configuración de referencia. Cuando la varilla alcanza su posición más baja, la energía es por completo energía rotacional $\frac{1}{2}I\omega^2$, donde I es el momento de inercia alrededor del pivote, y la energía potencial del sistema es cero. Como $I = \frac{1}{3}ML^2$ (vea la tabla 10.2) y como el sistema está aislado sin fuerzas no conservativas que actúen, aplicamos conservación de energía mecánica para el sistema:

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2 = 0 + \frac{1}{2}MgL$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

(B) Determine la rapidez tangencial del centro de masa y la rapidez tangencial del punto más bajo sobre la varilla cuando está en la posición vertical.

Solución Estos dos valores se pueden determinar a partir de la relación entre magnitudes de rapidez tangencial y angular. Conocemos ω de la parte (A) y por lo tanto la rapidez tangencial del centro de masa es

$$v_{CM} = r\omega = \frac{L}{2}\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

Como r para el punto más bajo de la varilla es el doble de lo que es para el centro de masa, el punto más bajo tiene una rapidez tangencial v igual a

$$v = 2v_{CM} = \sqrt{3gL}$$

Para finalizar este problema, nótese que la configuración inicial de este ejemplo, es la misma que en el ejemplo 10.10. Sin embargo, en el ejemplo 10.10 sólo pudimos hallar la aceleración angular inicial de la varilla. No podemos usar ésta y las ecuaciones cinemáticas para hallar la rapidez angular de la varilla en su punto más bajo porque la aceleración angular no es constante. La aplicación de un método de energía en el presente ejemplo nos permite hallar algo que no podemos en el ejemplo 10.10.

Ejemplo 10.15 Energía y la máquina de Atwood

Considere dos cilindros que tienen diferentes masas m_1 y m_2, conectadas por una cuerda que pasa sobre una polea, como se muestra en la figura 10.25. La polea tiene un radio R y cantidad de movimiento de inercia I alrededor de su eje de rotación. La cuerda no desliza en la polea, y el sistema se suelta desde el reposo. Encuentre la rapidez lineal de los cilindros después que el cilindro 2 desciende una distancia h, y la rapidez angular de la polea en este tiempo.

Solución Resolveremos este problema aplicando métodos de energía a una máquina de Atwood con una polea enorme. Debido a que la cuerda no desliza, la polea rota alrededor del eje. Podemos despreciar la fricción del eje porque el radio del eje es pequeño con respecto al de la polea, de modo que el momento de torsión por fricción es mucho menor que el momento de torsión aplicado por los dos cilindros, siempre que sus masas sean completamente diferentes. En consecuencia, el sistema formado por los dos cilindros, la polea y la Tierra, está aislado sin fuerzas no conservativas que actúen; por lo tanto, la energía mecánica del sistema se conserva.

Definimos la configuración cero para energía potencial gravitacional como la que existe cuando el sistema se suelta. De la figura 10.25, vemos que el descenso del cilindro 2 está asociado con una disminución en la energía potencial del sistema y el ascenso del cilindro 1 representa un aumento en energía po-

Figura 10.25 (Ejemplo 10.15) Una máquina de Atwood.

Materiał chroniony prawem autorskim

tencial. Como $K_i = 0$ (el sistema está inicialmente en reposo), tenemos

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\left(\tfrac{1}{2}m_1 v_f^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_f^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_f^2\right) + (m_1 gh - m_2 gh) = 0 + 0$$

donde v_f es la misma para ambos bloques. Como $v_f = R\omega_f$, esta expresión se convierte en

$$\left(\tfrac{1}{2}m_1 v_f^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_f^2 + \tfrac{1}{2}\frac{I}{R^2}v_f^2\right) = (m_2 gh - m_1 gh)$$

$$\tfrac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v_f^2 = (m_2 gh - m_1 gh)$$

Al despejar v_f, encontramos

$$v_f = \left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{[m_1 + m_2 + (I/R^2)]}\right]^{1/2}$$

La rapidez angular de la polea en este instante es

$$\omega_f = \frac{v_f}{R} = \frac{1}{R}\left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{(m_1 + m_2 + (I/R^2))}\right]^{1/2}$$

10.9 Movimiento de rotación de un cuerpo rígido

En esta sección tratamos el movimiento de un cuerpo rígido que rueda a lo largo de una superficie plana. En general, este movimiento es muy complejo. Suponga, por ejemplo, que un cilindro está rodando en una trayectoria recta en forma tal, que el eje de rotación permanece paralelo a su orientación inicial en el espacio. Como se muestra en la figura 10.26, un punto sobre el borde del cilindro se mueve en una trayectoria compleja llamada *cicloide*. No obstante, podemos simplificar las cosas si nos concentramos en el centro de masa en lugar de un punto sobre el borde del cuerpo que rueda. Como vemos en la figura 10.26, el centro de masa se mueve en línea recta. Si un cuerpo como un cilindro rueda sin deslizar sobre la superficie (éste se denomina *movimiento puro de rotación*), podemos demostrar que existe una relación sencilla entre sus movimientos de rotación y de traslación.

Considere un cilindro uniforme de radio R que rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal (figura 10.27). Cuando el cilindro rota todo un ángulo θ, su centro de masa se mueve una distancia lineal $s = R\theta$ (vea ecuación 10.1a). Por lo tanto, la rapidez lineal del centro de masa para movimiento de rotación puro está dada por

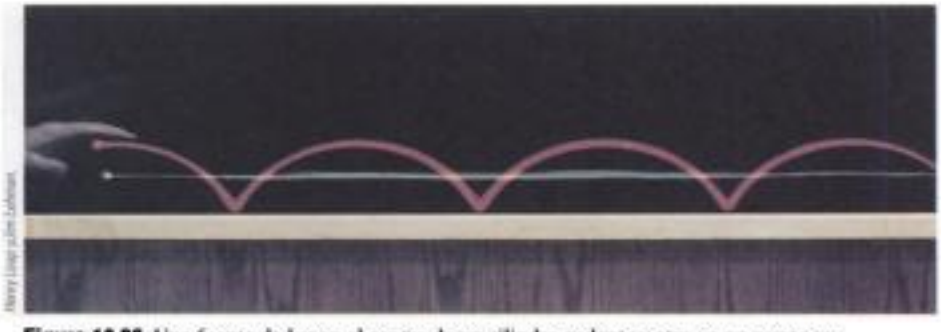
$$v_{CM} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \tag{10.25}$$

donde ω es la rapidez angular del cilindro. La ecuación 10.25 se cumple siempre que un cilindro o esfera ruede sin deslizar y es la **condición para movimiento de rotación puro.**

¡ADVERTENCIA!

10.6 La ecuación 10.25 parece conocida

La ecuación 10.25 parece ser muy semejante a la ecuación 10.10, por lo cual el estudiante debe estar seguro de la diferencia. La ecuación 10.10 da la rapidez *tangencial* de un punto sobre un cuerpo *giratorio*, situado a una distancia r del eje de rotación, si el cuerpo tiene movimiento giratorio con rapidez angular ω. La ecuación 10.25 da la rapidez *de traslación* del centro de masa de un cuerpo *rodante* de radio R que rueda con rapidez angular ω.



Harry Lange y John Lehman

Figura 10.26 Una fuente de luz en el centro de un cilindro rodante y otra en un punto sobre el borde ilustran las diferentes trayectorias que toman estos dos puntos. El centro se mueve en línea recta (línea verde), en tanto que el punto sobre el borde se mueve en la trayectoria denominada cicloide (curva roja).

Materiał chroniony prawem autorskim

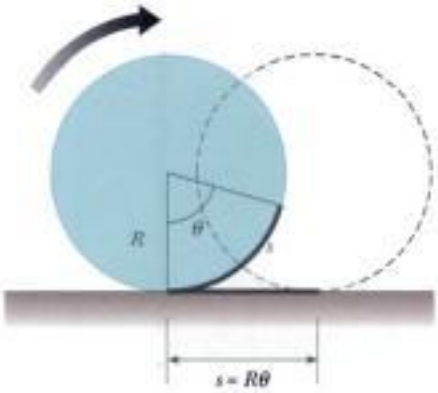


Figura 10.27 Para movimiento de rotación puro, cuando el cilindro rota todo un ángulo θ, su centro se mueve una distancia lineal $s = R\theta$.

La magnitud de la aceleración lineal del centro de masa para movimiento de rotación puro es

$$a_{CM} = \frac{dv_{CM}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha \tag{10.26}$$

donde α es la aceleración angular del cilindro.

Las velocidades lineales del centro de masa y de varios puntos sobre y dentro del cilindro se ilustran en la figura 10.28. Un corto tiempo después del momento mostrado en el dibujo, el punto del borde marcado como P podría rodar de la posición de las 6, por ejemplo, a la posición de las siete en el reloj, mientras que el punto Q podría rodar de la posición de las diez a la posición de las once en el reloj, y así sucesivamente. Nótese que la velocidad lineal de cualquier punto está en una dirección perpendicular a la línea desde este punto al punto de contacto P. En cualquier instante, la parte del borde que está en el punto P está en reposo con respecto a la superficie, porque no se presenta un deslizamiento.

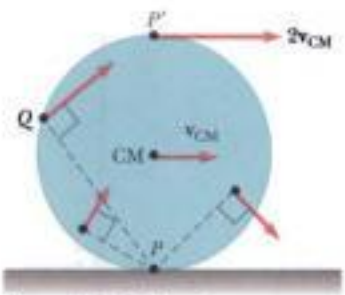


Figura 10.28 Todos los puntos sobre un cuerpo que rueda se mueven en una dirección perpendicular a un eje que pasa por el punto instantáneo de contacto P. En otras palabras, todos los puntos rotan alrededor de P. El centro de masa del cuerpo se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_{CM}$, y el punto P' se mueve con una velocidad $2\mathbf{v}_{CM}$.

Todos los puntos del cilindro tienen la misma rapidez angular. Por lo tanto, como la distancia de P' a P es el doble de la distancia de P al centro de masa, P' tiene una rapidez $2v_{CM} = 2R\omega$. Para ver por qué es esto así, modelemos el movimiento de rotación del cilindro de la figura 10.29 como una combinación de movimiento de traslación y de rotación. Para el movimiento de traslación puro que se muestra en la figura 10.29a, imagine que el cilindro no rueda, de modo que cada punto sobre él se mueve a la derecha con rapidez v_{CM}. Para el movimiento de rotación puro que se ilustra en la figura 10.29b, imagine que un eje de rotación que pasa por el centro de masa es estacionario, de modo que cada punto sobre el cilindro tiene la misma rapidez angular ω. La combinación de estos dos movimientos representa el movimiento de rotación que se ilustra en la figura 10.29c. Nótese, en la figura 10.29c, que la parte superior del cilindro tiene rapidez lineal $v_{CM} + R\omega = v_{CM} + v_{CM} = 2v_{CM}$, que es mayor que la rapidez lineal de cualquier otro punto sobre el cilindro. Como ya mencionamos antes, el centro de masa se mueve con una rapidez lineal v_{CM}, en tanto que el punto de contacto entre la superficie y el cilindro tiene una rapidez lineal de cero.

Podemos expresar la energía cinética total del cilindro que rueda como

$$K = \tfrac{1}{2}I_P\omega^2 \tag{10.27}$$

donde I_P es el momento de inercia alrededor de un eje de rotación que pasa por P. Aplicando el teorema de los ejes paralelos, podemos sustituir $I_P = I_{CM} + MR^2$ en la ecuación 10.27 para obtener

$$K = \tfrac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \tfrac{1}{2}MR^2\omega^2$$

o bien, como $v_{CM} = R\omega$,

$$K = \tfrac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mv_{CM}^2 \tag{10.28}$$

Energía cinética total de un cuerpo en rotación

Materiał chroniony prawem autorskim

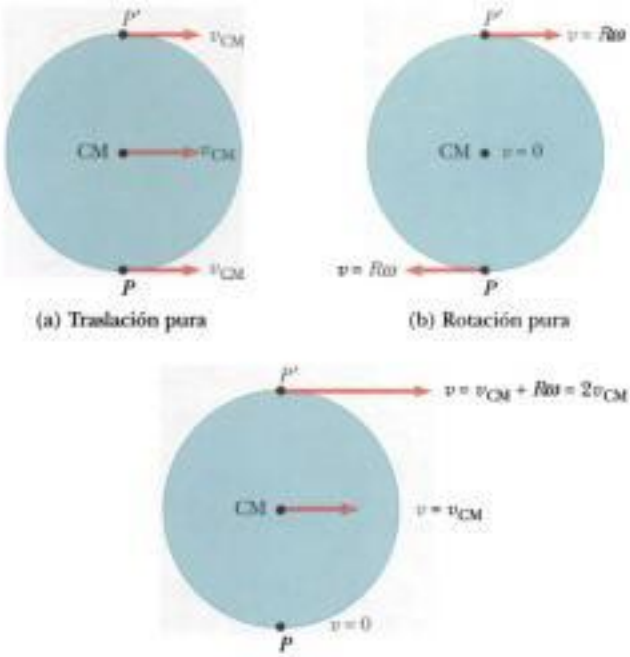


Figura 10.29 El movimiento de un cuerpo que rueda puede modelarse como una combinación de traslación pura y rotación pura.

El término $\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$ representa la energía cinética rotacional del cilindro alrededor de su centro de masa, y el término $\frac{1}{2}Mv_{CM}{}^2$ representa la energía cinética que el cilindro tendría si sólo se traslada en el espacio sin rodar. Por lo tanto, podemos decir que la **energía cinética total de un cuerpo que rueda es la suma de la energía cinética de rotación alrededor del centro de masa y la energía cinética de traslación del centro de masa.**

Podemos usar métodos de energía para tratar una clase de problemas concernientes al movimiento de rotación de un cuerpo que baja por un plano inclinado rugoso. Por ejemplo, considere la figura 10.30, que muestra una esfera que rueda sin resbalar después de ser soltada desde el reposo en la parte superior del plano inclinado. Nótese que el movimiento acelerado de rotación es posible sólo si una fuerza de fricción está presente entre la esfera y el plano inclinado para producir un momento de torsión neto alrededor del centro de masa. A pesar de la presencia de la fricción, no hay pérdida de energía mecánica, porque el punto de contacto está en reposo con respecto a la superficie en cualquier instante. (Por otra parte, si la esfera resbala, se perdería energía mecánica del sistema formado por la esfera, el plano inclinado y la Tierra, debido a la fuerza no conservativa de la fricción cinética).

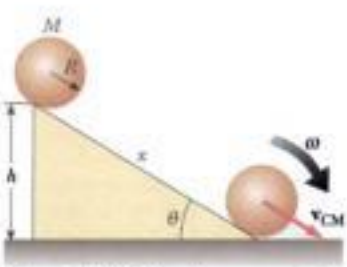


Figura 10.30 Una esfera que rueda hacia abajo en un plano. Si no ocurre deslizamiento, se conserva la energía mecánica del sistema formado por la esfera, el plano inclinado y la Tierra.

En el vínculo **Active Figures** *en* **http://www.pse6.com,** *usted podrá rodar hacia abajo varios cuerpos en un cerro y ver cómo la rapidez final depende del tipo de cuerpo.*

Si usamos el hecho que $v_{CM} = R\omega$ para movimiento de rotación puro, podemos expresar la ecuación 10.28 como

$$K = \tfrac{1}{2}I_{CM}\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 + \tfrac{1}{2}Mv_{CM}{}^2$$

$$K = \tfrac{1}{2}\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right)v_{CM}{}^2 \qquad (10.29)$$

Para el sistema de la esfera y la Tierra, definimos la configuración cero de energía potencial gravitacional cuando la esfera está en la parte más baja del plano inclinado. Así, la conservación de la energía mecánica nos da

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right)v_{CM}{}^2 + 0 = 0 + Mgh$$

$$v_{CM} = \left(\frac{2gh}{1 + (I_{CM}/MR^2)}\right)^{1/2} \qquad (10.30)$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Pregunta rápida 10.12 Una pelota rueda hacia abajo sin deslizar por un plano inclinado A, iniciando desde el reposo. Al mismo tiempo, una caja inicia desde el reposo y se desliza por el plano inclinado B, que es idéntico al plano inclinado A, excepto que es sin fricción. ¿Cuál llega primero al fondo? (a) la pelota, (b) la caja, (c) ambas llegan al mismo tiempo, (d) imposible de determinar.

Pregunta rápida 10.13 Dos esferas sólidas ruedan hacia abajo por un plano inclinado, iniciando desde el reposo. La esfera A tiene el doble de masa y el doble de radio que la esfera B. ¿Cuál llega primero al fondo? (a) la esfera A, (b) la esfera B, (c) ambas llegan al mismo tiempo, (d) imposible de determinar.

Pregunta rápida 10.14 Dos esferas ruedan hacia abajo por un plano inclinado, iniciando desde el reposo. La esfera A tiene la misma masa y radio que la esfera B, pero la esfera A es sólida, en tanto que la esfera B es hueca. ¿Cuál llega primero al fondo? (a) la esfera A, (b) la esfera B, (c) ambas llegan al mismo tiempo, (d) imposible de determinar.

Ejemplo 10.16 Esfera que rueda hacia abajo por un plano inclinado

Para la esfera sólida de la figura 10.30, calcule la rapidez lineal del centro de masa en el fondo del plano inclinado y la magnitud de la aceleración lineal del centro de masa.

Solución Para una esfera sólida uniforme, $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$ (véase la tabla 10.2), y por lo tanto la ecuación 10.30 da

$$v_{CM} = \left(\frac{2gh}{1 + (\frac{2}{5}MR^2/MR^2)}\right)^{1/2} = (\tfrac{10}{7}gh)^{1/2}$$

Nótese que esto es menor que $\sqrt{2gh}$, que es la rapidez que un objeto tendría si simplemente resbalara hacia abajo por el plano sin rodar (vea el ejemplo 8.7).

Para calcular la aceleración lineal del centro de masa, observamos que el desplazamiento vertical está relacionado con el desplazamiento x a lo largo del plano por medio de la relación $h = x \operatorname{sen} \theta$. En consecuencia, después de elevar al cuadrado ambos lados, podemos expresar la ecuación anterior como

$$v_{CM}{}^2 = \tfrac{10}{7}gx \operatorname{sen} \theta$$

Al comparar esto con la expresión de cinemática, $v_{CM}{}^2 = 2a_{CM}x$ (véase la ecuación 2.13), vemos que la aceleración del centro de masa es

$$a_{CM} = \tfrac{5}{7}g \operatorname{sen} \theta$$

Estos resultados son interesantes porque la rapidez y la aceleración del centro de masa son *independientes* de la masa y el radio de la esfera. Esto es, **todas las esferas sólidas homogéneas experimentan la misma rapidez y aceleración en un plano inclinado dado,** como se argumenta en la respuesta a la Pregunta rápida 10.13.

Si tuviéramos que repetir el cálculo de la aceleración para una esfera hueca, un cilindro sólido, o un aro, obtendríamos resultados semejantes en los que sólo el factor frente a $g \operatorname{sen} \theta$ difiere. Los factores constantes que aparecen en las expresiones para v_{CM} y a_{CM} dependen sólo del momento de inercia alrededor del centro de masa para el cuerpo específico. En todos los casos, la aceleración del centro de masa es *menor* a $g \operatorname{sen} \theta$, el valor que la aceleración tendría si el plano inclinado fuera sin fricción y no hubiera rodamiento.

RESUMEN

Si una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio r en un ángulo θ (medido en radianes), la longitud de arco que se mueve es $s = r\theta$.

La **posición angular** de un cuerpo rígido se define como el ángulo θ entre una línea de referencia unida al objeto y una línea de referencia fija en el espacio. El **desplazamiento angular** de una partícula que se mueve en una trayectoria circular o cuerpo rígido que rota alrededor de un eje fijo es $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$.

Materiał chroniony prawem autorskim

La **rapidez angular instantánea** de una partícula que se mueve en una trayectoria circular, o de un cuerpo rígido que rota alrededor de un eje fijo, es

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{10.3}$$

La **aceleración angular instantánea** de una partícula que se mueve en una trayectoria circular o un cuerpo rígido rotando es

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{10.5}$$

Cuando un cuerpo rígido rota alrededor de un eje fijo, todas las partes del cuerpo tienen la misma rapidez angular y la misma aceleración angular.

Si un cuerpo rota alrededor de un eje fijo bajo aceleración angular constante, es posible aplicar ecuaciones de cinemática que son análogas a las del movimiento lineal bajo aceleración lineal constante:

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \tag{10.6}$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \tag{10.7}$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \tag{10.8}$$

$$\theta_f = \theta_i + \tfrac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \tag{10.9}$$

Una técnica útil para resolver problemas que se refieran a rotación, es visualizar una versión lineal del mismo problema.

Cuando un cuerpo rígido rota alrededor de un eje fijo, la posición angular, la rapidez angular, y aceleración angular, están relacionadas con la posición lineal, rapidez lineal, y aceleración lineal por medio de las relaciones

$$s = r\theta \tag{10.1a}$$

$$v = r\omega \tag{10.10}$$

$$a_t = r\alpha \tag{10.11}$$

El **momento de inercia de un sistema de partículas** se define como

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{10.15}$$

Si un cuerpo rígido rota alrededor de un eje fijo con rapidez angular ω, su **energía cinética rotacional se** puede escribir como

$$K_R = \tfrac{1}{2} I\omega^2 \tag{10.16}$$

donde I es el momento de inercia alrededor del eje de rotación.

El **momento de inercia de un cuerpo rígido** es

$$I = \int r^2 dm \tag{10.17}$$

donde r es la distancia desde el elemento de masa dm al eje de rotación.

La magnitud del **momento de torsión** asociado con una fuerza **F** que actúa sobre un objeto es

$$\tau = Fd \tag{10.19}$$

donde d es el brazo de momento de la fuerza, que es la distancia perpendicular desde el eje de rotación a la recta de acción de la fuerza. El momento de torsión es una medida de la tendencia de la fuerza a cambiar la rotación del objeto alrededor de algún eje.

Si un cuerpo rígido libre para rotar alrededor de un eje fijo tiene un **momento de torsión externo neto** que actúa sobre él, el cuerpo experimenta una aceleración angular α, donde

$$\sum \tau = I\alpha \tag{10.21}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

La rapidez a la que una fuerza externa realiza trabajo al hacer rotar un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo, o la **potencia** entregada, es

$$\mathcal{P} = \tau\omega \tag{10.23}$$

Si se realiza trabajo sobre un cuerpo rígido y el único resultado del trabajo es rotación alrededor de un eje fijo, el trabajo neto realizado por fuerzas externas al hacer rotar el cuerpo es igual al cambio en la energía cinética rotacional del cuerpo:

$$\sum W = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 \tag{10.24}$$

La **energía cinética total** de un cuerpo rígido que rueda sobre una superficie rugosa sin deslizar, es igual a la energía cinética rotacional alrededor de su centro de masa, $\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$, más la energía cinética de traslación del centro de masa, $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$:

$$K = \tfrac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mv_{CM}^2 \tag{10.28}$$

PREGUNTAS

1. ¿Cuál es la rapidez angular del segundero de un reloj? ¿Cuál es la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ cuando se observa un reloj que pende de una pared vertical? ¿Cuál es la magnitud del vector de aceleración vertical $\boldsymbol{\alpha}$ del segundero?
2. Una hoja de unas tijeras rota en sentido contrario al de las manecillas de un reloj en el plano xy. ¿Cuál es la dirección de $\boldsymbol{\omega}$? ¿Cuál es la dirección de $\boldsymbol{\alpha}$ si la magnitud de la velocidad angular es decreciente en el tiempo?
3. ¿Son válidas las expresiones cinemáticas para θ, ω y α cuando la posición angular se mide en grados en lugar de radianes?
4. Si los neumáticos estándar de un auto se cambian por llantas de diámetros exteriores más grandes, ¿cambia la indicación del velocímetro? Explique.
5. Suponga que $a = b$ y $M > m$ para el sistema de partículas descrito en la figura 10.8. ¿Alrededor de cuál eje (x, y o z) tiene su mínimo valor el momento de inercia? ¿y su máximo valor?
6. Suponga que la varilla de la figura 10.10 tiene una distribución de masa no uniforme. En general, ¿sería igual a $ML^2/12$ el momento de inercia alrededor del eje y? Si no es así, ¿se podría calcular el momento de inercia sin saber cómo está distribuida la masa?
7. Suponga que sólo dos fuerzas externas actúan sobre un cuerpo rígido estacionario y las dos fuerzas son iguales en magnitud y opuestas en dirección. ¿Bajo qué condición empieza a girar el cuerpo?
8. Suponga que un lápiz se balancea en una mesa perfectamente sin fricción. Si cae al piso, ¿cuál es la trayectoria seguida por el centro de masa del lápiz?
9. Explique el lector la forma en que podría usar el aparato descrito en el ejemplo 10.12 para determinar el momento de inercia de la rueda. (Si la rueda no tiene densidad de masa uniforme, el momento de inercia no es necesariamente igual a $\frac{1}{2}MR^2$.)
10. Usando los resultados del ejemplo 10.12, ¿cómo calcularía el lector la rapidez angular de la rueda y la rapidez lineal del contrapeso suspendido en $t = 2$ s, si el sistema se suelta desde el reposo en $t = 0$? ¿Es la expresión $v = R\omega$ válida para esta situación?
11. Si una pequeña esfera de masa M se pusiera en el extremo de la varilla de la figura 10.24, ¿el resultado para ω sería mayor, menor o igual al valor obtenido en el ejemplo 10.14?
12. Explique por qué al cambiar el eje de rotación de un cuerpo cambia su momento de inercia.
13. El momento de inercia de un cuerpo depende de la selección del eje de rotación, como lo sugiere el teorema de los ejes paralelos. Discuta que un eje que pase por el centro de masa de un cuerpo debe ser el eje con el mínimo momento de inercia.
14. Supongamos que el lector saca dos huevos del refrigerador, uno de ellos cosido duro y el otro sin cocinar. Desea determinar cuál es el huevo duro sin romper los cascarones, lo cual es posible si hace rodar los huevos en el piso y comparar los movimientos de rotación. ¿Cuál huevo rueda con más rapidez? ¿Cuál rueda más uniformemente? Explique.
15. ¿Cuál de las entradas de la tabla 10.2 aplica para hallar el momento de inercia de un tubo largo recto de drenaje que gira alrededor de su eje de simetría? ¿De un aro de bordado que gira alrededor de un eje que pasa por su centro y perpendicular a su plano? ¿De una puerta uniforme que gira en sus bisagras? ¿De una moneda que gira alrededor de un eje que pasa por su centro y perpendicular a sus caras?
16. ¿Es posible cambiar la energía cinética de traslación de un cuerpo sin cambiar su energía de rotación?
17. ¿Debe un cuerpo estar girando para tener momento de inercia diferente de cero?
18. Si se ve que un cuerpo está girando, ¿hay necesariamente un momento de torsión neto actuando sobre él?
19. ¿Puede un cuerpo estacionario (momentáneamente) tener una aceleración angular diferente de cero?
20. En un reproductor de cinta, ésta es jalada por el mecanismo de movimiento y pasa por cabezas de lectura y escritura con rapidez constante. Considere el carrete del cual se jala la cinta. Cuando ésta es jalada, disminuye el radio del rollo de cinta restante. ¿Cómo cambia con el tiempo el momento de torsión sobre el carrete? ¿Cómo cambia con el tiempo la velocidad angular del carrete? Si el mecanismo de movimiento se conecta de modo que de pronto la cinta es jalada con una gran fuerza, ¿es más probable que

Materiał chroniony prawem autorskim

la cinta se rompa cuando es jalada de un carrete casi lleno o de un carrete casi vacío?

21. El diámetro polar de la Tierra es ligeramente menor que el diámetro ecuatorial. ¿Cómo cambiaría el momento de inercia de la Tierra alrededor de su eje de rotación, si parte de su masa cercana al ecuador se removiera y transfiriera a las regiones polares, para hacer que la Tierra fuera una esfera perfecta?

22. Supongamos que el lector hace que su libro se deslice, con cierta rapidez inicial, por el piso de un gimnasio. El libro se detiene rápidamente debido a la fuerza de fricción ejercida por el piso. A continuación, hace rodar un balón con la misma rapidez inicial; el balón sigue rodando de un extremo a otro del gimnasio. ¿Por qué el balón rueda tan lejos? ¿La fricción afecta significativamente su movimiento?

23. Cuando un cilindro rueda sobre una superficie horizontal, como se ve en la figura 10.28, ¿cualquier punto del cilindro tiene sólo un componente vertical de velocidad en un instante? Si es así, ¿dónde está?

24. Tres cuerpos de densidad uniforme que son una esfera sólida, un cilindro sólido y un cilindro hueco se colocan en la parte superior de un plano inclinado (figura Q10.24). Todos se sueltan desde el reposo a la misma elevación y ruedan sin deslizar. ¿Cuál de ellos llega primero hasta abajo? ¿Cuál llega al último? Intente esto en casa y observe que el resultado es independiente de las masas y radios de los cuerpos.

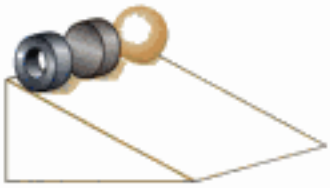


Figura Q10.24 ¿Cuál cuerpo gana la carrera?

25. En una carrera en cajas de jabón, los autos no tienen motores; simplemente bajan por inercia en una pendiente para competir unos con otros. ¿Desea usted usar ruedas grandes o pequeñas? ¿Desea usted usar ruedas sólidas semejantes a discos, o ruedas semejantes a arillos? Las ruedas ¿deben ser pesadas o ligeras?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, difícil = solución guiada con sugerencias disponibles en http://www.pse6.com

= use computadora para resolver el problema = problemas numéricos y simbólicos por pares

Sección 10.1 Posición, velocidad y aceleración angulares

1. Durante cierto periodo, la posición angular de una puerta giratoria está descrita por $\theta = 5.00 + 10.0t + 2.0t^2$, donde θ es en radianes y t es en segundos. Determine la posición angular, rapidez angular y aceleración angular de la puerta (a) en $t = 0$ (b) en $t = 3.00$ s.

Sección 10.2 Cinemática rotacional: movimiento rotacional con aceleración angular constante

2. El taladro de un dentista inicia desde el reposo. Después de 3.20 s de aceleración angular constante, gira a razón de 2.51×10^4 rev/min. (a) Hállese la aceleración angular del taladro. (b) Determine el ángulo (en radianes) que gira el taladro durante este periodo.

3. Una rueda inicia desde el reposo y rota con aceleración angular constante para alcanzar una rapidez angular de 12.0 rad/s en 3.00 s. Encuentre (a) la magnitud de la aceleración angular de la rueda y (b) el ángulo en radianes que gira en este tiempo.

4. Un avión llega a la terminal, y los motores son apagados. El rotor de uno de los motores tiene una rapidez angular inicial de 2 000 rad/s en el sentido de giro de las manecillas del reloj. La rotación del motor se reduce con una aceleración angular de magnitud 80.0 rad/s^2. (a) Determine la rapidez angular después de 10.0 s. (b) ¿Cuánto tarda el rotor en llegar al reposo?

5. Un motor eléctrico que hace rotar a una rueda de esmeril a 100 rev/min es desconectado. Con aceleración angular negativa constante de magnitud 2.00 rad/s^2, (a) ¿cuánto tarda la rueda en detenerse? (b) Cuántos radianes gira cuando está reduciendo su velocidad?

6. Una centrifugadora de un laboratorio médico gira a una rapidez angular de 3 600 rev/min. Cuando es apaga, gira 50.0 veces antes de llegar al reposo. Encuentre la aceleración angular constante de la centrifugadora.

7. La tina de una lavadora entra en un ciclo de lavado, iniciando desde el reposo y adquiriendo rapidez angular constantemente durante 8.00 s, en cuyo momento está girando a 5.00 rev/s. En este punto, la persona que hace el lavado abre la tapa y un interruptor de seguridad apaga la máquina. La tina reduce lentamente su velocidad y llega al reposo en 12.0 s. ¿Cuántas revoluciones hace la tina cuando está en movimiento?

8. Una rueda giratoria requiere de 3.00 s para girar 37.0 revoluciones. Su rapidez angular al final del intervalo de 3.00 s es 98.0 rad/s. ¿Cuál es la aceleración angular constante de la rueda?

9. (a) Encuentre la rapidez angular de rotación de la Tierra sobre su eje. Como la Tierra gira hacia el este, vemos que el cielo gira hacia el oeste al mismo ritmo.

(b) *Las lluviosas Pléyades se mueven al poniente*
y buscan más allá del mar
la cabeza en la que soñaré
y que no soñará en mí.

A.E.Housman (©Robert E. Symons)

Materiał chroniony prawem autorskim

Cambridge, Inglaterra, está en la longitud 0°, y Saskatoon, Saskatchewan, está en la longitud 107° oeste. ¿Cuánto tiempo transcurre después que las Pléyades se ponen en Cambridge hasta que estas estrellas caigan abajo del horizonte occidental en Saskatoon?

10. Un tiovivo está estacionario. Un perro corre por el suelo justo fuera de la circunferencia del tiovivo, moviéndose con una rapidez angular constante de 0.750 rad/s. El perro no cambia su paso cuando ve lo que estaba buscando: un hueso que estaba en el borde del tiovivo a un tercio de revolución frente a él. En el instante en que el pero ve el hueso ($t = 0$), el tiovivo empieza a moverse en la dirección en la que corre el perro, con una aceleración angular constante de 0.015 0 rad/s². (a) ¿En qué tiempo el hueso será alcanzado por el perro? (b) El confuso perro sigue corriendo y pasa al hueso. ¿Cuánto tiempo después que el tiovivo empieza a girar es que el perro y el hueso se emparejan uno al otro por segunda vez?

Sección 10.3 Cantidades angulares y lineales

11. Haga un estimado de orden de magnitud del número de revoluciones en las que una llanta de un automóvil típico gira en un año. Exprese las cantidades que mida o estime y sus valores.

12. Un auto de carreras corre por una pista circular de 250 m de radio. Si el auto se mueve con rapidez angular constante de 45.0 m/s, encuentre (a) su rapidez angular y (b) la magnitud y dirección de su aceleración

13. Una rueda de 2.00 m de diámetro se encuentra en un plano vertical y gira con una aceleración angular constante de 4.00 rad/s². La rueda inicia del reposo en $t = 0$, y el radio vector de cierto punto P sobre el borde hace un ángulo de 57.3° con la horizontal en este tiempo. En $t = 2.00$ s, encuentre (a) la rapidez angular de la rueda, (b) la rapidez tangencial y la aceleración total del punto P, y (c) la posición angular del punto P.

14. La figura P10.14 muestra el tren de movimiento de una bicicleta que tiene ruedas de 67.3 cm de diámetro y palancas de pedal de 17.5 cm de largo. El ciclista pedalea a un ritmo angular constante de 76.0 rev/min. La cadena engancha con una rueda dentada delantera de 15.2 cm de diámetro y una rueda dentada trasera de 7.00 cm de diámetro. (a) Calcule la rapidez de un eslabón de la cadena con respecto al bastidor de la bicicleta. (b) Calcule la rapidez angular de las ruedas de la bicicleta. (c) Calcule la rapidez de la bicicleta con respecto al pavimento. (d) ¿Qué partes de los datos, si las hay, no son necesarias para los cálculos?

Figura P10.14

15. Un deportista de lanzamiento de disco (figura P10.15) acelera un disco desde el reposo a una velocidad de 25.0 m/s al girar con él 1.25 revoluciones. Suponga que el disco se mueve en el arco de un círculo de 1.00 metro de radio. (a) Calcule la rapidez angular final del disco. (b) Determine la magnitud de la aceleración angular del disco, suponiéndola constante. (c) Calcule el intervalo necesario para que el disco acelere desde el reposo hasta 25.0 m/s.

Bruce Ayres/Stone/Getty

Figura P10.15

16. Un auto acelera uniformemente desde el reposo y alcanza una rapidez de 22.0 m/s en 9.00 s. Si el diámetro de una llanta es 58.0 cm, encuentre (a) el número de revoluciones que la llanta hace durante este movimiento, suponiendo que no ocurre deslizamiento. (b) ¿Cuál es la rapidez angular final de una llanta en revoluciones por segundo?

17. Un disco de 8.00 cm de radio rota a una rapidez constante de 1 200 rev/min alrededor de su eje central. Determine (a) su rapidez angular, (b) la rapidez tangencial en un punto a 3.00 cm de su centro, (c) la aceleración radial de un punto sobre el borde, y (d) la distancia total que un punto sobre el borde se mueve en 2.00 s.

18. Un auto que corre en una pista circula plana (sin peralte) acelera uniformemente desde el reposo con una aceleración tangencial de 1.70 m/s². El auto recorre un cuarto de la distancia alrededor del círculo antes de patinar y salirse del camino. Determine el coeficiente de fricción estático entre el auto y el pavimento a partir de estos datos.

19. Considere un edificio alto situado en el ecuador terrestre. Cuando nuestro planeta gira, una persona en el piso más alto del edificio se mueve más rápido que alguien que esté en el suelo con respecto al marco de referencia inercial, porque esta última persona está más cerca del eje de la Tierra. En consecuencia, si un objeto se deja caer del piso alto al suelo una distancia h, el objeto cae al este del punto verticalmente abajo de donde se deja caer. (a) ¿A qué distancia al este cae el objeto? Exprese su respuesta en términos de h, g, y la rapidez angular ω de la Tierra. Desprecie la resistencia del aire y suponga que la aceleración de caída libre es constante en este rango de alturas. (b) Evalúe el desplazamiento al este para $h = 50.0$ m. (c) En su opinión, ¿se justificaría que no hiciéramos caso de este aspecto del *efecto Coriolis* en nuestro estudio previo de caída libre?

Materiał chroniony prawem autorskim

Sección 10.4 Energía cinética rotacional

20. Varillas rígidas de masa despreciable que se encuentran a lo largo del eje y conectan tres partículas (figura P10.20). Si el sistema gira alrededor del eje x con una rapidez angular de 2.00 rad/s, encuentre (a) el momento de inercia alrededor del eje x y la energía cinética rotacional total evaluada desde $\frac{1}{2}I\omega^2$ y (b) la rapidez tangencial de cada partícula y la energía cinética total evaluada desde $\Sigma\frac{1}{2}m_iv_i^2$.

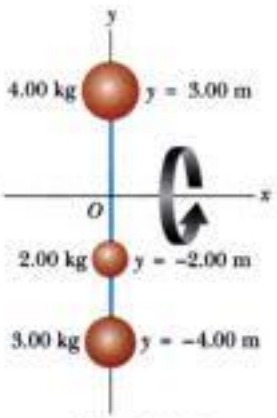


Figura P10.20

21. Las cuatro partículas de la figura P10.21 están unidas por varillas rígidas de masa despreciable. El origen está en el centro del rectángulo. Si el sistema gira en el plano xy alrededor del eje z con una rapidez angular de 6.00 rad/s, calcule (a) el momento de inercia del sistema alrededor del eje z y (b) la energía cinética rotacional del sistema.

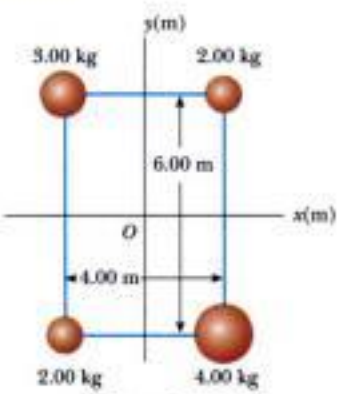


Figura P10.21

22. Dos esferas de masas M y m están unidas por una varilla rígida de longitud L y masa despreciable, como en la figura P10.22. Para un eje perpendicular a la varilla, muestre que el sistema tiene el momento mínimo de inercia cuando el eje pasa por el centro de masa. Demuestre que este momento de inercia es $I = \mu L^2$, donde $\mu = mM/(m + M)$.

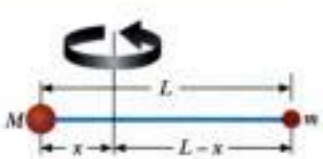


Figura P10.22

Sección 10.5 Cálculo de momentos de inercia

23. Tres varillas delgadas idénticas, cada una de longitud L y masa m, se sueldan perpendiculares entre ellas como se ve en la figura P10.23. El conjunto se hace girar alrededor de un eje que pasa por el extremo de una varilla y es paralelo a los otros. Determine el momento de inercia de esta estructura.

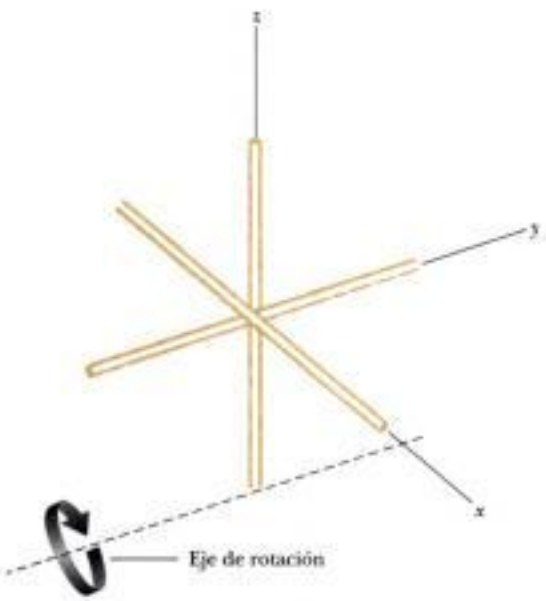


Figura P10.23

24. La figura P10.24 muestra una vista lateral de la llanta de un auto. Modele la llanta como que tiene dos costados de grosor uniforme de 0.635 cm y una pared de superficie de rodadura de 2.50 cm de

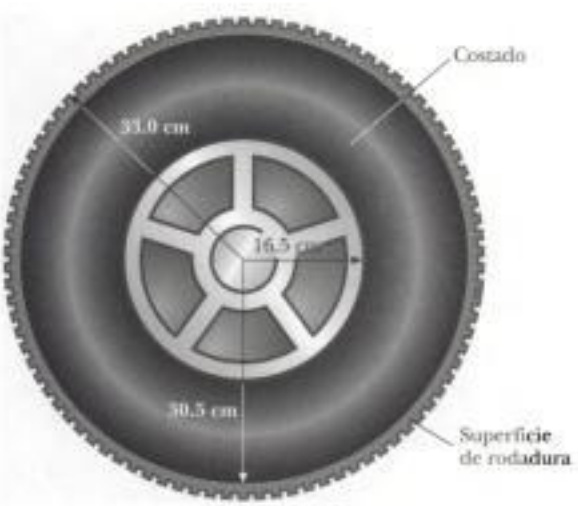


Figura P10.24

Materiał chroniony prawem autorskim

grosor uniforme y ancho de 20.0 cm. Suponga que el caucho tiene densidad uniforme de 1.10×10^3 kg/m^3. Encuentre su momento de inercia alrededor de un eje que pasa por su centro.

25. Una puerta sólida, delgada y uniforme, tiene una altura de 2.20 m, ancho de 0.870 cm, y masa de 23.0 kg. Encuentre su momento de inercia para rotación sobre sus bisagras. ¿Es innecesaria alguna parte de los datos?

26. *¡Atención! ¡Media vuelta!* Calcule una estimación de orden de magnitud para el momento de inercia de su cuerpo cuando se encuentre de pie y gira alrededor de un eje vertical que pasa por la parte alta de su cabeza y el punto medio entre sus tobillos. En su solución exprese las cantidades que mida o estime, y sus valores.

27. La densidad de la Tierra, en cualquier distancia r de su centro, es aproximadamente

$$\rho = [14.2 - 11.6(r/R)] \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

donde R es el radio de la Tierra. Demuestre que esta densidad lleva a un momento de inercia $I = 0.330MR^2$ alrededor de un eje que pasa por el centro, donde M es la masa de la Tierra.

28. Calcule el momento de inercia de una placa delgada, en forma de triángulo recto, alrededor de un eje que pasa por un extremo de la hipotenusa y es paralelo al cateto opuesto del triángulo, como en la figura P10.28a. Represente por M la masa del triángulo y por L la longitud de la base del triángulo perpendicular al eje de rotación. Represente por h la altura del triángulo y por w el grosor de la placa, mucho menor que L o h. Haga el cálculo en cualquiera de las dos formas siguientes, o en ambas, como lo asigne su maestro:

(a) Use la ecuación 10.17. Haga que un elemento de masa esté formado por un listón vertical dentro del triángulo, de ancho dx, altura y, y grosor w. Con x representando la ubicación del listón, demuestre que $y = hx/L$. Demuestre que la densidad del material está dada por $\rho = 2M/Lwh$. Demuestre que la masa del listón es $dm = \rho yw\,dx = 2Mx\,dx/L^2$. Prosiga a usar la ecuación 10.17 para calcular el momento de inercia.

(b) Represente por I el momento de inercia desconocido alrededor de un eje que pasa por el vértice del triángulo. Nótese que el ejemplo 9.15 demuestra que el centro de masa del triángulo está a dos tercios de distancia a lo largo de la longitud L, del vértice hacia el lado de altura h. Represente por I_{CM} el momento de inercia del triángulo alrededor de un eje que pasa por el centro de masa y paralelo al lado h. Demuestre que $I = I_{CM} + 4ML^2/9$. La figura P10.28b muestra el mismo objeto en una orientación diferente.

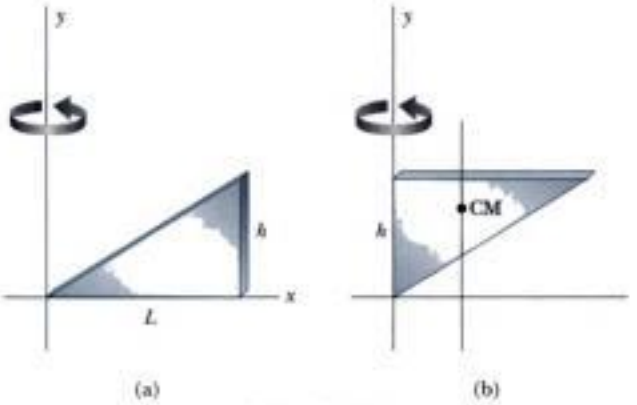


Figura P10.28

Demuestre que el momento de inercia de la placa triangular, alrededor del eje y es $I_h = I_{CM} + ML^2/9$. Demuestre que la suma de los momentos de inercia de los triángulos que se muestran en las partes (a) y (b) de la figura deben ser el momento de inercia de una hoja rectangular de masa $2M$ y longitud L, que gira como una puerta alrededor de un eje a lo largo de su borde de altura h. Use información de la tabla 10.2 para escribir el momento de inercia del rectángulo, y hágala igual a la suma de los momentos de inercia de los dos triángulos. Resuelva la ecuación para hallar el momento de inercia de un triángulo alrededor de un eje que pasa por su centro de masa, en términos de M y L. Prosiga para hallar la incógnita original I.

29. Muchas máquinas emplean levas para varios propósitos, como el de abrir y cerrar válvulas. En la figura P10.29, la leva es un disco circular que gira en un eje que no pasa por el centro del disco. En la manufactura de la leva, un cilindro sólido uniforme de radio R se maquina primero. Luego se taladra un agujero de radio $R/2$ fuera de centro, paralelo al eje del cilindro, y centrado en un punto a una distancia $R/2$ del centro del cilindro. La leva, de masa M, se desliza entonces sobre el eje circular y se suelda en su lugar. ¿Cuál es la energía cinética de la leva cuando está girando con rapidez angular ω alrededor del eje o línea de centro del eje?

Figura P10.29

Sección 10.6 Momento de torsión

30. La caña de pescar de la figura P10.30 forma un ángulo de 20.0° con la horizontal. ¿Cuál es el momento de torsión ejercido por el pez alrededor de un eje perpendicular a la página y que pasa por la mano del pescador?

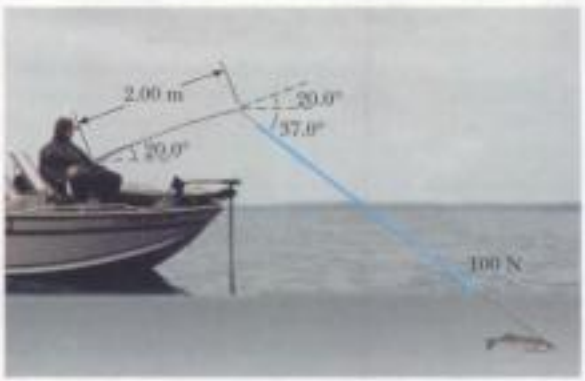


Figura P10.30

Materiał chroniony prawem autorskim

31. Encuentre el momento de torsión neto sobre la rueda de la figura P10.31 alrededor del eje que pasa por O si $a = 10.0$ cm y $b = 25.0$ cm

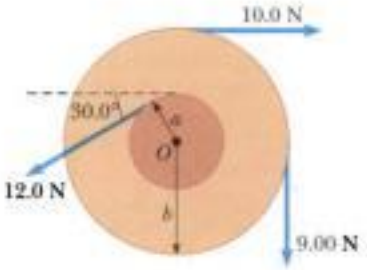


Figura P10.31

32. Las llantas de un auto de 1 500 kg miden 0.600 m de diámetro, y los coeficientes de fricción con la superficie del camino son $\mu_s = 0.800$ y $\mu_k = 0.600$. Si se supone que el peso está uniformemente distribuido sobre las cuatro ruedas, calcule el máximo momento de torsión que puede ser ejercido por el motor sobre una rueda motriz sin hacer girar la rueda. Si lo desea, puede suponer que el auto está en reposo.

33. Suponga que el auto del problema 32 tiene un sistema de frenos de disco. Cada rueda es frenada por la fuerza de fricción entre una sola pastilla del freno y el rotor en forma de disco. En este auto en particular, la pastilla del freno hace contacto con el rotor a una distancia promedio de 22.0 cm desde el eje. Los coeficientes de fricción entre la pastilla del freno y el disco son $\mu_s = 0.600$ y $\mu_k = 0.500$. Calcule la fuerza normal que la pastilla debe aplicar al rotor para reducir la velocidad del auto tan rápidamente como sea posible.

Sección 10.7 Relación entre momento de torsión y aceleración angular

34. Una rueda de esmeril tiene la forma de un disco sólido uniforme de 7.00 cm de radio y 2.00 kg de masa. Inicia desde el reposo y acelera uniformemente bajo la acción del momento de torsión constante de 0.600 N · m que el motor ejerce sobre la rueda. (a) ¿Cuánto tarda la rueda en alcanzar su rapidez final de operación de 1 200 rev/min? (b) ¿Cuántas revoluciones gira mientras acelera?

35. Un avión de juguete con masa 0.750 kg está sujeto por un alambre de modo que vuela en un círculo de 30.0 m de radio. El motor del avión produce un empuje neto de 0.800 N perpendicular al alambre de amarre. (a) Encuentre el momento de torsión que el empuje neto produce alrededor del centro del círculo. (b) Encuentre la aceleración angular del avión cuando está en vuelo a nivel. (c) Encuentre la aceleración lineal del avión tangente a su trayectoria de vuelo.

36. La combinación de una fuerza aplicada y una fuerza de fricción produce un momento de torsión total constante de 36.0 N · m sobre una rueda que gira alrededor de un eje fijo. La fuerza aplicada actúa durante 6.00 s. Durante este tiempo aumenta la rapidez angular de la rueda de 0 a 10.0 rad/s. La fuerza aplicada se retira luego, y la rueda llega al reposo en 60.0 s. Encuentre (a) el momento de inercia de la rueda, (b) la magnitud del momento de torsión de la fricción, y (c) el número total de revoluciones de la rueda.

37. Un bloque de masa $m_1 = 2.00$ kg y un bloque de masa $m_2 = 6.00$ kg están conectados por una cuerda sin masa sobre una polea en forma de disco sólido que tiene radio $R = 0.250$ m y masa $M = 10.0$ kg. Se permite que estos bloques se muevan sobre un bloque fijo en forma de cuña de ángulo $\theta = 30.0°$, como se ve en la figura P10.37. El coeficiente de fricción cinética es 0.360 para ambos bloques. Trace diagramas de cuerpo libre de ambos bloques y de la polea. Determine (a) la aceleración de los dos bloques y (b) las tensiones en la cuerda en ambos lados de la polea.

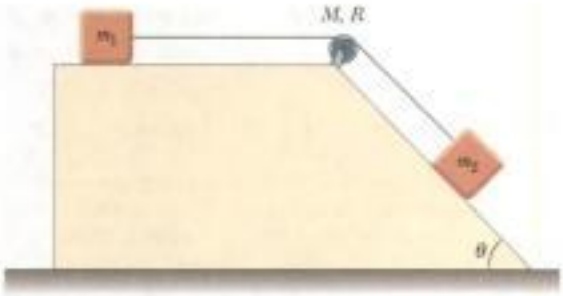


Figura P10.37

38. La rueda de un alfarero, grueso disco de piedra de 0.500 m de radio y 100 kg de masa, está girando libremente a 50.0 rev/min. El alfarero puede detener la rueda en 6.00 s al presionar una tela mojada contra el borde y ejerciendo una fuerza de 70.0 N radialmente hacia dentro. Encuentre el coeficiente efectivo de fricción cinética entre la rueda y la tela.

39. Un motor eléctrico hace girar un volante por medio de una banda de transmisión que enlaza una polea del motor y una polea que está rígidamente unida al volante, como se ve en la figura P10.39. El volante es un disco sólido con una masa de 80.0 kg y un diámetro de 1.25 m. Rota sobre un eje sin fricción. Su polea tiene una masa mucho menor y un radio de 0.230 m. Si la tensión del segmento superior (tenso) de la banda es de 135 N y el volante tiene una aceleración angular de 1.67 rad/s^2 en el sentido de las manecillas de un reloj, encuentre la tracción en el segmento inferior (flojo) de la banda.

Figura P10.39

Sección 10.8 Trabajo, potencia y energía en el movimiento rotacional

40. Big Ben, el reloj de la torre del Parlamento en Londres, tiene una manecilla de las horas de 2.70 m de largo con una masa de

Materiał chroniony prawem autorskim

60.0 kg, y una manecilla del minutero de 4.50 m de largo y una masa de 100 kg (figura P10.40). Calcule la energía cinética rotacional total de las dos manecillas alrededor del eje de rotación. (El estudiante puede modelar las manecillas como varillas largas y delgadas.)

Lawrence /Getty

43. En la figura P10.43, el bloque deslizante tiene una masa de 0.850 kg, el contrapeso tiene una masa de 0.420, y la polea es un cilindro hueco con masa de 0.350 kg, un radio interior de 0.020 0 m, y un radio exterior de 0.030 0 m. El coeficiente de fricción cinético entre el bloque y la superficie horizontal es 0.250. La polea gira sin fricción sobre su eje. La cuerda ligera no se estira ni resbala en la polea. El bloque tiene una velocidad de 0.820 m/s hacia la polea cuando pasa por una fotocompuerta. (a) Utilice métodos de energía para pronosticar su rapidez después que se ha movido a una segunda fotocompuerta, a 0.700 m de distancia. (b) Encuentre la rapidez angular de la polea en el mismo momento.

Figura P10.46

47. Este problema describe un método experimental para determinar el momento de inercia de un cuerpo de forma irregular, como la carga útil para un satélite. La figura P10.47 muestra un contrapeso de masa w suspendido por un cordón enrollado alrededor de un carrete de radio r, formando parte de una mesa giratoria que sostiene al cuerpo. La mesa giratoria puede girar sin fricción. Cuando el contrapeso se suelta desde el reposo, desciende una distancia h, adquiriendo una rapidez v. Demuestre que el momento de inercia I del aparato giratorio (incluyendo la mesa giratoria) es $wr^2(2gh/v^2 - 1)$.

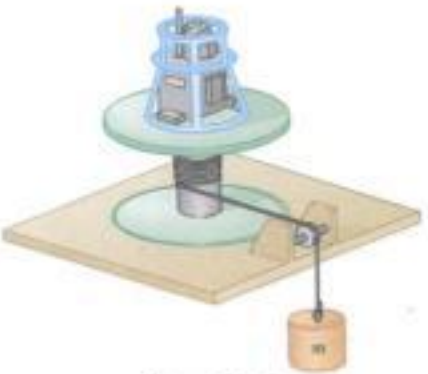


Figura P10.47

48. Un tiovivo horizontal de 800 N es un disco sólido de 1.50 m de radio, que inicia desde el reposo por medio de una fuerza horizontal constante de 50.0 N aplicada tangencialmente al borde del disco. Encuentre la energía cinética del disco después de 3.00 s.

49. (a) Un disco sólido uniforme de radio R y masa M está libre de rotar sobre un pivote sin fricción que pasa por un punto sobre su borde (figura P10.49). Si el disco se suelta desde el reposo en la posición mostrada por el círculo azul, ¿cuál es la rapidez de su centro de masa cuando el disco alcanza la posición indicada por el círculo de línea punteada? (b) ¿Cuál es la rapidez del punto más bajo del disco en la posición de líneas punteadas? (c) **¿Qué pasaría si?** Repita la parte (a) usando un aro uniforme.

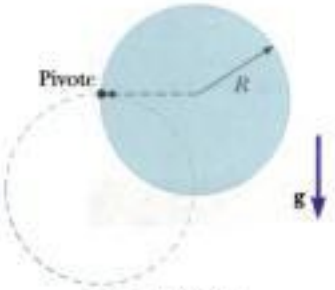


Figura P10.49

50. La cabeza de una podadora de hilo para pasto tiene 100 g de cuerda enrollada en un carrete cilíndrico ligero con diámetro interior de 3.00 cm y diámetro exterior de 18.0 cm, como se ve en la figura P10.50. El cordón tiene una densidad lineal de 10.0 g/m un pedazo de 16.0 cm desde el borde exterior del carrete. (a) Cuando se enciende, la podadora acelera de 0 a 2 500 rev/min en 0.215 s. (a) ¿Qué potencia promedio es entregada a la cabeza por el motor de la podadora cuando está acelerando? (b) Cuando la podadora está cortando pasto, gira a 2 000 rev/min y el pasto ejerce una fuerza tangencial promedio de 7.65 N sobre el extremo exterior del cordón, que está todavía a una distancia radial de 16.0 cm del borde exterior del carrete. ¿Cuál es la potencia entregada a la cabeza bajo carga?

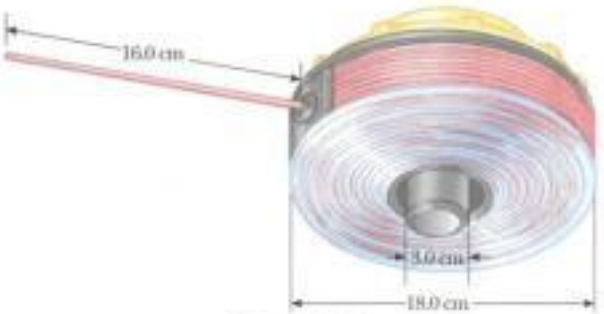


Figura P10.50

Sección 10.9 Movimiento de rotación de un cuerpo rígido

51. Un cilindro de masa 10.0 kg rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal. En el instante en que su centro de masa tiene una rapidez de 10.0 m/s, determine (a) la energía cinética de traslación de su centro de masa, (b) la energía cinética rotacional alrededor de su centro de masa y (c) su energía total.

52. Una bola de boliche tiene una masa M, radio R, y un momento de inercia de $\frac{2}{5}MR^2$. Si inicia desde el reposo, ¿cuánto trabajo debe ser realizado sobre ella para ponerla a rodar sin deslizar a una rapidez lineal v? Exprese el trabajo en términos de M y v.

53. (a) Determine la aceleración del centro de masa de un disco sólido uniforme que rueda hacia abajo en un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Compare esta aceleración con la de un aro uniforme. (b) ¿Cuál es el coeficiente mínimo de

Materiał chroniony prawem autorskim

fricción necesario para mantener movimiento de rotación puro para el disco?

54. Un disco sólido uniforme y un aro uniforme se colocan juntos en la parte alta de un plano inclinado de altura h. Si se sueltan desde el reposo y ruedan sin deslizar, ¿cuál cuerpo llega primero al fondo? Verifique su respuesta al calcular su rapidez cuando llegan al fondo en términos de h.

55. Una lata metálica que contiene sopa condensada de hongos tiene una masa de 215 g, altura 10.8 cm, y un diámetro de 6.38 cm. Se coloca en reposo sobre su costado en lo alto de un plano inclinado de 3.00 m de largo que está a 25.0° con la horizontal, y luego se suelta para que ruede directamente hacia abajo. Si se supone la conservación de la energía mecánica, calcule el momento de inercia de la lata si tarda 1.50 s en llegar al fondo del plano inclinado. ¿Qué parte de los datos, si los hay, son innecesarios para calcular la solución?

56. Una pelota de tenis es una esfera hueca con paredes delgadas. Se pone a rodar sin deslizar a 4.03 m/s sobre una sección horizontal de una vía, como se muestra en la figura P10.56. Rueda alrededor del interior de un aro circular vertical de 90.0 cm de diámetro y finalmente sale de la vía en un punto a 20.0 cm abajo de la sección horizontal. (a) Encuentre la rapidez de la pelota en lo alto del aro. Demuestre que no caerá de la vía. (b) Suponga que la fricción estática entre la pelota y la vía fuera despreciable, de modo que la pelota resbala en lugar de rodar. Esta rapidez, ¿sería más alta, más baja o igual en lo alto del aro? Explique.

Figura P10.56

Jerry Wachter / Photo Researchers, Inc.

Figura P10.57 Demolición de un edificio en Baltimore, MD. A la izquierda está una chimenea, oculta principalmente por el edificio, que se ha roto en su caída. Compárela con la figura 10.19.

Problemas adicionales

57. Como se ve en la figura P10.57, las chimeneas que caen se rompen con frecuencia en su parte media porque el mortero entre ladrillos no puede soportar mucho esfuerzo cortante. Cuando la chimenea empieza a caer, las fuerzas de corte deben actuar sobre las secciones más altas, para acelerarlas tangencialmente, de modo que pueda seguir con la rotación de la parte más baja de la chimenea. Para mayor sencillez, modelemos la chimenea como una varilla uniforme de longitud ℓ que hace pivote en el extremo inferior. La varilla inicia desde el reposo en una posición vertical (con el pivote sin fricción en el fondo) y cae bajo la influencia de la gravedad. ¿Qué fracción de la longitud de la varilla tiene una aceleración tangencial mayor a $g \operatorname{sen} \theta$, donde θ es el ángulo que la chimenea forma con el eje vertical?

58. **Problema de repaso.** Una batidora consta de tres varillas delgadas, cada una de 10.0 cm de largo. Las varillas divergen de un bulbo central, separadas entre sí por 120°, y todas giran en el mismo plano. Una pelota está unida al extremo de cada varilla. Cada pelota tiene un área de sección transversal de 4.00 cm^2 y en forma tal que tiene un coeficiente de resistencia al avance de 0.600. Calcule la potencia de entrada necesaria para hacer girar la batidora a 1 000 rev/min (a) en aire y (b) en agua.

59. Un tramo de 4.00 m cordón ligero de nylon está enrollado alrededor de un carrete cilíndrico uniforme de radio 0.500 m y masa de 1.00 kg. El carrete está montado sobre un eje sin fricción y está inicialmente en reposo. El cordón es jalado del carrete con una aceleración constante de magnitud 2.50 m/s^2. (a) ¿Cuánto trabajo se ha realizado sobre el carrete cuando llega a una rapidez angular de 8.00 rad/s? (b) Si se supone que hay cordón suficiente en el carrete, ¿cuánto tarda el carrete en alcanzar esta rapidez angular? (c) ¿Hay suficiente cordón en el carrete?

60. Un casete de videocinta contiene dos carretes, cada uno de radio r_s, sobre el que se enrolla la cinta. Cuando la cinta se desenrolla del primer carrete, se enrolla en el segundo. La cinta se mueve a rapidez lineal constante v junto a las cabezas situadas entre los carretes. Cuando toda la cinta está en el primer carrete, la cinta tiene un radio exterior r_l. Represente por r el radio exterior de la cinta del primer carrete en cualquier instante cuando la cinta se reproduce. (a) Demuestre que en cualquier instante las magnitudes de rapidez de los dos carretes son

$$\omega_1 = v/r \qquad \text{y} \qquad \omega_2 = v/(r_s^2 + r_l^2 - r^2)^{1/2}$$

(b) Demuestre que estas expresiones pronostican los valores máximo y mínimo para la rapidez angular de los dos carretes.

Materiał chroniony prawem autorskim

61. Una varilla larga uniforme de longitud L y masa M, hace pivote alrededor de un perno horizontal sin fricción que pasa por un extremo. La varilla se suelta desde el reposo en una posición vertical, como se muestra en la figura P10.61. En el instante en que la varilla está horizontal, encuentre (a) su rapidez angular, (b) la magnitud de su aceleración angular, (c) los componentes x e y de la aceleración de su centro de masa, y (d) los componentes de la fuerza de reacción en el pivote.

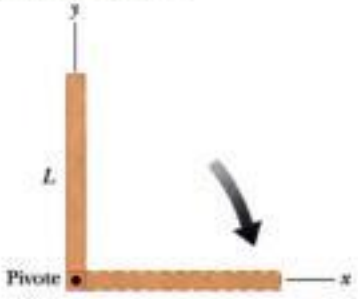


Figura P10.61

62. Un eje está girando a 65.0 rad/s en el tiempo $t = 0$. En adelante, su aceleración angular está dada por

$$\alpha = -10.0\ \text{rad/s}^2 - 5.00t\ \text{rad/s}^3,$$

donde t es el tiempo transcurrido. (a) Encuentre su rapidez angular en $t = 3.00$ s (b) ¿Qué distancia gira en estos 3 s?

63. Una bicicleta se coloca hacia abajo cuando su propietario repara una llanta sin presión. Una amiga hace girar la otra rueda, de 0.381 m de radio, y observa que gotas de agua vuelan tangencialmente. Ella mide la altura a la que llegan las gotas que se mueven verticalmente (figura P10.63). Una gota que se suelta de la llanta en una vuelta alcanza una altura $h = 54.0$ cm arriba del punto tangencial. Una gota que se suelta en la siguiente vuelta sube 51.0 cm sobre el punto tangente. La altura a la que suben las gotas disminuye porque la rapidez angular de la rueda disminuye. De esta información, determine la magnitud de la aceleración angular promedio de la rueda.

Figura P10.63 Problemas 63 y 64.

64. Una bicicleta se coloca hacia abajo mientras su propietario repara una llanta sin presión. Una amiga hace girar la otra rueda, de radio R, y observa que gotas de agua vuelan tangencialmente. Ella mide la altura que alcanzan las gotas que se mueven verticalmente (figura P10.63). Una gota que se suelta de la llanta en una vuelta sube una distancia h_1 arriba del punto tangente. Una gota que se suelta en la siguiente vuelta sube una distancia $h_2 < h_1$ arriba del punto tangente. La altura a la que suben las gotas disminuye porque la rapidez angular de la rueda disminuye. De esta información, determine la magnitud de la aceleración angular promedio de la rueda.

65. Un cordón está enrollado alrededor de una polea de masa m y radio r. El extremo libre del cordón está conectado a un bloque de masa M. El bloque inicia desde el reposo y luego baja por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. El coeficiente de fricción cinético entre el bloque y el plano inclinado es μ. (a) Utilice métodos de energía para demostrar que la rapidez del bloque como función de la posición d bajando por el plano es

$$v = \sqrt{\frac{4gdM(\text{sen}\ \theta - \mu \cos \theta)}{m + 2M}}$$

(b) Encuentre la magnitud de la aceleración del bloque en términos de μ, m, M, g y θ.

66. (a) ¿Cuál es la energía cinética rotacional de la Tierra alrededor de su eje de rotación? Modele la Tierra como una esfera uniforme y utilice datos de las cubiertas interiores de este libro. (b) La energía cinética rotacional de la Tierra está disminuyendo continuamente por la fricción de las mareas. Encuentre el cambio en un día, suponiendo que el periodo rotacional disminuye en 10.0 μs cada año.

67. Debido al momento de torsión gravitacional ejercido por la Luna sobre la Tierra, el periodo de rotación de nuestro planeta disminuye a un ritmo del orden de 1 ms/siglo. (a) Determine el orden de magnitud de la aceleración angular de la Tierra. (b) Encuentre el orden de magnitud del tamaño de la llave de tuercas que una persona común necesitaría para ejercer ese momento de torsión, como en la figura P10.67. Suponga que la persona puede apoyar sus pies contra un firmamento sólido.

Figura P10.67

Materiał chroniony prawem autorskim

68. La rapidez de una bala en movimiento se puede determinar al permitir que la bala pase por dos discos rotatorios de papel montados a una distancia d de separación en el mismo eje (figura P10.68). Del desplazamiento angular $\Delta\theta$ de los dos agujeros de bala en los discos y la rapidez rotacional de los discos, podemos determinar la rapidez v de la bala. Encuentre la rapidez de la bala para los datos siguientes: $d = 80$ cm, $\omega = 900$ rev/min y $\Delta\theta = 31.0°$.

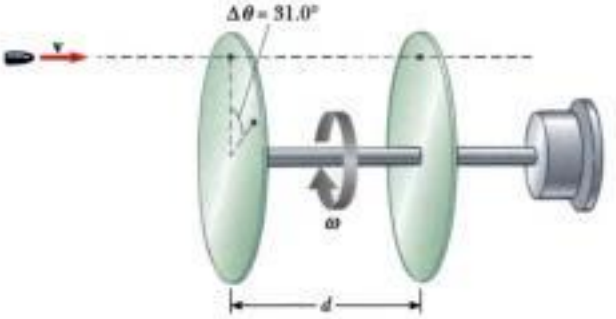


Figura P10.68

69. Un carrete cilíndrico uniforme, hueco, tiene radio interior $R/2$, radio exterior R y masa M (figura P10.69). Está montado de modo que gira sobre un eje horizontal fijo. Un contrapeso de masa m está conectado al extremo de una cuerda enrollada alrededor del carrete. El contrapeso cae desde el reposo en $t = 0$ a una posición y en el tiempo. Demuestre que el momento de torsión debido a las fuerzas de fricción entre el carrete y el eje es

$$\tau_f = R\left[m\left(g - \frac{2y}{t^2}\right) - M\frac{5y}{4t^2}\right]$$

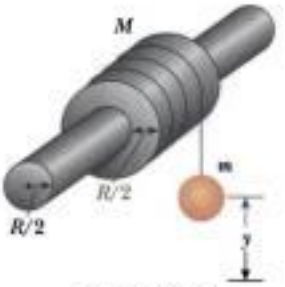


Figura P10.69

70. El carrete que se ilustra en la figura P10.70 tiene radio R y momento de inercia I. Un extremo del bloque de masa m se conecta a un resorte de constante de fuerza k, y el otro extremo se sujeta a un cordón enrollado alrededor del carrete. El eje del carrete y el plano inclinado son sin fricción. El carrete está enrollado en sentido contrario al de las manecillas de un reloj, de modo que el resorte se estira una distancia d desde su posición no estirada y luego se suelta desde el reposo. (a) Encuentre la rapidez angular del carrete cuando el resorte está otra vez sin estirar. (b) Evalúe numéricamente la rapidez angular en este punto si $I = 1.00$ kg · m², $R = 0.300$ m, $k = 50.0$ N/m, $m = 0.500$ kg, $d = 0.200$ m, y $\theta = 37.0°$.

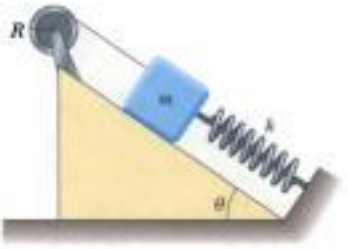


Figura P10.70

71. Dos bloques, como se muestra en la figura P10.71, están conectados por una cuerda de masa despreciable que pasa sobre una polea de radio 0.250 m y un momento de inercia I. El bloque sobre el plano inclinado sin fricción está subiendo con una aceleración constante de 2.00 m/s². (a) Determine T_1 y T_2, las tensiones de las dos partes de la cuerda. (b) Encuentre el momento de inercia de la polea.

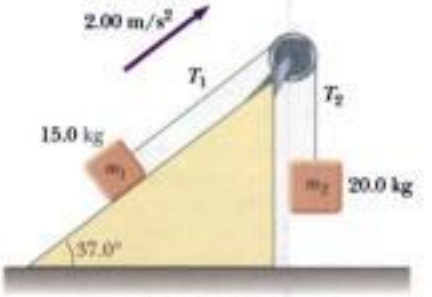


Figura P10.71

72. Una demostración común, ilustrada en la figura P10.72, consta de una pelota que apoya en un extremo de una tabla uniforme de longitud ℓ, con bisagra en el otro extremo, y elevada a un ángulo θ. Una taza liviana está unida a la tabla en r_c para que atrape la pelota cuando el palillo de sostén se quite de pronto. (a) Demuestre que la pelota se retardará detrás de la tabla que cae cuando θ sea menor a 35.3°. (b) Si la tabla mide 1.00 m de largo y está sostenida a este ángulo limitador, demuestre que la taza debe estar a 18.4 cm del extremo que se mueve.

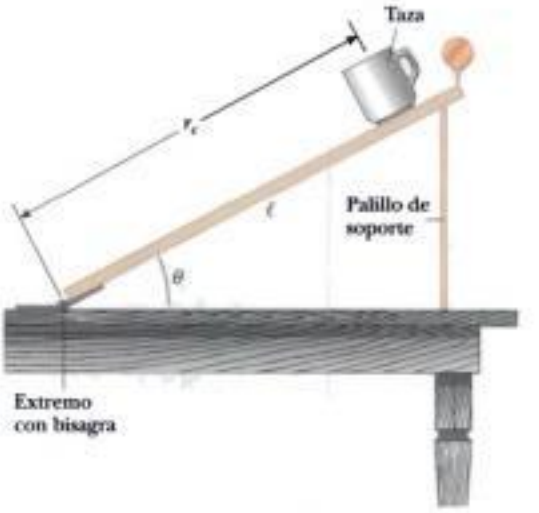


Figura P10.72

Materiał chroniony prawem autorskim

73. Como resultado de la fricción, la rapidez angular de una rueda cambia con el tiempo según la ecuación

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 e^{-\sigma t}$$

donde ω_0 y σ son constantes. La rapidez angular cambia de 3.50 rad/s en $t = 0$ a 2.00 rad/s en $t = 9.30$ s. Utilice esta información para determinar σ y ω_0. Entonces determine (a) la magnitud de la aceleración angular en $t = 3.00$ s. (b) el número de revoluciones que hace la rueda en los primeros 2.50 s, y (c) el número de revoluciones que hace antes de llegar al reposo.

74. La manecilla de las horas y la manecilla de los minutos del Big Ben, el reloj de la torre del Parlamento de Londres, miden 2.70 m y 4.50 m de largo y tienen masas de 60.0 kg y de 100 kg, respectivamente (véase la figura P10.40). (a) Determine el momento de torsión total debido al peso de estas manecillas alrededor del eje de rotación cuando la hora indica (i) 3:00 (ii) 5:15 (iii) 6:00 (iv) 8:20 (v) 9:45. (El estudiante puede modelar las manecillas como varillas largas, delgadas y uniformes.) (b) Determine todos los tiempos cuando el momento de torsión total alrededor del eje de rotación sea cero. Determine los tiempos al segundo más cercano, resolviendo numéricamente una ecuación trascendental.

75. (a) Sin las ruedas, el bastidor de una bicicleta tiene una masa de 8.44 kg. Cada una de las ruedas puede modelarse aproximadamente como un disco sólido uniforme con masa de 0.820 kg y un radio de 0.343 m. Encuentre la energía cinética de toda la bicicleta cuando se está moviendo hacia delante a 3.35 m/s. (b) Antes de la invención de una rueda que girara sobre un eje, los antiguos movían pesadas cargas poniendo rodillos bajo ellas. (Los modernos también usamos rodillos. Cualquier ferretería nos vende un cojinete de rodillos para una bandeja giratoria para servir la comida en la mesa.) Un bloque de piedra de 844 kg de masa se mueve hacia delante a 0.335 m/s, soportado por dos troncos de árbol cilíndricos uniformes, cada uno de masa 82.0 kg y radio 0.343 m. No hay resbalamiento entre el bloque y los rodillos ni entre los rodillos y el suelo. Encuentre la energía cinética total de los cuerpos en movimiento.

76. Una esfera sólida uniforme de radio r se coloca sobre la superficie interior de un tazón semiesférico con radio R mucho mayor. La esfera se suelta desde el reposo a un ángulo θ con la vertical y rueda sin resbalar (figura P10.76). Determine la rapidez angular de la esfera cuando llega al fondo del tazón.

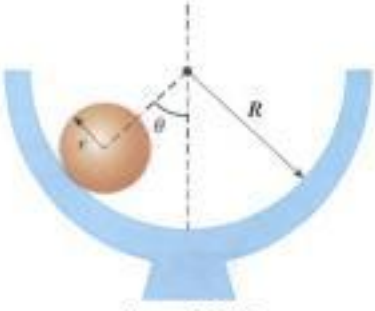


Figura P10.76

77. Una cuerda se enrolla alrededor de un disco uniforme de radio R y masa M. El disco se suelta desde el reposo con la cuerda vertical y su extremo superior atado a una barra fija (figura P10.77). Demuestre que (a) la tensión en la cuerda es un tercio del peso del disco, (b) la magnitud de la aceleración del centro de masa es $2g/3$ y (c) la rapidez del centro de masa es $(4gh/3)^{1/2}$ después que el disco ha descendido una distancia h. Verifique su respuesta a (c) usando el método de energía.

Figura P10.77

78. Una fuerza $\mathbf{F}$ horizontal constante se aplica a un rodillo de jardín en la forma de cilindro sólido uniforme de radio r y masa M (figura P10.78). Si el rodillo rueda sin deslizar sobre la superficie horizontal, demuestre que (a) la aceleración del centro de masa es $2\mathbf{F}/3M$ y (b) el coeficiente mínimo de fricción necesario para evitar el deslizamiento es $F/3Mg$. (*Sugerencia:* tome el momento de torsión con respecto al centro de masa.)

Figura P10.78

79. Una esfera sólida de masa m y radio r rueda sin resbalar a lo largo de la vía que se ilustra en la figura P10.79. Inicia desde el reposo con el punto más bajo de la esfera a una altura h sobre el fondo del rizo de radio R, mucho mayor que r. (a) ¿Cuál es el valor mínimo de h (en términos de R) tal que la esfera complete el rizo? (b) ¿Cuáles son los componentes de fuerza sobre la esfera en el punto P si $h = 3R$?

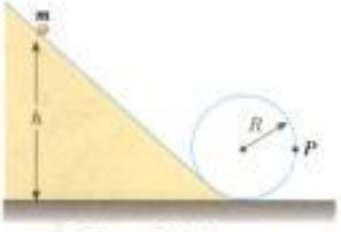


Figura P10.79

Materiał chroniony prawem autorskim

80. Una varilla delgada de masa 0.630 kg y longitud 1.24 m está en reposo, colgando verticalmente de una fuerte bisagra fija en su extremo superior. De pronto, se aplica a ella una fuerza impulsiva horizontal $(14.7\hat{\mathbf{i}})$. (a) Suponga que la fuerza actúa en el extremo inferior de la cuerda. Encuentre la aceleración de su centro de masa y la fuerza horizontal que ejerce la bisagra. (b) Suponga que la fuerza actúa en el punto medio de la varilla. Encuentre la aceleración de este punto y la reacción horizontal de la bisagra. (c) ¿Dónde puede aplicarse el impulso para que la bisagra no ejerza fuerza horizontal? Este punto se denomina *centro de percusión*.

81. Un jugador de boliche suelta una bola de boliche sin que ésta gire, la lanza deslizándola por la pista directamente hacia los bolos. La bola continúa deslizándose una distancia ¿de qué orden de magnitud antes que su movimiento se convierta en rodamiento sin deslizamiento? Exprese las cantidades que tome como datos, los valores que mida o estime para ellas, y su razonamiento.

82. Después de una cena familiar, uno de los tíos invitados cae en un profundo sueño, sentado derecho frente al televisor. Un travieso nieto balancea una pequeña uva esférica en lo alto de su calva cabeza, que en sí tiene forma de esfera. Después que todos los niños tuvieron tiempo de reír tontamente, la uva inicia desde el reposo y rueda sin deslizar. ¿Perderá contacto con la calva de su tío cuando la línea radial que la une con el centro de curvatura haga un ángulo con la vertical? ¿Qúe ángulo?

83. (a) Una varilla delgada de longitud h y masa M se mantiene verticalmente con su extremo inferior apoyando sobre una superficie horizontal sin fricción. La varilla se suelta entonces para que caiga libremente. Determine la rapidez de su centro de masa justo antes que chocar con la superficie horizontal. (b) **¿Qué pasaría si?** Ahora suponga que la varilla tiene un pivote fijo en su extremo inferior. Determine la rapidez del centro de masa de la varilla justo antes de golpear la superficie.

84. Un rollo cilíndrico grande de toallas de papel de radio inicial R se encuentra sobre una superficie larga horizontal, con el extremo exterior del papel clavado a la superficie. El rollo recibe un ligero empujón ($v_i \approx 0$) y comienza a desenrollarse. Suponga que el rollo tiene una densidad uniforme y que se conserva la energía mecánica en el proceso. (a) Determine la rapidez del centro de masa del rollo cuando su radio ha disminuido a r. (b) Calcule un valor numérico para esta rapidez en $r = 1.00$ mm, suponiendo $R = 6.00$ m. (c) **¿Qué pasaría si?** ¿Qué ocurre a la energía del sistema cuando el papel se desenrolle por completo?

85. Un rollo de alambre de masa M y radio R se desenrolla bajo una fuerza constante $\mathbf{F}$ (figura P10.85). Si se supone que el carrete es un cilindro sólido uniforme que no resbala, demuestre que (a) la aceleración del centro de masa es $4\mathbf{F}/3M$ y (b) la fuerza de fricción va a la *derecha* e igual en magnitud a $F/3$. (c) Si el cilindro inicia desde el reposo y rueda sin resbalar, ¿cuál es la rapidez de su centro de masa después que ha rodado una distancia d?

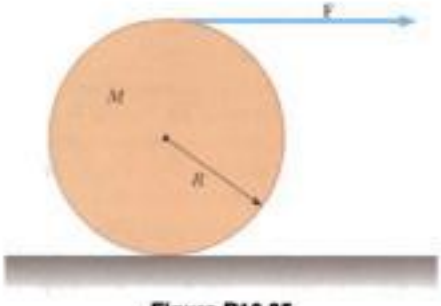


Figura P10.85

86. Una pieza de madera de masa $M = 6.00$ kg se mueve sobre la parte superior de dos rodillos cilíndricos sólidos idénticos que tienen $R = 5.00$ cm y $m = 2.00$ kg (figura P10.86). La pieza de madera es jalada por una fuerza horizontal constante $\mathbf{F}$ de magnitud 6.00 N aplicada al extremo de la pieza de madera y perpendicular a los ejes de los cilindros (que están paralelos). Los cilindros ruedan sin resbalar sobre una superficie plana. Tampoco hay resbalamiento entre los cilindros y la pieza de madera. (a) Encuentre la aceleración de la pieza de madera y de los rodillos. (b) ¿Qué fuerzas de fricción están actuando?

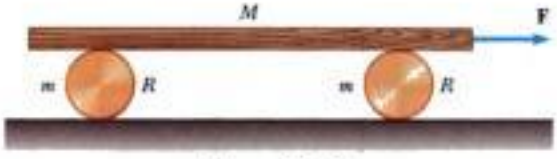


Figura P10.86

87. Un rollo de alambre apoya sobre una superficie horizontal como se ve en la figura P10.87. Al jalar el alambre, el rollo no resbala hasta el punto de contacto P. En intentos separados, cada una de las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ y $\mathbf{F}_4$ se aplica al rollo. Para cada una de estas fuerzas, determine la dirección en que rodará el rollo. Nótese que la línea de acción de $\mathbf{F}_2$ pasa por P.

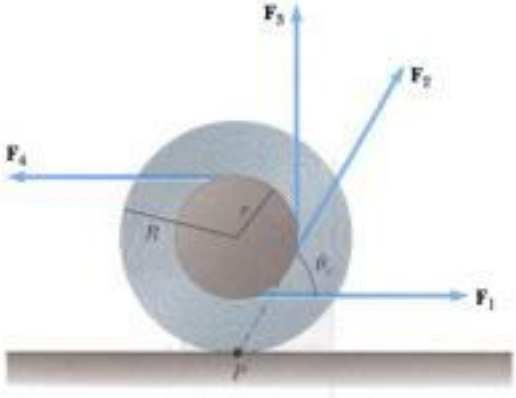


Figura P10.87 Problemas 87 y 88.

88. Consulte el problema 87 y la figura P10.87. El rollo de alambre tiene un radio interior r y un radio exterior R. El ángulo θ entre la fuerza aplicada y la horizontal se puede hacer variar. Demuestre que el ángulo crítico para el cual el rollo no rueda está dado por

$$\cos \theta_c = \frac{r}{R}$$

Si el alambre se mantiene a este ángulo y se aumenta la fuerza, el rollo permanecerá estacionario hasta que resbale a lo largo del piso.

Materiał chroniony prawem autorskim

89. En una demostración conocida como carro balístico, una pelota se proyecta verticalmente hacia arriba desde un carro que se mueve con velocidad constante a lo largo de la dirección horizontal. La pelota cae en el contenedor del carro porque ambos tienen el mismo componente horizontal de velocidad. **¿Qué pasaría si?** Ahora considere un carro balístico sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal, como se ve en la figura P10.89. El carro (incluyendo sus ruedas) tiene una masa M y el momento de inercia de cada una de las dos ruedas es $mR^2/2$. (a) Con el uso de la conservación de la energía (suponiendo que no haya fricción entre el carro y sus ejes) y suponiendo movimiento de rotación puro (sin deslizamiento), demuestre que la aceleración del carro a lo largo del plano inclinado es

$$a_x = \left(\frac{M}{M + 2m}\right) g \operatorname{sen} \theta$$

(b) Nótese que el componente x de aceleración de la pelota soltada por el carro es $g \operatorname{sen} \theta$. Entonces, el componente x de la aceleración del carro es *menor* que la de la pelota por el factor $M/(M + 2m)$. Utilice este dato y ecuaciones de cinemática para demostrar que la pelota rebasa al carro en una cantidad Δx, donde

$$\Delta x = \left(\frac{4m}{M + 2m}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta}\right)\frac{v_{yi}^2}{g}$$

y v_{yi} es la rapidez inicial de la pelota impartida a ella por el resorte del carro. (c) Demuestre que la distancia d que la pelota recorre medida a lo largo del plano inclinado es

$$d = \frac{2v_{yi}^2}{g}\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta}$$

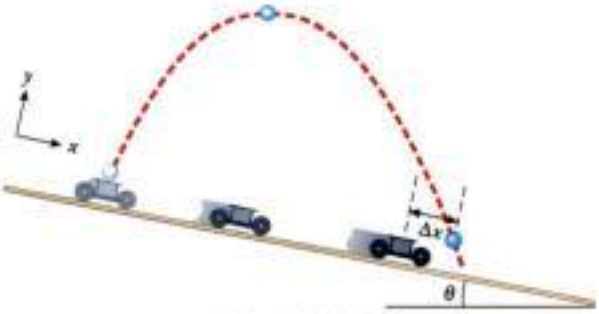


Figura P10.89

90. Un carrete de hilo consta de un cilindro de radio R_1 con tapas de extremo de radio R_2 como se ven en la figura P10.90. La masa del carrete, incluyendo el hilo, es m y su momento de inercia alrededor de un eje que pasa por su centro es I. El carrete se coloca en una superficie horizontal rugosa, de modo que rueda sin deslizar cuando al extremo libre del hilo se aplica una fuerza **T** que actúa a la derecha. Demuestre que la magnitud de la fuerza de fricción ejercida por la superficie sobre el carrete está dada por

$$f = \left(\frac{I + mR_1R_2}{I + mR_2^2}\right)T$$

Determine la dirección de la fuerza de fricción.

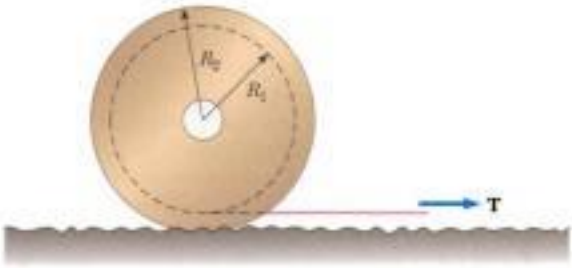


Figura P10.90

Respuestas a las *preguntas rápidas*

10.1 (c) Para una rotación de más de 180°, el desplazamiento angular debe ser mayor a $\pi = 3.14$ rad. Los desplazamientos angulares en las tres opciones son (a) 6 rad − 3 rad = 3 rad (b) 1 rad − (−1) rad = 2 rad (c) 5 rad − 1 rad = 4 rad.

10.2 (b) Debido a que los desplazamientos angulares ocurren en el mismo intervalo, el desplazamiento con el mínimo valor estará asociado con la rapidez angular promedio más baja.

10.3 (b) El hecho de que ω sea negativa indica que estamos tratando con un cuerpo que está rotando en el sentido de las manecillas del reloj. También sabemos que cuando $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son antiparalelas, ω debe estar decreciendo, el cuerpo está reduciendo su velocidad. Por lo tanto, el cuerpo está rotando cada vez con más lentitud (cada vez con menos rapidez angular) en la dirección de las manecillas del reloj, o negativa.

10.4 (b) En la ecuación 10.8, la de rapidez angular inicial y final son iguales en los tres casos. En consecuencia, la aceleración angular es inversamente proporcional al desplazamiento angular. Por lo tanto, la más alta aceleración angular está asociada con el más bajo desplazamiento angular.

10.5 (b) El sistema de la plataforma, Andy, y Charlie es un cuerpo rígido, de modo que todos los puntos sobre el cuerpo rígido tienen la misma rapidez angular.

10.6 (a) La rapidez tangencial es proporcional a la distancia radial desde el eje de rotación.

10.7 (a) Casi toda la masa del tubo está a la misma distancia del eje de rotación, por lo cual tiene un mayor momento de inercia que el cilindro sólido.

10.8 (b) El mango más gordo de la llave de tuercas da un mayor brazo de momento y aumenta el momento de torsión que se puede aplicar con una fuerza dada manualmente.

10.9 (a) Un mango más largo de la llave de tuercas da un mayor brazo de momento y aumenta el momento de torsión que se puede aplicar con una fuerza dada manualmente.

10.10 (b) Con el doble de momento de inercia y el mismo momento de torsión friccional, hay la mitad de aceleración angular. Con la mitad de la aceleración angular, se necesita el doble de tiempo para cambiar la rapidez a cero.

10.11 (d) Cuando la varilla se sujeta en su extremo, ofrece cuatro veces más momento de inercia que cuando está unida en el centro (vea la tabla 10.2). Como la energía cinética rotacional de la varilla depende del cuadrado de la rapidez angular, el mismo trabajo resultará en la mitad de la rapidez angular.

10.12 (b) Toda la energía potencial gravitacional del sistema formado por la caja y la Tierra se transforma en energía cinética de traslación. Para la pelota, parte de la energía potencial gravitacional del sistema formado por la pelota y la Tierra, se trans-

Materiał chroniony prawem autorskim

forma en energía cinética rotacional, dejando menos para energía cinética de traslación, por lo que la pelota se mueve hacia abajo más lentamente que la caja.

10.13 (c) En la ecuación 10.30, I_{CM} para una esfera es $\frac{2}{5}MR^2$. Así, MR^2 se cancela y la expresión restante en el lado derecho de la ecuación es independiente de masa y radio.

10.14 (a) El momento de inercia de la esfera hueca B es mayor que el de la esfera A. En consecuencia, la ecuación 10.30 nos dice que el centro de masa de la esfera B tendrá una menor rapidez y la esfera A debe llegar primero.

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 11

Cantidad de movimiento angular

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

11.1 El producto vectorial y par de torsión

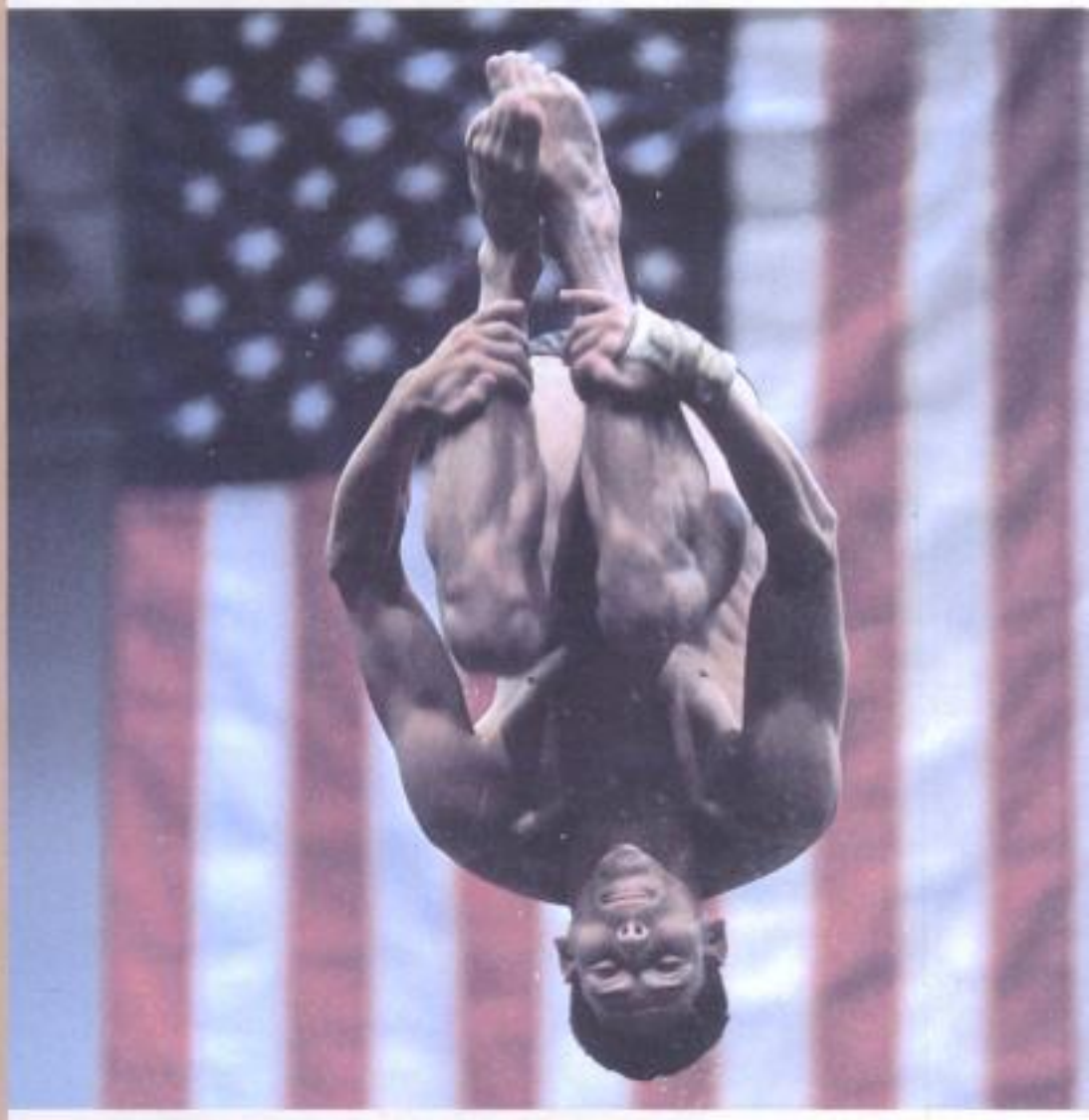
11.2 Cantidad de movimiento angular

11.3 Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido en rotación

11.4 Conservación de la cantidad de movimiento angular

11.5 El movimiento de giroscopios y trompos

11.6 Cantidad de movimiento angular como cantidad fundamental



▲ *Mark Ruiz experimenta rotación durante un clavado en las pruebas olímpicas en Estados Unidos en junio de 2000. Él gira a un ritmo más rápido cuando se hace ovillo y sujeta sus tobillos, debido al principio de conservación de la cantidad de movimiento angular, como se explica en este capítulo. (Otto Greule/Allsport/Getty)*

Materiał chroniony prawem autorskim

El tema central de este capítulo es la cantidad de movimiento angular, cantidad que desempeña un papel clave en la dinámica rotacional. En analogía al principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal, encontramos que la cantidad de movimiento angular de un sistema se conserva si no actúan pares de torsión externos sobre el sistema. Al igual que la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal, la ley de conservación de la cantidad de movimiento angular es una ley fundamental de física, igualmente válida para sistemas relativistas y cuánticos.

11.1 El producto vectorial y par de torsión

Una consideración importante para definir la cantidad de movimiento angular es el proceso de multiplicar dos vectores por medio de la operación llamada *producto vectorial*. Introduciremos el producto vectorial al considerar el par de torsión como lo introdujimos en el capítulo precedente.

Considere la fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido en la posición vectorial **r** (figura 11.1). Como vimos en la sección 10.6, la *magnitud* del par de torsión debida a esta fuerza con respecto al origen es rF sen ϕ, donde ϕ es el ángulo entre **r** y **F**. El eje alrededor del cual **F** tiende a producir rotación es perpendicular al plano formado por **r** y **F**.

El vector $\boldsymbol{\tau}$ de par de torsión está relacionado a los dos vectores **r** y **F**. Podemos establecer una relación matemática entre $\boldsymbol{\tau}$, **r** y **F** usando una operación matemática llamada **producto vectorial,** o **producto cruz:**

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{11.1}$$

A continuación demos una definición formal del producto vectorial. Dados cualquiera de los vectores **A** y **B,** el **producto vectorial** $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ se define como un tercer vector **C,** que tiene una magnitud de AB sen θ, donde θ es el ángulo entre **A** y **B.** Esto es, si **C** está dado por

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \tag{11.2}$$

entonces su magnitud es

$$C = AB \operatorname{sen} \theta \tag{11.3}$$

La cantidad AB sen θ es igual al área del paralelogramo formado por **A** y **B,** como se muestra en la figura 11.2. La *dirección* de **C** es perpendicular al plano formado por **A** y **B,** y la mejor forma de determinar esta dirección es usar la regla de la mano derecha que se ilustra en la figura 11.2. Los cuatro dedos de la mano derecha apuntan a lo largo de **A** y luego "curvados" hacia **B** a través el ángulo θ. La dirección del pulgar vertical es la dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$. Debido a la notación, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ a veces se lee "**A** cruz **B**"; de aquí el término *producto cruz.*

Algunas propiedades del producto vectorial que se obtienen de su definición son como sigue:

1. A diferencia del producto escalar, el producto vectorial *no es* conmutativo. En lugar de esto, es importante el orden en el que los dos vectores se multiplican en un producto cruz:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \tag{11.4}$$

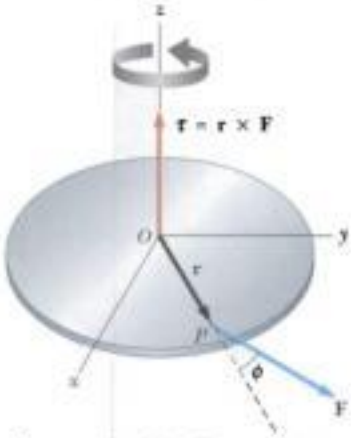


Figura activa 11.1 El vector de torsión $\boldsymbol{\tau}$ se encuentra en una dirección perpendicular al plano formado por el vector de posición **r** y el vector de fuerza aplicada **F.**

En el vínculo **Active Figuras** *en http://www.pse6.com, usted podrá mover el punto P y cambiar el vector de fuerza F para ver el efecto sobre el vector de par de torsión.*

¡ADVERTENCIA!

11.1 El producto cruz es un vector

Recuerde que el resultado de tomar un producto cruz entre dos vectores es un *tercer vector.* La ecuación 11.3 da sólo la magnitud de este vector.

Materiał chroniony prawem autorskim

Figura 11.2 El producto vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es un tercer vector $\mathbf{C}$ que tiene una magnitud de AB sen θ igual al área del paralelogramo que se ilustra. La dirección de $\mathbf{C}$ es perpendicular al plano formado por $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, y esta dirección se determina mediante la regla de la mano derecha.

Por lo tanto, si se cambia el orden de los vectores en un producto cruz, se debe cambiar el signo. Es fácil verificar esta relación con la regla de la mano derecha.

2. Si $\mathbf{A}$ es paralelo a $\mathbf{B}$ ($\theta = 0°$ o $180°$), entonces $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$; por lo tanto, se deduce que $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$.
3. Si $\mathbf{A}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$, entonces $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB$.
4. El producto vectorial obedece la ley distributiva:

Propiedades del producto vectorial

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \tag{11.5}$$

5. La derivada del producto cruz con respecto a alguna variable como t es

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \tag{11.6}$$

donde es importante preservar el orden multiplicativo de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, en vista de la ecuación 11.4.

Se deja como ejercicio (problema 10) demostrar de las ecuaciones 11.3 y 11.4, y de la definición de vectores unitarios, que los productos cruz de los vectores unitarios rectangulares $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ obedecen las siguientes reglas:

Productos cruz de vectores unitarios

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0 \tag{11.7a}$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}} \tag{11.7b}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \tag{11.7c}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \tag{11.7d}$$

Los signos son intercambiables en productos cruz. Por ejemplo, $\mathbf{A} \times (-\mathbf{B}) = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y $\hat{\mathbf{i}} \times (-\hat{\mathbf{j}}) = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$.

El producto cruz de cualesquiera dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se puede expresar en la siguiente forma de determinantes:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}}$$

Expandir estos determinantes da el resultado

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{i}} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{\mathbf{j}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{k}} \tag{11.8}$$

Dada la definición del producto cruz, podemos ahora asignar una dirección al vector de par de torsión. Si la fuerza se encuentra en el plano xy, como en la figura 11.1, el par de torsión $\boldsymbol{\tau}$ está representado por un vector paralelo al eje z. La fuerza en la figura 11.1 crea un par de torsión que tiende a hacer rotar el cuerpo en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj, alrededor del eje z; en consecuencia, la dirección de $\boldsymbol{\tau}$ es hacia la z creciente y $\boldsymbol{\tau}$ está por lo tanto en la dirección z positiva. Si invertimos la dirección de $\mathbf{F}$ en la figura 11.1, entonces $\boldsymbol{\tau}$ sería en la dirección z negativa.

Materiał chroniony prawem autorskim

Pregunta rápida 11.1 ¿Cuál de lo siguiente es equivalente al siguiente producto *escalar*? $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A})$? (a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ (b) $(\mathbf{A} \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{B})$ (c) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ (d) $-(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$.

Pregunta rápida 11.2 ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero acerca de la relación entre la magnitud del producto cruz de dos vectores y el producto de las magnitudes de los vectores? (a) $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ es mayor que AB; (b) $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ es menor que AB; (c) $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ podría ser mayor o menor que AB, dependiendo del ángulo entre los vectores; (d) $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ podría ser igual a AB.

Ejemplo 11.1 El producto vectorial

Dos vectores que se encuentran en el plano xy están dados por las ecuaciones $\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$. Encuentre $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y verifique que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

Solución Con el uso de las ecuaciones de la 11.7a a la 11.7d, obtenemos

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \times (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$$

$$= 2\hat{\mathbf{i}} \times 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{j}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) = 4\hat{\mathbf{k}} + 3\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{7\hat{k}}$$

(Hemos omitido los términos que contienen $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}}$ porque, como lo muestra la ecuación 11.7a, son iguales a cero.)

Podemos demostrar que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$, porque

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) \times (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})$$

$$= -\hat{\mathbf{i}} \times 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{j}} \times 2\hat{\mathbf{i}} = -3\hat{\mathbf{k}} - 4\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{-7\hat{k}}$$

Por lo tanto, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

Como método alternativo para hallar $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, podríamos usar la ecuación 11.8, con $A_x = 2$, $A_y = 3$, $A_z = 0$ y $B_x = -1$, $B_y = 2$, $B_z = 0$:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (0)\hat{\mathbf{i}} - (0)\hat{\mathbf{j}} + [(2)(2) - (3)(-1)]\hat{\mathbf{k}} = 7\hat{\mathbf{k}}$$

Ejemplo 11.2 El vector de par de torsión

Una fuerza de $\mathbf{F} = (2.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})$ se aplica a un cuerpo que hace pivote alrededor de un eje fijo alineado a lo largo del eje z de coordenadas. Si la fuerza se aplica en un punto situado en $\mathbf{r} = (4.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})$ m, encuentre el vector de par de torsión $\boldsymbol{\tau}$.

Solución El vector de par de torsión está definido por medio de un producto cruz en la ecuación 11.1:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = [(4.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})\ \text{m}] \times [(2.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})\ \text{N}]$$

$$= [(4.00)(2.00)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} + (4.00)(3.00)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} + (5.00)(2.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} + (5.00)(3.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}}]\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$= [12.0\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} + 10.0\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}]\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$= [12.0\hat{\mathbf{k}} - 10.0\hat{\mathbf{k}})\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$= \mathbf{2.0\hat{k}\ N\cdot m}$$

Nótese que tanto $\mathbf{r}$ como $\mathbf{F}$ están en el plano xy. Como se esperaba, el vector de par de torsión es perpendicular a este plano, teniendo sólo un componente z.

11.2 Cantidad de movimiento angular

Imagine un poste rígido que sobresale del hielo en un charco congelado (figura 11.3). Una patinadora se desliza rápidamente hacia el poste, apuntando un poco al lado para no golpearlo. Cuando se aproxima al poste, se estira y lo sujeta, acción que hace que ella se mueva en trayectoria circular alrededor del poste. Así como la idea de que la cantidad de movimiento lineal nos ayuda a analizar el movimiento de traslación, un análogo de la rotación, *la cantidad de movimiento angular*, nos ayuda a analizar el movimiento de esta patinadora y otros cuerpos que experimentan movimiento rotacional.

Materiał chroniony prawem autorskim

Figura activa 11.3 Cuando la patinadora pasa por el poste, se sujeta al mismo. Esto hacer que gire rápidamente alrededor del poste en movimiento circular.

En el vínculo **Active Figures** *en* **http://www.pse6.com**, *usted podrá cambiar la rapidez de la patinadora y su distancia al poste, y verla girar cuando ella se sujeta al poste.*

En el capítulo 9 empezamos por crear la forma matemática de la cantidad de movimiento lineal y luego continuamos para demostrar la forma en que esta nueva cantidad era valiosa para la resolución de problemas. Seguiremos un procedimiento similar para la cantidad de movimiento angular.

Considere una partícula de masa m situada en el vector de posición $\mathbf{r}$ y que se mueve con cantidad de movimiento lineal $\mathbf{p}$, como se ve en la figura 11.4. Al describir el movimiento lineal, encontramos que la fuerza neta sobre la partícula es igual a la rapidez de cambio de su cantidad de movimiento lineal, $\Sigma\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ (vea la ecuación 9.3). Tomemos el producto cruz de cada lado de la ecuación 9.3 con $\mathbf{r}$, que nos da el par de torsión neto sobre la partícula en el lado izquierdo de la ecuación:

$$\mathbf{r} \times \sum \mathbf{F} = \sum \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Ahora sumemos al lado derecho el término $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p}$, que es cero porque $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ y $\mathbf{v}$ y $\mathbf{p}$ son paralelas. Por lo tanto,

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p}$$

Reconocemos el lado derecho de esta ecuación como la derivada de $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ (vea la ecuación 11.6). Por lo tanto,

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} \tag{11.9}$$

Esto es muy semejante en forma a la ecuación 9.3, $\Sigma\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$. Esto sugiere que la combinación $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ debe desempeñar el mismo papel en movimiento rotacional que $\mathbf{p}$ desempeña en el movimiento de traslación. Esta combinación recibe el nombre de *cantidad de movimiento angular* de la partícula:

Cantidad de movimiento angular de una partícula

La **cantidad de movimiento angular L** instantánea de una partícula con respecto al origen O está definida por el producto cruz del vector de posición $\mathbf{r}$ instantáneo de la partícula, y su cantidad de movimiento $\mathbf{p}$ lineal instantánea:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{11.10}$$

Esto nos permite escribir la ecuación 11.9 como

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \tag{11.11}$$

que es el análogo rotacional de la segunda ley de Newton, $\Sigma\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$. Nótese que el par de torsión hace que la cantidad de movimiento angular $\mathbf{L}$ cambie igual que la fuerza hace que la cantidad de movimiento lineal $\mathbf{p}$ cambie. La ecuación 11.11 expresa que **el par de torsión que actúa sobre una partícula es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular de la partícula.**

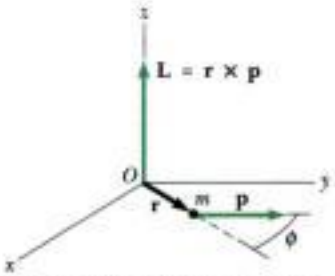


Figura activa 11.4 La cantidad de movimiento angular $\mathbf{L}$ de una partícula de masa m y cantidad de movimiento lineal $\mathbf{p}$ situada en el vector de posición $\mathbf{r}$ es un vector dado por $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. El valor de $\mathbf{L}$ depende del origen alrededor del cual se mide y es un vector perpendicular a $\mathbf{r}$ y a $\mathbf{p}$.

En el vínculo **Active Figuras** *en* **http://www.pse6.com**, *usted podrá cambiar el vector de posición r y el vector de cantidad de movimiento p, para ver el efecto sobre el vector de cantidad de movimiento angular.*

Nótese que la ecuación 11.11 es válida sólo si $\Sigma\boldsymbol{\tau}$ y $\mathbf{L}$ se miden alrededor del mismo origen. (Por supuesto, el mismo origen debe emplearse al calcular todos los pares de torsión.) Además, **la expresión es válida para cualquier origen fijo en un marco inercial.**

La unidad del SI de cantidad de movimiento angular es $kg \cdot m^2/s$. Nótese también que la magnitud y la dirección de $\mathbf{L}$ dependen de la elección del origen. A continuación de la regla de la mano derecha, vemos que la dirección de $\mathbf{L}$ es perpendicular al plano formado por $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$. En la figura 11.4, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$ están en el plano xy, y por lo tanto $\mathbf{L}$ apunta en la dirección z. Debido a que $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, la magnitud de $\mathbf{L}$ es

$$L = mvr \operatorname{sen} \phi \tag{11.12}$$

donde ϕ es el ángulo entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$. Se deduce que L es cero cuando $\mathbf{r}$ es paralela a $\mathbf{p}$ ($\phi = 0$ o $180°$). En otras palabras, cuando la velocidad lineal de la partícula está a lo largo de la línea que pasa por el origen, la partícula tiene cero cantidad de movimiento angular con respecto al origen. Por otra parte, si $\mathbf{r}$ es perpendicular a $\mathbf{p}$ ($\phi = 90°$), entonces $L = mvr$. En ese instante, la partícula se mueve exactamente como si estuviera en el borde de una rueda que gira alrededor del origen en un plano definido por $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$.

Materiał chroniony prawem autorskim

Pregunta rápida 11.3 Recuerde la patinadora descrita al principio de esta sección. Sea m la masa de ella. ¿Cuál sería su cantidad de movimiento angular con respecto al poste en el instante en que ella está a una distancia d del poste, si estuviera patinando directamente hacia el poste a una velocidad v? (a) cero (b) mvd (c) imposible de determinar.

Pregunta rápida 11.4 Considere de nuevo la patinadora de la Pregunta rápida 11.3. ¿Cuál sería su cantidad de movimiento angular con respecto al poste en el instante en que ella está a una distancia d del poste, si estuviera patinando a una velocidad v a lo largo de una recta que pasaría a no más de una distancia a del poste? (a) cero (b) mvd (c) mva (d) imposible de determinar

¡ADVERTENCIA!

11.2 ¿Es necesaria la rotación para la cantidad de movimiento angular?

Nótese que podemos definir la cantidad de movimiento angular incluso si la partícula no está moviéndose en una trayectoria circular. Hasta una partícula que se mueve en línea recta tiene cantidad de movimiento angular alrededor de cualquier eje desplazado de la trayectoria de la partícula.

Ejemplo 11.3 Cantidad de movimiento angular de una partícula en movimiento circular

Una partícula se mueve en el plano xy en una trayectoria circular de radio r, como se muestra en la figura 11.5. Encuentre la magnitud y dirección de su cantidad de movimiento angular con respecto a O, cuando su velocidad lineal es $\mathbf{v}$.

Figura 11.5 (Ejemplo 11.3) Una partícula que se mueve en un círculo de radio r tiene una cantidad de movimiento angular alrededor de O que tiene magnitud mvr. El vector $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ apunta *fuera* del diagrama.

Solución La cantidad de movimiento lineal de la partícula es siempre cambiante (en dirección, no magnitud). En consecuencia, el lector puede estar tentado a concluir que la cantidad de movimiento angular de la partícula está siempre cambiando. En esta situación, sin embargo, éste no es el caso; veamos por qué. De la ecuación 11.2, la magnitud de $\mathbf{L}$ está dada por

$$L = mvr \operatorname{sen} 90° = mvr$$

donde hemos empleado $\phi = 90°$ porque $\mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{r}$. Este valor de L es constante porque los tres factores de la derecha son constantes.

La dirección de $\mathbf{L}$ también es constante, aun cuando la dirección de $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ siga cambiando. Es posible visualizar esto al aplicar la regla de la mano derecha para hallar la dirección de $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ en la figura 11.5. El dedo pulgar apunta hacia arriba y alejándose de la página; ésta es la dirección de $\mathbf{L}$. En consecuencia, podemos escribir la expresión vectorial $\mathbf{L} = (mvr)\hat{\mathbf{k}}$. Si la partícula fuera a moverse en la dirección del giro de las manecillas de un reloj, $\mathbf{L}$ apuntaría hacia abajo y entrando en la página. **Una partícula en movimiento circular uniforme tiene una cantidad de movimiento angular constante alrededor de un eje que pasa por el centro de su trayectoria.**

Cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas

En la sección 9.6 demostramos que la segunda ley de Newton para una partícula podría extenderse a un sistema de partículas, resultando en:

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}_{\text{tot}}}{dt}$$

Esta ecuación indica que la fuerza externa neta sobre un sistema de partículas es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento lineal total del sistema. Veamos si hay un enunciado similar que se pueda hacer en movimiento rotacional. La cantidad de movimiento angular total de un sistema de partículas alrededor de algún punto, se define como la suma vectorial de las cantidades de movimiento angular de las partículas individuales:

$$\mathbf{L}_{\text{tot}} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \cdots + \mathbf{L}_n = \sum_i \mathbf{L}_i$$

donde la suma vectorial es sobre todas las n partículas del sistema.

Derivemos esta ecuación con respecto al tiempo:

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i$$

Materiał chroniony prawem autorskim

donde hemos utilizado la ecuación 11.11 para sustituir la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular de cada partícula con el par de torsión neto sobre la partícula.

Los pares de torsión que actúan sobre las partículas del sistema son los asociados con fuerzas internas entre partículas y los asociados con fuerzas externas. No obstante, el par de torsión neto asociado con todas las fuerzas internas es cero. Para entender esto, recordemos que la tercera Ley de Newton nos dice que las fuerzas internas entre partículas del sistema son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Si suponemos que estas fuerzas se encuentran a lo largo de la línea de separación de cada par de partículas, entonces el par de torsión total alrededor de algún eje que pasa por el origen O debido a cada par de fuerzas acción-reacción es cero. Esto es, el brazo de momento d desde O a la línea de acción de las fuerzas es igual para ambas partículas y las fuerzas están en direcciones opuestas. En la suma, por lo tanto, vemos que se desvanece el par de torsión interno neto. Concluimos que la cantidad de movimiento angular total de un sistema puede variar con el tiempo sólo si un par de torsión externo neto está actuando sobre el sistema, de modo que tenemos

El par de torsión externo neto sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular del sistema

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{ext} = \frac{d\mathbf{L}_{tot}}{dt} \tag{11.13}$$

Esto es

el par de torsión externo neto que actúa sobre un sistema, alrededor de algún eje que pase por un origen en un marco inercial, es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular total del sistema alrededor de ese origen.

Nótese que la ecuación 11.13 es de hecho el análogo rotacional de $\Sigma\mathbf{F}_{ext} = d\mathbf{p}_{tot}/dt$, para un sistema de partículas.

Aun cuando no lo demostramos aquí, el siguiente enunciado es un importante teorema que habla de la cantidad de movimiento angular de un sistema con respecto al centro de masa del sistema:

El par de torsión resultante que actúe sobre un sistema, alrededor de un eje que pase por el centro de masa, es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular del sistema, cualquiera que sea el movimiento del centro de masa.

Este teorema aplica incluso si el centro de masa está acelerando, siempre que $\boldsymbol{\tau}$ y $\mathbf{L}$ se evalúen con respecto al centro de masa.

Ejemplo 11.4 Dos cuerpos conectados

Una esfera de masa m_1 y un bloque de masa m_2 están conectados por una cuerda ligera que pasa sobre una polea, como se muestra en la figura 11.6. El radio de la polea es R, y la masa de la rueda es M. Los rayos de la polea tienen masa insignificante. El bloque se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción. Encuentre una expresión para la aceleración lineal de los dos objetos, usando los conceptos de cantidad de movimiento angular y par de torsión.

Solución Necesitamos determinar la cantidad de movimiento angular del sistema, que está formado por los dos objetos y la polea. Calculemos la cantidad de movimiento angular alrededor de un eje que coincide con el eje de la polea. La cantidad de movimiento angular del sistema incluye que los dos objetos se mueven en forma de traslación (la esfera y el bloque) y un objeto experimenta rotación pura (la polea).

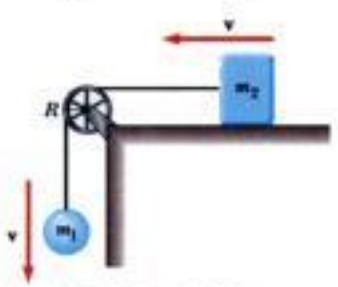


Figura 11.6 (Ejemplo 11.4) Cuando el sistema se suelta, la esfera se mueve hacia abajo y el bloque se mueve a la izquierda.

En cualquier instante, la esfera y el bloque tienen una rapidez común v, de modo que la cantidad de movimiento angular de la esfera es m_1vR, y la del bloque es m_2vR. En el mismo instante, todos los puntos de la rueda de la polea también se mueven con rapidez v, de modo que la cantidad de movimiento angular de la polea es MvR. En consecuencia, la cantidad total de movimiento angular del sistema es

$$(1) \qquad L = m_1vR + m_2vR + MvR = (m_1 + m_2 + M)vR$$

Ahora evaluemos el par de torsión total externo que actúa sobre el sistema alrededor del eje de la polea. Debido a que tiene un brazo de momento de cero, la fuerza ejercida por el eje sobre la polea no contribuye al par de torsión. Además, la fuerza normal que actúa sobre el bloque está balanceada por la fuerza gravitacional $m_2\mathbf{g}$, y por lo tanto estas fuerzas no contribuyen al par de torsión. La fuerza gravitacional $m_1\mathbf{g}$ que actúa sobre la esfera produce un par de torsión alrededor del eje igual en magnitud a m_1gR, donde R es el brazo de momento de la fuerza alrededor del eje. Éste es

Materiał chroniony prawem autorskim

el par de torsión total externo alrededor del eje de la polea; esto es, $\sum \tau_{ext} = m_1 gR$. Usando este resultado, junto con la ecuación (1) y la ecuación 11.13, encontramos

$$\sum \tau_{ext} = \frac{dL}{dt}$$

$$m_1 gR = \frac{d}{dt}[(m_1 + m_2 + M)vR]$$

$$(2) \qquad m_1 gR = (m_1 + m_2 + M)R\frac{dv}{dt}$$

Debido a que $dv/dt = a$, podemos despejar a de esto para obtener

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + M}$$

El estudiante puede preguntar por qué no incluimos las fuerzas que ejerce la cuerda sobre los cuerpos al evaluar el par de torsión neto alrededor del eje. La razón es que estas fuerzas son internas al sistema bajo consideración, y analizamos el sistema en su conjunto. Sólo pares de torsión *externos* contribuyen al cambio en la cantidad de movimiento angular del sistema.

11.3 Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido en rotación

En el ejemplo 11.4 consideramos la cantidad de movimiento angular de un sistema deformable. Restrinjamos ahora nuestra atención a un sistema no deformable, un cuerpo rígido. Considere un cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo que coincide con el eje z de un sistema de coordenadas, como se muestra en la figura 11.7. Determinemos la cantidad de movimiento angular de este cuerpo. Cada *partícula* del cuerpo rota en el plano xy alrededor del eje z con una velocidad angular ω. La magnitud de la cantidad de movimiento angular de una partícula de masa m_i alrededor del eje z es $m_i v_i r_i$. Debido a que $v_i = r_i\omega$, podemos expresar la magnitud de la cantidad de movimiento angular de esta partícula como

$$L_i = m_i r_i^2 \omega$$

El vector $\mathbf{L}_i$ está dirigido a lo largo del eje z, como está el vector $\boldsymbol{\omega}$.

Ahora podemos hallar la cantidad de movimiento angular (que en esta situación tiene sólo un componente z) de todo el cuerpo al tomar la suma de L_i sobre todas las partículas:

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega$$

$$L_z = I\omega \qquad (11.14)$$

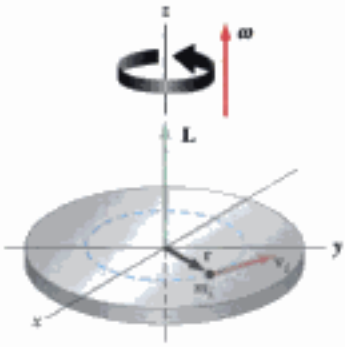


Figura 11.7 Cuando un cuerpo rígido rota alrededor de un eje, la cantidad de movimiento angular **L** está en la misma dirección que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, según la expresión $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$.

donde hemos reconocido $\sum_i m_i r_i^2$ como el momento de inercia I del objeto alrededor del eje z (ecuación 10.15).

Derivemos a continuación la ecuación 11.14 con respecto al tiempo, tomando nota que I es constante para un cuerpo rígido:

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \qquad (11.15)$$

donde α es la aceleración angular con respecto al eje de rotación. Como dL_z/dt es igual al par de torsión externo neto (véase la ecuación 11.13), podemos expresar la ecuación 11.15 como

$$\sum \tau_{ext} = I\alpha \qquad (11.16)$$

Forma rotacional de la segunda ley de Newton

Esto es, el par de torsión externo neto que actúa sobre un cuerpo rígido que rota alrededor de un eje fijo es igual al momento de inercia alrededor del eje de rotación, multiplicado por la aceleración angular del cuerpo con respecto a ese eje. Este resultado es el mismo que en la ecuación 10.21, que se derivó usando un método de fuerza, pero derivamos la ecuación 11.16 usando el concepto de cantidad de movimiento angular. Esta ecuación también es válida para un cuerpo rígido que rota alrededor de un eje en movimiento siempre que el eje en movimiento (1) pase por el centro de masa y (2) es un eje de simetría.

Si un cuerpo simétrico gira alrededor de un eje fijo que pase por su centro de masa, es posible escribir la ecuación 11.14 en forma vectorial como $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, donde **L** es la cantidad

Materiał chroniony prawem autorskim

de movimiento angular total del cuerpo medida con respecto al eje de rotación. Además, la expresión es válida para cualquier objeto, sin considerar su simetría, si **L** representa el componente de la cantidad de movimiento angular a lo largo del eje de rotación.[1]

Pregunta rápida 11.5 Una esfera sólida y una esfera hueca tienen la misma masa y radio. Están rotando con la misma rapidez angular. La esfera con la cantidad más alta de movimiento angular es (a) la esfera sólida (b) la esfera hueca (c) ambas tienen la misma cantidad de movimiento angular (d) imposible de determinar.

Ejemplo 11.5 Bola de boliche

Estime la magnitud de la cantidad de movimiento angular de una bola de boliche que gira a 10 rev/s, como se muestra en la figura 11.8.

Solución Comenzamos por hacer algunas estimaciones de los parámetros físicos prevalecientes y modelar la bola como una esfera uniforme sólida. Una bola típica de boliche podría tener una masa de 6.0 kg y radio de 12 cm. El momento de inercia de una esfera sólida alrededor de un eje que pasa por su centro es, de la tabla 10.2,

$$I = \tfrac{2}{5}MR^2 = \tfrac{2}{5}(6.0\ \text{kg})(0.12\ \text{m})^2 = 0.035\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Por lo tanto, la magnitud de la cantidad de movimiento angular es

$$L_z = I\omega = (0.035\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(10\ \text{rev/s})(2\pi\ \text{rad/rev}) = 2.2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

Debido a lo burdo de nuestras estimaciones, es quizás que conservemos sólo una cifra significativa, por lo que $L_z \approx$ **2 kg·m²/s.**

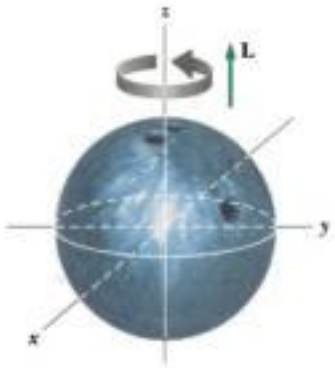


Figura 11.8 (Ejemplo 11.5) Una bola de boliche que rota alrededor del eje z en la dirección mostrada tiene una cantidad de movimiento angular **L** en la dirección positiva. Si la dirección de rotación se invierte, **L** apunta en la dirección z negativa.

Ejemplo 11.6 El subibaja

Un padre de masa m_f y su hija de masa m_d se sientan en extremos opuestos de un subibaja a distancias iguales del pivote del centro (figura 11.9). El subibaja de modela como una barra rígida de masa M y longitud ℓ y hace pivote sin fricción. En un momento dado, la combinación gira en un plano vertical con una rapidez angular ω.

(A) Encuentre una expresión para la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema.

Solución El momento de inercia del sistema es igual a la suma de los momentos de inercia de los tres componentes: El subibaja y las dos personas, a quienes modelamos como partículas. Al consultar la tabla 10.2 para obtener la expresión para el momento de inercia de la barra, y usar la expresión $I = mr^2$ para cada persona, encontramos que el momento total de inercia alrededor del eje z que pasa por O es

$$I = \tfrac{1}{12}M\ell^2 + m_f\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_d\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)$$

Por lo tanto, la magnitud de la cantidad de movimiento angular es

$$L = I\omega = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)\omega$$

(B) Encuentre una expresión para la magnitud de la aceleración angular del sistema cuando el subibaja forma un ángulo θ con la horizontal.

Solución Para hallar la aceleración angular del sistema a cualquier ángulo θ, primero calculamos el par de torsión neto sobre el sistema y luego usamos $\Sigma\tau_{\text{ext}} = I\alpha$ para obtener una expresión para α.

El par de torsión debido a la fuerza $m_f g$ alrededor del pivote es

$$\tau_f = m_f g\,\frac{\ell}{2}\cos\theta \qquad (\tau_f \text{ sale de la página})$$

El par de torsión debido a la fuerza $m_d g$ alrededor del pivote es

$$\tau_d = -m_d g\,\frac{\ell}{2}\cos\theta \qquad (\tau_d \text{ entra a la página})$$

[1] En general, la expresión $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ no siempre es válida. Si un cuerpo rígido gira alrededor de un eje *arbitrario*, **L** y $\boldsymbol{\omega}$ pueden apuntar en direcciones diferentes. En este caso, el momento de inercia no puede ser tratado como escalar. Estrictamente hablando, $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ aplica sólo a cuerpos rígidos de cualquier forma que giren alrededor de uno de los tres ejes mutuamente perpendiculares (llamados *ejes principales*) que pase por el centro de masa. Esto se estudia en textos más avanzados de mecánica.

Materiał chroniony prawem autorskim

En consecuencia, el par de torsión neto ejercido sobre el sistema alrededor de O es

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \tau_f + \tau_d = \tfrac{1}{2}(m_f - m_d)g\ell \cos\theta$$

Para hallar α, usamos $\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha$, donde I se obtuvo en la parte (A):

$$\alpha = \frac{\sum \tau_{\text{ext}}}{I} = \frac{2(m_f - m_d)g\cos\theta}{\ell\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)}$$

En general, los padres son más grandes que las hijas, de modo que la aceleración angular es positiva. Si el subibaja inicia en una orientación horizontal ($\theta = 0$) y se suelta, la rotación será en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj en la figura 11.9 y el extremo del padre del subibaja cae. Esto es consistente con la experiencia diaria.

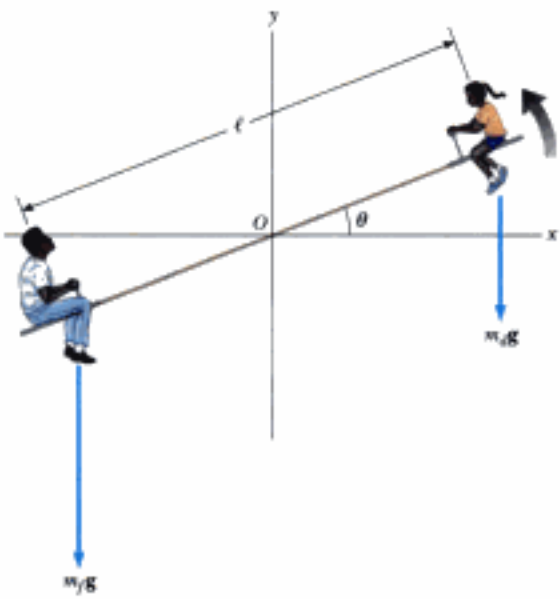


Figura 11.9 (Ejemplo 11.6) Un padre y su hija demuestran cantidad de movimiento angular en un subibaja.

¿Qué pasaría si? **Después de varias quejas de la hija de que ella simplemente sube siempre hacia arriba, en lugar de moverse hacia arriba y abajo como se planea, el padre se mueve hacia dentro en el subibaja para tratar de balancear los dos lados. Él se acerca a una posición que se encuentre a una distancia d del pivote. ¿Cuál es la aceleración angular del sistema en el caso cuando se suelte desde un ángulo arbitrario θ?**

Respuesta La aceleración angular del sistema debe reducirse si el sistema es más balanceado. A medida que el padre se desliza hacia dentro en el subibaja, debe llegar a un punto en el que el subibaja quede balanceado y no haya aceleración angular del sistema cuando se suelte.

El momento total de inercia alrededor del eje z que pase por O para el sistema modificado es

$$I = \tfrac{1}{12}M\ell^2 + m_f d^2 + m_d\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$
$$= \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_d\right) + m_f d^2$$

El par de torsión neto ejercido sobre el sistema alrededor de O es

$$\tau_{\text{net}} = \tau_f + \tau_d = m_f g d\cos\theta - \tfrac{1}{2}m_d g\ell\cos\theta$$

Ahora, la aceleración angular del sistema es

$$\alpha = \frac{\tau_{\text{net}}}{I} = \frac{m_f g d\cos\theta - \frac{1}{2}m_d g\ell\cos\theta}{\frac{\ell^2}{4}[(M/3) + m_d] + m_f d^2}$$

El subibaja quedará balanceado cuando la aceleración angular sea cero. En esta situación, tanto el padre como la hija pueden empujarse del suelo y subir al punto más alto posible. Encontramos la posición necesaria del padre al hacer $\alpha = 0$.

$$\alpha = \frac{m_f g d\cos\theta - \frac{1}{2}m_d g\ell\cos\theta}{(\ell^2/4)[(M/3) + m_d] + m_f d^2} = 0$$
$$m_f g d\cos\theta - \tfrac{1}{2}m_d g\ell\cos\theta = 0$$
$$d = \left(\frac{m_d}{m_f}\right)\tfrac{1}{2}\ell$$

En el raro caso que el padre y la hija tengan la misma masa, el padre se coloca en el extremo del subibaja, $d = \ell/2$.

11.4 Conservación de la cantidad de movimiento angular

En el capítulo 9 encontramos que la cantidad total de movimiento lineal de un sistema de partículas permanece constante si el sistema está aislado, es decir, si la fuerza externa resultante que actúe sobre el sistema sea cero. Tenemos una ley análoga de conservación en el movimiento rotacional:

La cantidad total de movimiento angular de un sistema es constante en magnitud y dirección si el par de torsión externo resultante sobre el sistema es cero, es decir, si el sistema está aislado.

Conservación de la cantidad de movimiento angular

Materiał chroniony prawem autorskim

Figura 11.10 El patinador de figuras Todd Eldridge está demostrando conservación de la cantidad de movimiento angular. Cuando pone sus brazos junto a su cuerpo, gira con más rapidez.

Esto se sigue directamente de la ecuación 11.13, que indica que

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{tot}}}{dt} = 0 \tag{11.17}$$

entonces

$$\mathbf{L}_{\text{tot}} = \text{constante} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{L}_i = \mathbf{L}_f \tag{11.18}$$

Para un sistema aislado formado por varias partículas, escribimos esta ley de conservación como $\mathbf{L}_{\text{tot}} = \Sigma \mathbf{L}_n$ = constante, donde el índice n denota la n-ésima partícula del sistema.

Si la masa de un sistema giratorio aislado experimenta redistribución en alguna forma, cambia el momento de inercia del sistema. Debido a que la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema es $L = I\omega$ (ecuación 11.14), la conservación de cantidad de movimiento angular requiere que el producto de I y de ω debe permanecer constante. Por lo tanto, un cambio en I para un sistema aislado requiere un cambio en ω. En este caso, podemos expresar el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular como

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{constante} \tag{11.19}$$

Esta expresión es válida tanto para rotación alrededor de un eje fijo como para rotación alrededor de un eje que pase por el centro de masa de un sistema en movimiento, mientras ese eje permanezca fijo en dirección. Sólo se requiere que el par de torsión externo neto sea cero.

Hay numerosos ejemplos que demuestran conservación de la cantidad de movimiento angular para un sistema deformable. Es posible que hayamos observado un patinador de figuras que gire en el final de un programa (figura 11.10). La rapidez angular del patinador aumenta cuando éste pone sus manos y pies cerca de su cuerpo, con lo cual se reduce I. Si se hace caso omiso de la fricción entre los patines y el hielo, no han pares de torsión externos que actúen sobre el patinador. Debido a que se conserva la cantidad de movimiento angular del patinador, el producto $I\omega$ permanece constante, y una reducción en el momento de inercia del patinador produce un aumento en la rapidez angular. Del mismo modo, cuando clavadistas o acróbatas desean hacer varios saltos mortales, ponen sus manos y pies cerca de sus cuerpos para girar a un ritmo más alto, como se ve en la fotografía con que se inicia este capítulo. En estos casos, la fuerza externa debida a la gravedad actúa a través del centro de masa y por lo tanto no ejerce par de torsión alrededor de este punto. En consecuencia, la cantidad de movimiento angular alrededor del centro de masa debe conservarse, es decir, $I_i\omega_i = I_f\omega_f$. Por ejemplo, cuando los clavadistas desean aumentar al doble su rapidez angular, deben reducir su momento de inercia para reducir a la mitad su valor inicial.

En la ecuación 11.18 tenemos una tercera ley de conservación para agregar a nuestra lista. Podemos ahora decir que la energía, cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular de un sistema aislado todos permanecen constantes:

$$\left.\begin{aligned} E_i &= E_f \\ \mathbf{p}_i &= \mathbf{p}_f \\ \mathbf{L}_i &= \mathbf{L}_f \end{aligned}\right\} \quad \text{Para un sistema aislado}$$

Pregunta rápida 11.6 Una clavadista de competencia sale del trampolín y cae hacia el agua con su cuerpo recto y girando lentamente. Ella pone sus brazos y piernas en una posición como de ovillo. Su rapidez angular (a) aumenta (b) disminuye (c) permanece igual (d) es imposible determinar.

Pregunta rápida 11.7 Considere de nuevo la clavadista de competencia de la Pregunta rápida 11.6. Cuando se hace ovillo, la energía cinética rotacional de su cuerpo (a) aumenta (b) disminuye (c) permanece igual (d) imposible de determinar.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 11.7 Formación de una estrella de neutrones

Una estrella gira con un periodo de 30 días alrededor de un eje que pasa por su centro. Después que la estrella experimenta una explosión de supernova, el núcleo estelar, que tenía un radio de 1.0×10^4 km, se colapsa en una estrella de neutrones de 3.0 km de radio. Determine el periodo de rotación de la estrella de neutrones.

Solución La misma física que hace que un patinador gire con más rapidez con sus brazos pegados al cuerpo también describe el movimiento de la estrella de neutrones. Supongamos que durante el colapso del núcleo estelar, (1) sobre ella no actúa ningún par de torsión externo, (2) permanece esférica con la misma distribución relativa de masa, y (3) su masa permanece constante. También, usemos el símbolo T para el periodo, siendo T_i el periodo inicial de la estrella y T_f el periodo de la estrella de neutrones. El periodo es el tiempo que un punto sobre el ecuador de la estrella tarda para hacer un círculo completo alrededor del eje de rotación. La rapidez angular de la estrella está dada por $\omega = 2\pi/T$. Por lo tanto, la ecuación 11.19 da

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$I_i\left(\frac{2\pi}{T_i}\right) = I_f\left(\frac{2\pi}{T_f}\right)$$

No conocemos la distribución de masa de la estrella, pero hemos supuesto que la distribución es simétrica, de modo que el momento de inercia se puede expresar como kMR^2, donde k es alguna constante numérica. (De la tabla 10.2, por ejemplo, vemos que $k = 2/5$ para una esfera sólida y $k = 2/3$ para un cascarón esférico.) Por lo tanto, podemos escribir otra vez la ecuación precedente como

$$kMR_i^2\left(\frac{2\pi}{T_i}\right) = kMR_f^2\left(\frac{2\pi}{T_f}\right)$$

$$T_f = \left(\frac{R_f^2}{R_i^2}\right)T_i$$

Si sustituimos valores numéricos, tendremos

$$T_f = (30\text{ días})\left(\frac{3.0\text{ km}}{1.0 \times 10^4\text{ km}}\right)^2 = 2.7 \times 10^{-6}\text{ días}$$

$$= \mathbf{0.23\ s}$$

En consecuencia, la estrella de neutrones gira unas cuatro veces por segundo.

Ejemplo 11.8 El tiovivo

Una plataforma horizontal en forma de disco circular gira libremente en un plano horizontal, alrededor de un eje vertical sin fricción (figura 11.11). La plataforma tiene una masa $M = 100$ kg y un radio $R = 2.0$ m. Un estudiante, cuya masa es $m = 60$ kg, camina lentamente del borde del disco hacia su centro. Si la rapidez angular del sistema es 2.0 rad/s cuando el estudiante está en el borde, ¿cuál es la rapidez angular cuando él llega a un punto $r = 0.50$ m del centro?

Solución El cambio de rapidez aquí es semejante al aumento en rapidez angular del patinador que gira cuando pone sus brazos junto al cuerpo. Denotemos el momento de inercia de la plataforma como I_p y el del estudiante como I_e. Si modelamos el estudiante como una partícula, podemos escribir el momento inicial de inercia I_i del sistema (estudiante más plataforma) alrededor del eje de rotación:

$$I_i = I_{pi} + I_{ei} = \tfrac{1}{2}MR^2 + mR^2$$

Cuando el estudiante camina a la posición $r < R$, el momento de inercia del sistema se reduce a

$$I_f = I_{pf} + I_{ef} = \tfrac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

Nótese que todavía usamos el radio mayor R cuando calculamos I_{pf} porque el radio de la plataforma no cambia. Como ninguno de los pares de torsión externos actúan sobre el sistema alrededor del eje de rotación, podemos aplicar la ley de conservación de la cantidad de movimiento angular:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$(\tfrac{1}{2}MR^2 + mR^2)\omega_i = (\tfrac{1}{2}MR^2 + mr^2)\omega_f$$

$$\omega_f = \left(\frac{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}\right)\omega_i$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}(100\text{ kg})(2.0\text{ m})^2 + (60\text{ kg})(2.0\text{ m})^2}{\frac{1}{2}(100\text{ kg})(2.0\text{ m})^2 + (60\text{ kg})(0.50\text{ m})^2}\right)(2.0\text{ rad/s})$$

$$= \left(\frac{440\text{ kg}\cdot\text{m}^2}{215\text{ kg}\cdot\text{m}^2}\right)(2.0\text{ rad/s}) = \mathbf{4.1\ rad/s}$$

Como esperábamos, aumenta la rapidez angular.

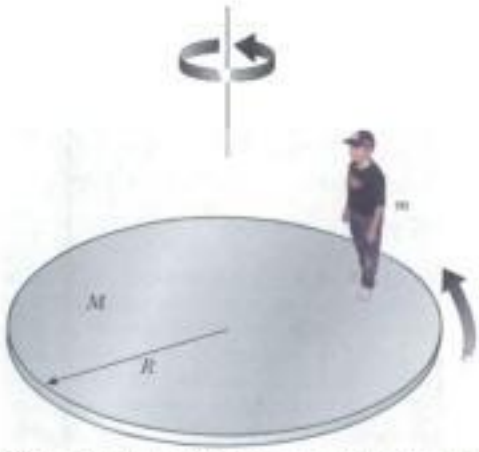


Figura 11.11 (Ejemplo 11.8) Mientras el estudiante camina hacia el centro de la plataforma rotatoria, la rapidez angular del sistema se incrementa porque la cantidad de movimiento angular del mismo permanece constante.

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si fuéramos a medir la energía cinética del sistema antes y después que el estudiante camine hacia dentro? ¿Son iguales?

Materiał chroniony prawem autorskim

Respuesta Podemos estar tentados a decir que sí porque el sistema está aislado, pero recuerde que la energía viene en diferentes formas y tenemos que manejar con cuidado una pregunta de energía. La energía cinética inicial es

$$K_i = \tfrac{1}{2}I_i\omega_i^2 = \tfrac{1}{2}(440\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(2.0\ \text{rad/s})^2 = 880\ \text{J}$$

La energía cinética final es

$$K_f = \tfrac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \tfrac{1}{2}(215\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(4.1\ \text{rad/s})^2 = 1.81 \times 10^3\ \text{J}$$

Por lo tanto, la energía cinética del sistema *aumenta*. El estudiante debe trabajar para moverse más cerca del centro de rotación, de modo que esta energía cinética extra proviene de la energía química potencial del cuerpo del estudiante.

Ejemplo 11.9 Rueda giratoria de una bicicleta

En una demostración favorita en clase, una estudiante sostiene el eje de una rueda giratoria de bicicleta cuando está sentada en un banco libre para rotar (figura 11.12). La estudiante y el banco están inicialmente en reposo, mientras que la rueda gira en un plano horizontal con una cantidad de movimiento angular inicial $\mathbf{L}_i$ que apunta hacia arriba. Cuando la rueda se invierte alrededor del centro en 180°, la estudiante y el banco empiezan a rotar. En términos de $\mathbf{L}_i$, ¿cuáles son la magnitud y dirección de $\mathbf{L}$ para la estudiante más el banco?

Figura 11.12 (Ejemplo 11.9) La rueda está inicialmente girando cuando la estudiante está en reposo. ¿Qué pasa cuando la rueda se invierte?

Solución El sistema está formado por la estudiante, la rueda y el banco. Inicialmente, la cantidad total de movimiento angular del sistema $\mathbf{L}_i$ proviene por completo de la rueda giratoria. Cuando se invierte la rueda, la estudiante aplica un par de torsión a la rueda, pero este par de torsión es interno del sistema. Ningún par de torsión externo actúa sobre el sistema alrededor del eje vertical. Por lo tanto, la cantidad de movimiento angular del sistema se conserva. Inicialmente, tenemos

$$\mathbf{L}_{\text{sistema}} = \mathbf{L}_i = \mathbf{L}_{\text{rueda}} \qquad \text{(hacia adelante)}$$

Después que se invierte la rueda, tenemos $\mathbf{L}_{\text{rueda invertida}} = -\mathbf{L}_i$. Para que se conserve la cantidad de movimiento angular, alguna otra parte del sistema tiene que empezar a rotar para que la cantidad final total de movimiento angular sea igual a la cantidad de movimiento angular $\mathbf{L}_i$. La otra parte del sistema es la estudiante más el banco en el que ella está sentada. Por lo tanto, ahora podemos decir que

$$\mathbf{L}_f = \mathbf{L}_i = \mathbf{L}_{\text{estudiante + banco}} - \mathbf{L}_i$$

$$\mathbf{L}_{\text{estudiante + banco}} = 2\mathbf{L}_i$$

Ejemplo 11.10 Disco y barra

Un disco de 2.0 kg que se desplaza a 3.0 m/s golpea una barra de 4.0 m de largo que está en hielo casi sin fricción, como se muestra en la figura 11.13. Suponga que la colisión es elástica y que el disco no se desvía de su línea original de movimiento. Encuentre la rapidez de traslación del disco, la rapidez de traslación de la barra, así como la rapidez angular del disco después de la colisión. El momento de inercia de la barra alrededor de su centro de masa es 1.33 kg · m².

Solución Conceptualicemos la situación al considerar la figura 11.13 e imaginar lo que pasa después que el disco golpea la barra. Debido a que el disco y la barra forman un sistema aislado, podemos suponer que la energía total, la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular se conservan todos. Por lo tanto, podemos clasificar éste como un problema en el que las tres leyes de conservación podrían desempeñar su parte. Para analizar el problema, primero tomamos nota de que tenemos tres incógnitas, por lo cual necesitamos tres ecuaciones para resolver simultáneamente. La primera proviene de la ley de conservación de lacantidad de movimiento lineal:

$$p_i = p_f$$

$$m_d v_{di} = m_d v_{df} + m_s v_s$$

$$(2.0\ \text{kg})(3.0\ \text{m/s}) = (2.0\ \text{kg})v_{df} + (1.0\ \text{kg})v_s$$

$$(1) \qquad 6.0\ \text{kg}\cdot\text{m/s} - (2.0\ \text{kg})v_{df} = (1.0\ \text{kg})v_s$$

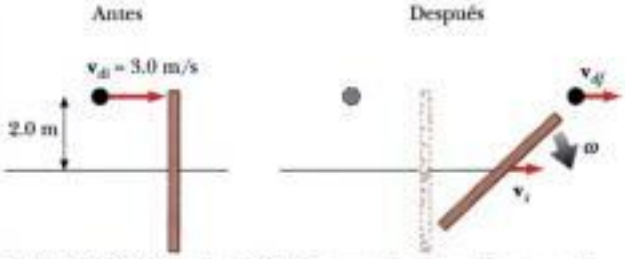


Figura 11.13 (Ejemplo 11.10) Vista superior de un disco que golpea a una barra en una colisión elástica, lo cual hace que la barra gire y se mueva a la derecha.

Ahora aplicamos la ley de conservación de la cantidad de movimiento angular, usando la posición inicial del centro de la barra como nuestro punto de referencia. Sabemos que el componente de cantidad de movimiento angular del disco a lo largo del eje perpendicular al plano del hielo es negativo. (La regla de la mano derecha muestra que $\mathbf{L}_d$ apunta entrando al hielo.) Al aplicar conservación de la cantidad de movimiento angular al sistema tendremos

$$L_i = L_f$$

$$-rm_d v_{di} = -rm_d v_{df} + I\omega$$

Materiał chroniony prawem autorskim

$$-(2.0\text{ m})(2.0\text{ kg})(3.0\text{ m/s}) = -(2.0\text{ m})(2.0\text{ kg})v_{df} + (1.33\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega$$

$$-12\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} = -(4.0\text{ kg}\cdot\text{m})v_{df} + (1.33\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega$$

$$(2)\quad -9.0\text{ rad/s} + (3.0\text{ rad/m})v_{df} = \omega$$

Usamos el hecho de que los radianes son sin dimensiones para asegurar unidades consistentes para cada término.

Por último, la naturaleza elástica de la colisión nos dice que se conserva la energía cinética; en este caso, la energía cinética consiste de la forma traslacional y rotacional:

$$K_i = K_f$$

$$\tfrac{1}{2}m_d v_{di}^2 = \tfrac{1}{2}m_d v_{df}^2 + \tfrac{1}{2}m_s v_s^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

$$\tfrac{1}{2}(2.0\text{ kg})(3.0\text{ m/s})^2 = \tfrac{1}{2}(2.0\text{ kg})v_{df}^2 + \tfrac{1}{2}(1.0\text{ kg})v_s^2 + \tfrac{1}{2}(1.33\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega^2$$

$$(3)\quad 18\text{ m}^2/\text{s}^2 = 2.0\,v_{df}^2 + v_s^2 + (1.33\text{ m}^2)\omega^2$$

Al resolver simultaneámente (1), (2) y (3) encontramos que $v_{df} =$ **2.3 m/s**, $v_s =$ **1.3 m/s** y $\omega =$ **−2.0 rad/s.**

Para finalizar el problema, nótese que estos valores parecen razonables. El disco se mueve con más lentitud después de la colisión de lo que se movía antes de la colisión, y la barra tiene una pequeña rapidez de traslación. La tabla 11.1 resume los valores inicial y final de variables para el disco y la barra, y verifica la conservación de la cantidad de movimiento lineal, la cantidad de movimiento angular y la energía cinética.

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si la colisión entre el disco y la barra es perfectamente inelástica? ¿Cómo cambia esto el análisis?

Respuesta En este caso, el disco se adhiere al extremo de la barra al hacer contacto en la colisión. El principio de la conservación de cantidad de movimiento lineal que lleva a la ecuación (1) sería alterado a

$$p_i = p_f$$

$$m_d v_{di} = (m_d + m_s)v_{CM}$$

$$(2.0\text{ kg})(3.0\text{ m/s}) = (2.0\text{ kg} + 1.0\text{ kg})v_{CM}$$

$$v_{CM} = 2.0\text{ m/s}$$

Para la parte rotacional de esta pregunta, necesitamos hallar el centro de masa del sistema del disco y la barra. Si escogemos el centro de la barra como el origen, la posición y del centro de masa a lo largo de la barra vertical es

$$y_{CM} = \frac{(2.0\text{ kg})(2.0\text{ m}) + (1.0\text{ kg})(0)}{(2.0\text{ kg} + 1.0\text{ kg})} = 1.33\text{ m}$$

Por lo tanto, el centro de masa del sistema es 2.0 m − 1.33 m = 0.67 m del extremo superior de la barra.

El principio de conservación de la cantidad de movimiento angular que lleva a la ecuación (2) se alteraría a lo siguiente, evaluando cantidades de movimiento angulares alrededor del centro de masa del sistema:

$$L_i = L_f$$

$$-r m_d v_{di} = I_d\omega + I_s\omega$$

$$(4)\quad -(0.67\text{ m})m_d v_{di} = [m_d(0.67\text{ m})^2]\omega + I_s\omega$$

El momento de inercia de la barra alrededor del centro de masa *del sistema* se encuentra del teorema de los ejes paralelos:

$$I_s = I_{CM} + MD^2$$
$$= 1.33\text{ kg}\cdot\text{m}^2 + (1.0\text{ kg})(1.33\text{ m})^2 = 3.1\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

En consecuencia, la ecuación (4) se convierte en

$$-(0.67\text{ m})(2.0\text{ kg})(3.0\text{ m/s}) = [(2.0\text{ kg})(0.67\text{ m})^2]\omega + (3.1\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega$$

$$-4.0\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} = (4.0\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega$$

$$\omega = \frac{-4.0\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}{4.0\text{ kg}\cdot\text{m}^2} = -1.0\text{ rad/s}$$

La evaluación de la energía cinética total del sistema después de la colisión muestra que es menor que la energía antes de la colisión, porque la energía cinética no se conserva en una colisión inelástica.

Tabla 11.1

Comparación de valores del ejemplo 11.10 antes y después de la colisión[a]

	v (m/s)	ω (rad/s)	p (kg·m/s)	L (kg·m²/s)	K_{trans} (J)	K_{rot} (J)
Antes						
Disco	3.0	—	6.0	−12	9.0	—
Barra	0	0	0	0	0	0
Total para el sistema	—	—	6.0	−12	9.0	0
Después						
Disco	2.3	—	4.7	−9.3	5.4	—
Barra	1.3	−2.0	1.3	−2.7	0.9	2.7
Total para el sistema	—	—	6.0	−12	6.3	2.7

[a] Nótese que se conservan la cantidad de movimiento lineal, la cantidad de movimiento angular y la energía cinética total.

Materiał chroniony prawem autorskim

11.5 El movimiento de giroscopios y trompos

Movimiento de precesión

Un tipo muy poco común y fascinante de movimiento que el estudiante alguna vez haya observado, es el de un trompo que gira alrededor de su eje de simetría como se ve en la figura 11.14a. Si el trompo gira con gran rapidez, el eje de simetría rota alrededor del eje z barriendo un cono (véase la figura 11.14b). El movimiento del eje de simetría alrededor de la vertical, conocido como **movimiento de precesión** (movimiento lento del eje de un cuerpo giratorio alrededor de otro eje, como se ve en el círculo lentamente trazado por el polo de un giroscopio en rotación), es relativamente lento en comparación con el movimiento de giro del trompo.

Es natural preguntarse por qué el trompo no cae. Debido a que el centro de masa no está directamente arriba del punto de pivote O, un par de torsión neto está actuando claramente sobre el trompo alrededor de O, par de torsión que resulta de la fuerza gravitacional $M\mathbf{g}$. El trompo de seguro que caería si no estuviera girando, pero debido a este giro, tiene una cantidad de movimiento angular $\mathbf{L}$ dirigida a lo largo de su eje de simetría. Demostraremos que este eje de simetría se mueve alrededor del eje z (ocurre movimiento de precesión) porque el par de torsión produce un cambio en la *dirección* del eje de simetría. Éste es un excelente ejemplo de la importancia de la naturaleza direccional de la cantidad de movimiento angular.

Las características esenciales del movimiento de precesión se pueden ilustrar si consideramos el sencillo giroscopio que se ilustra en la figura 11.15a. Las dos fuerzas que actúan sobre el trompo son la fuerza gravitacional hacia abajo $M\mathbf{g}$ y la fuerza normal $\mathbf{n}$ que actúa hacia arriba en el punto de pivote O. La fuerza normal no produce par de torsión alrededor del pivote, porque su brazo de momento que pasa por ese punto es cero. Sin embargo, la fuerza gravitacional produce un par de torsión $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times M\mathbf{g}$ alrededor de O, donde la dirección de $\boldsymbol{\tau}$ es perpendicular al plano formado por $\mathbf{r}$ y $M\mathbf{g}$, pero necesariamente el vector $\boldsymbol{\tau}$ se encuentra en un plano horizontal xy perpendicular al vector de cantidad de movimiento angular. El par de torsión neto y la cantidad de movimiento angular del giroscopio, están relacionados por medio de la ecuación 11.13:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

De esta expresión, vemos que el par de torsión diferente de cero produce un cambio en la cantidad de movimiento angular $d\mathbf{L}$, cambio que está en la misma dirección que $\boldsymbol{\tau}$. Por lo tanto, igual que el vector de par de torsión, $d\mathbf{L}$ debe también ser perpendicular a $\mathbf{L}$. La figura 11.15b ilustra el movimiento de precesión resultante del eje de simetría del giroscopio. En un intervalo dt, el cambio en la cantidad de movimiento angular es $d\mathbf{L} = \mathbf{L}_f - \mathbf{L}_i = \boldsymbol{\tau}\, dt$. Como $d\mathbf{L}$ es perpendicular a $\mathbf{L}$, la magnitud de $\mathbf{L}$ no cambia ($|\mathbf{L}_i| = |\mathbf{L}_f|$). Más bien, lo que está cambian-

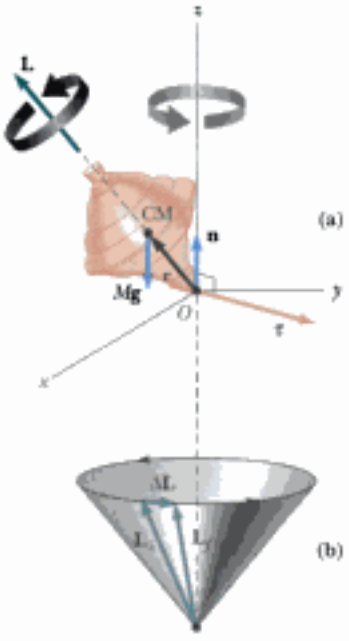


Figura 11.14 Movimiento de precesión de un trompo que gira alrededor de su eje de simetría. (a) Las únicas fuerzas externas que actúan sobre el trompo son la fuerza normal $\mathbf{n}$ y la fuerza gravitacional $M\mathbf{g}$. La dirección de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{L}$ es a lo largo del eje de simetría. La regla de la mano derecha indica que $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times M\mathbf{g}$ es en el plano xy. (b). La dirección de $\Delta\mathbf{L}$ es paralela a la de $\boldsymbol{\tau}$ en la parte (a). El hecho de que $\mathbf{L}_f = \Delta\mathbf{L} + \mathbf{L}_i$ indica que el trompo gira alrededor del eje z.

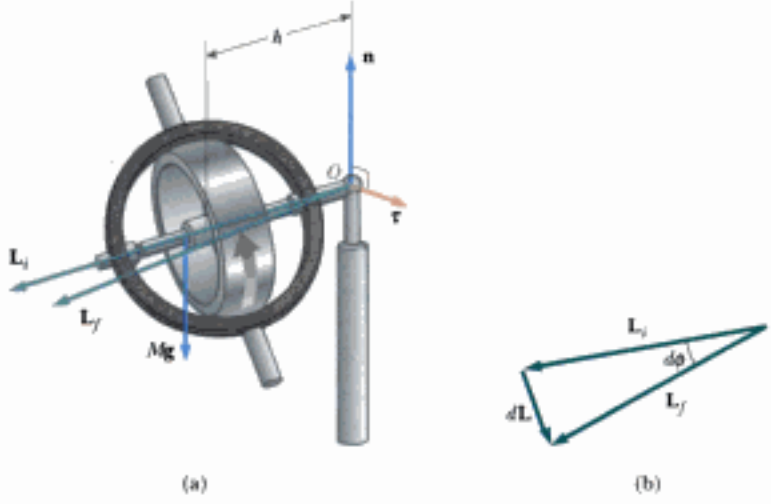


Figura 11.15 (a) Movimiento de un giroscopio sencillo que hace pivote una distancia h desde su centro de masa. La fuerza gravitacional $M\mathbf{g}$ produce un par de torsión alrededor del pivote, y este par de torsión es perpendicular al eje. (b) Vista superior de los vectores de cantidad de movimiento angular inicial y final. El par de torsión resulta en un cambio en la cantidad de movimiento angular $d\mathbf{L}$ en una dirección perpendicular al eje. El eje barre un ángulo $d\phi$ en un intervalo dt.

Materiał chroniony prawem autorskim

do es la *dirección* de **L**. Como el cambio en la cantidad de movimiento $d\mathbf{L}$ es en la dirección de $\boldsymbol{\tau}$, que se encuentra en el plano xy, el giroscopio experimenta movimiento de precesión.

Para simplificar la descripción del sistema, debemos hacer una suposición: la cantidad de movimiento angular de la rueda de precesión es la suma de la cantidad de movimiento angular $I\boldsymbol{\omega}$ debida al giro y la cantidad de movimiento angular debida al movimiento del centro de masa alrededor del pivote. En nuestro tratamiento, despreciaremos la contribución debida al movimiento de centro de masa, y tomamos que la cantidad total de movimiento angular sea sólo $I\boldsymbol{\omega}$. En la práctica, ésta es una buena aproximación si $\boldsymbol{\omega}$ se hace muy grande.

El diagrama vectorial de la figura 11.15b muestra que en el intervalo dt, el vector de cantidad de movimiento angular rota un ángulo $d\phi$, que es también el ángulo que rota el eje. Del triángulo vectorial formado por los vectores $\mathbf{L}_i$, $\mathbf{L}_f$ y $d\mathbf{L}$, vemos que

$$\operatorname{sen}(d\phi) \approx d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{\tau\, dt}{L} = \frac{(Mgh)\, dt}{L}$$

donde hemos empleado el hecho de que, para pequeños valores de cualquier ángulo θ, $\operatorname{sin} \theta \approx \theta$. Si dividimos entre dt y usamos la relación $L = I\omega$, encontramos que la rapidez con la que rota el eje alrededor del eje vertical es

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{Mgh}{I\omega} \tag{11.20}$$

La rapidez angular ω_p se denomina **frecuencia de precesión.** Este resultado es válido sólo cuando $\omega_p \ll \omega$. De otro modo, interviene un movimiento mucho más complicado. Como se puede ver de la ecuación 11.20, la condición $\omega_p \ll \omega$ se satisface cuando $I\omega$ es mayor en comparación con Mgh. Además, nótese que la frecuencia de precesión disminuye cuando ω aumenta, es decir, cuando la rueda gira con más rapidez alrededor de su eje de simetría.

Como ejemplo de la utilidad de giroscopios, supongamos que el lector se encuentra en una nave espacial a gran distancia de nuestro planeta y necesita alterar su trayectoria. Necesita que la nave dé media vuelta para encender los motores en la dirección correcta. Pero, ¿cómo se da media vuelta a una nave en el espacio vacío? Una forma es tener pequeños motores cohete que se encienden perpendicularmente fuera del costado de la nave, lo que daría un par de torsión alrededor de su centro de masa. Esto es deseable y muchas naves espaciales tienen estos cohetes.

Consideremos otro método que está relacionado con la cantidad de movimiento angular y no requiere consumir combustible de un cohete. Suponga que la nave espacial lleva un giroscopio que no está rotando, como en la figura 11.16a. En este caso, la cantidad de movimiento angular de la nave alrededor de su centro de masa es cero. Suponga que el giroscopio se pone en rotación, lo que da al giroscopio una cantidad de movimiento angular diferente de cero. No hay par de torsión externo sobre el sistema aislado (nave + giroscopio), de modo que la cantidad de movimiento angular del sistema permanece en cero según el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular. Este principio puede ser satisfecho si la nave rota en la dirección opuesta a la del giroscopio, de modo que los vectores de cantidad de movimiento angular del giroscopio y la nave se cancelan, resultando en que no hay cantidad de movimiento angular del sistema. El resultado de rotar el giroscopio, como en la figura 11.16b, es que la nave da vuelta. Al incluir tres giroscopios con ejes mutuamente perpendiculares, se obtiene cualquier rotación deseada en el espacio.

Este efecto creó una situación indeseable con la nave espacial *Voyager 2* durante su vuelo. La nave llevaba una grabadora de cinta cuyos carretes giraban a altas velocidades. Cada vez que la grabadora se ponía a funcionar, los carretes actuaban como giroscopios y la nave iniciaba una rotación indeseable en la dirección opuesta. Esto tuvo que ser contrarrestado por el centro de Control de la Misión, y para detener la rotación tuvo que usar los cohetes laterales.

Figura 11.16 (a) Una nave espacial lleva un giroscopio que no está rotando. (b) Cuando el giroscopio se pone en rotación, la nave gira de modo que se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema.

11.6 Cantidad de movimiento angular como cantidad fundamental

Hemos visto que el concepto de cantidad de movimiento angular es muy útil para describir el movimiento de sistemas macroscópicos. No obstante, el concepto también es válido a escala submicroscópica y se ha empleado mucho en el perfeccionamiento de modernas teorías de física atómica, molecular y nuclear. En estos desarrollos, se ha encontrado que la cantidad de movimiento angular de un sistema es una cantidad fundamental. La palabra

Materiał chroniony prawem autorskim

fundamental en este contexto implica que la cantidad de movimiento angular es una propiedad intrínseca de átomos, moléculas y sus constituyentes, propiedad que es parte de su naturaleza misma.

Para explicar los resultados de una variedad de experimentos en sistemas atómicos y moleculares, nos apoyamos en el hecho de que la cantidad de movimiento angular tiene valores discretos. Estos valores discretos son múltiplos de la unidad fundamental de cantidad de movimiento angular $\hbar = h/2\pi$, donde h recibe el nombre de constante de Planck:

$$\text{Unidad fundamental de cantidad de movimiento angular} = \hbar = 1.054 \times 10^{-34}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

Aceptemos este postulado sin prueba por ahora, y demostremos cómo se puede emplear para estimar la rapidez angular de una molécula diatómica. Considere la molécula de O_2 como rotor rígido, es decir, dos átomos separados por una distancia fija d y que rotan alrededor del centro de masa (figura 11.17). Al igualar la cantidad de movimiento angular con la unidad fundamental $\hbar$, podemos hallar el orden de magnitud de la rapidez angular más baja:

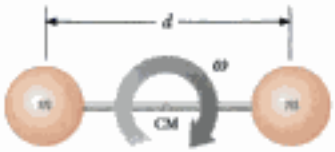


Figura 11.17 Modelo de rotor rígido de una molécula diatómica. La rotación ocurre alrededor del centro de masa en el plano de la página.

$$I_{CM}\omega \approx \hbar \qquad \text{o} \qquad \omega \approx \frac{\hbar}{I_{CM}}$$

En el ejemplo 10.3 encontramos que el momento de inercia de la molécula de O_2 alrededor de su eje de rotación es $1.95 \times 10^{-46}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Por lo tanto,

$$\omega \approx \frac{\hbar}{I_{CM}} = \frac{1.054 \times 10^{-34}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}{1.95 \times 10^{-46}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2} \sim 10^{12}\ \text{rad/s}$$

Se encuentra que las velocidades reales angulares son múltiplos de un número con este orden de magnitud.

Este sencillo ejemplo muestra que ciertos conceptos y modelos clásicos, cuando se modifican apropiadamente, son útiles para describir algunas características de sistemas atómicos y moleculares. Una amplia variedad de fenómenos a escala submicroscópica se pueden explicar sólo si suponemos valores discretos de la cantidad de movimiento angular asociada con un tipo particular de movimiento.

El físico danés Niels Bohr (1885-1962) aceptó y adoptó esta idea radical de valores discretos de la cantidad de movimiento angular para desarrollar su teoría del átomo de hidrógeno. Modelos estrictamente clásicos no tuvieron éxito para describir muchas de las propiedades del átomo de hidrógeno. Bohr postuló que el electrón podría ocupar sólo las órbitas circulares alrededor del protón para las que la cantidad de movimiento angular orbital fuera igual a $n\hbar$, donde n es un entero. Esto es, hizo la audaz afirmación de que la cantidad de movimiento angular orbital está cuantizada. Es posible usar este sencillo modelo para estimar las frecuencias rotacionales del electrón en las diversas órbitas (véase el problema 42).

RESUMEN

El **par de torsión** $\boldsymbol{\tau}$ debido a la fuerza $\mathbf{F}$ alrededor de un origen en un marco inercial se define que es

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{11.1}$$

Dados dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, el **producto cruz** $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es un vector $\mathbf{C}$ que tiene una magnitud

$$C = AB \operatorname{sen} \theta \tag{11.3}$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$. La dirección del vector $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es perpendicular al plano formado por $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, y esta dirección está determinada por la regla de la mano derecha.

La **cantidad de movimiento angular** $\mathbf{L}$ de una partícula que tiene cantidad de movimiento lineal $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{11.10}$$

donde $\mathbf{r}$ es la posición vectorial de la partícula con respecto a un origen en un marco inercial.

Materiał chroniony prawem autorskim

El **par de torsión externo neto** que actúa sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio de su cantidad de movimiento angular:

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{tot}}}{dt} \tag{11.13}$$

El componente z de la **cantidad de movimiento angular** de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo z es

$$L_z = I\omega \tag{11.14}$$

donde I es el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje de rotación y ω es su rapidez angular.

El **par de torsión externo neto** que actúa sobre un cuerpo rígido es igual al producto de su momento de inercia alrededor del eje de rotación y su aceleración angular:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha \tag{11.16}$$

Si el par de torsión externo neto que actúa sobre un sistema es cero, entonces la cantidad total de movimiento angular del sistema es constante:

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_f \tag{11.18}$$

La aplicación de esta **ley de conservación de la cantidad de movimiento angular** a un sistema cuyo momento de inercia cambia, da

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{constante} \tag{11.19}$$

PREGUNTAS

1. ¿Es posible calcular el par de torsión que actúa sobre un cuerpo rígido sin especificar un eje de rotación? ¿Es el par de torsión independiente de la ubicación del eje de rotación?
2. ¿Está el producto triple definido por $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, es una cantidad escalar o una vectorial? Explique por qué la operación $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ no tiene significado.
3. El vector $\mathbf{A}$ está en la dirección y negativa, y el vector $\mathbf{B}$ está en la dirección x negativa. ¿Cuáles son las direcciones de (a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (b) $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$?
4. Si una sola fuerza actúa sobre un cuerpo y el par de torsión causado por la fuerza es diferente de cero alrededor de algún punto, ¿hay otro punto alrededor del cual el par de torsión sea cero?
5. Suponga que la velocidad vectorial de una partícula se especifica por completo. ¿Qué se puede concluir acerca de la dirección de su vector de cantidad de movimiento angular con respecto a la dirección de movimiento?
6. Si un sistema de partículas está en movimiento, ¿es posible que la cantidad total de movimiento angular sea cero alrededor de algún origen? Explique.
7. Si el par de torsión que actúa sobre una partícula alrededor de cierto origen es cero, ¿qué se puede decir sobre su cantidad de movimiento angular alrededor de ese origen?
8. Una pelota es lanzada en forma tal que no gira alrededor de su propio eje. ¿Significa esto que la cantidad de movimiento angular es cero alrededor de un origen arbitrario? Explique.
9. Para que un helicóptero sea estable cuando vuela, debe tener al menos dos hélices. ¿Por qué?
10. Una partícula se mueve en un círculo con rapidez constante. Localice un punto alrededor del cual la cantidad de movimiento angular de la partícula sea constante y otro punto alrededor del cual cambie en el tiempo.
11. ¿Por qué una pértiga larga ayuda a un equilibrista a estar balanceado?
12. A veces, cuando una clavadista de altura desea dar una vuelta a la mitad de un clavado, ella pone sus piernas contra su pecho. ¿Por qué esto la hace girar más rápido? ¿Qué debe hacer ella cuando desea salir de su giro?
13. En algunas carreras de motocicletas, los conductores las llevan sobre pequeños montículos, y las motocicletas están en el aire durante un corto tiempo. Si un corredor acelera al máximo cuando pierde contacto con el montículo y la motocicleta pasa al aire, ésta tiende a subir su rueda delantera. ¿Por qué ocurre esto?
14. Las estrellas se originan como grandes cuerpos de gas que gira lentamente. Debido a la acción gravitacional, estos cúmulos de gas lentamente reducen su tamaño. ¿Qué pasa a la rapidez angular de una estrella cuando se contrae? Explique.
15. Si ocurre calentamiento global en el próximo siglo, es probable que parte del hielo polar se derrita y el agua se distribuya más cerca del ecuador. ¿Cómo cambiaría esto el momento de inercia de la Tierra? ¿Aumentaría o disminuiría la duración del día (una revolución)?
16. Un ratón está inicialmente en reposo sobre un plato giratorio horizontal montado sobre un eje vertical sin fricción. Si el ratón em-

Materiał chroniony prawem autorskim

Gerard Lacz/NHPA

Figura Q11.17

pieza a caminar en el sentido de las manecillas de un reloj alrededor del perímetro, ¿qué le pasa al plato giratorio? Explique.

17. Suele ocurrir que un gato caiga sobre sus cuatro patas, cualquiera que sea la posición desde la cual se deje caer. La película en cámara lenta de un gato que cae muestra que la mitad superior de su cuerpo se tuerce en una dirección mientras que la inferior se tuerce en dirección contraria (véase la figura Q11.17.) ¿Por qué sucede este tipo de rotación?

18. Cuando el cordón que sujeta una bola de hilo se enrolla alrededor de un poste delgado, ¿qué ocurre a la rapidez angular de la bola? Explique.

19. Si una persona lanza al aire un libro de texto, haciéndolo girar cada vez alrededor de uno de los tres ejes perpendiculares al libro, encontrará que no gira suavemente alrededor de uno de estos ejes. (Coloque una fuerte liga elástica alrededor del libro antes de lanzarlo al aire para que se mantenga cerrado.) Su rotación es estable alrededor de los ejes que tengan el momento de inercia más grande y más pequeño, pero inestable alrededor del eje de momento intermedio. Pruebe hacer esto para hallar el eje que tiene este momento intermedio.

20. Un científico que llega a un hotel pide a un botones que lleve una pesada maleta. Cuando el botones da vuelta en una esquina, la maleta de pronto se aleja de él por alguna razón desconocida. El botones, asustado, deja caer la maleta y corre. ¿Qué podría estar en la maleta?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, difícil = solución guiada con sugerencias disponibles en http://www.pse6.com

= use computadora para resolver el problema = problemas numéricos y simbólicos por pares

Sección 11.1 Producto vectorial y par de torsión

1. Dados $\mathbf{M} = 6\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{N} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$, calcule el producto vectorial $\mathbf{M} \times \mathbf{N}$.

2. Los vectores 42.0 cm a 15.0° y 23.0 cm a 65.0° inician desde el origen. Ambos ángulos se miden en sentido contrario al de las manecillas de un reloj desde el eje x. Los vectores forman dos lados de un paralelogramo. (a) Encuentre el área del paralelogramo. (b) Encuentre la longitud de su diagonal más larga.

3. Dos vectores están dados por $\mathbf{A} = -3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{B} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$. Encuentre (a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y (b) el ángulo entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

4. Dos vectores están dados por $\mathbf{A} = -3\hat{\mathbf{i}} + 7\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{B} = 6\hat{\mathbf{i}} - 10\hat{\mathbf{j}} + 9\hat{\mathbf{k}}$. Evalúe las cantidades (a) $\cos^{-1}[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}/AB]$ y (b) $\operatorname{sen}^{-1}[|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|/AB]$. (c) ¿Cuál(es) da(n) el ángulo entre los vectores?

5. El viento ejerce en una flor la fuerza de 0.785 N horizontalmente al oriente. El tallo de la flor mide 0.450 m de largo y se inclina hacia el este, formando un ángulo de 14.0° con la vertical. Encuentre el par de torsión vectorial de la fuerza del viento alrededor de la base del tallo.

6. Una estudiante dice que ella ha encontrado un vector $\mathbf{A}$ tal que $(2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}) \times \mathbf{A} = (4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})$. ¿Cree usted esta afirmación? Explique.

7. Si $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, ¿cuál es el ángulo entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$?

8. Una partícula está situada en el vector de posición $\mathbf{r} = (\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})$ m, y la fuerza que actúa sobre ella es $\mathbf{F} = (3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$ N. ¿Cuál es el par de torsión alrededor de (a) el origen y (b) el punto que tiene coordenadas (0,6) m?

9. Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ actúan a lo largo de dos lados de un triángulo equilátero como se muestra en la figura P11.9. El punto O está en la intersección de las altitudes del triángulo. Encuentre una tercera fuerza $\mathbf{F}_3$ a aplicar en B y a lo largo de BC

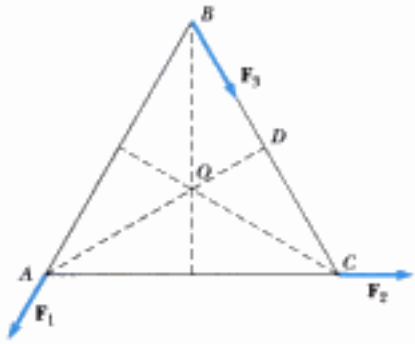


Figura P11.9

Materiał chroniony prawem autorskim

que haga cero el par de torsión total alrededor del punto O. **¿Qué pasa si?** ¿Cambiará el par de torsión total si $\mathbf{F}_5$ se aplica no en B sino en cualquier otro punto a lo largo de BC?

10. Utilice la definición del producto vectorial y las definiciones de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ para demostrar las ecuaciones 11.7. Se puede suponer que el eje x apunta a la derecha, el eje y apunta hacia arriba y el eje z apunta hacia usted (no alejándose). Se dice que esta opción forma el sistema *derecho* de coordenadas.

Sección 11.2 Cantidad de movimiento angular

11. Una barra rígida ligera de 1.00 m de largo une dos partículas, con masas de 4.00 kg y 3.00 kg en sus extremos. La combinación gira en el plano xy alrededor de un pivote que pasa por el centro de la barra (figura P11.11). Determine la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor del origen cuando la rapidez de cada una de las partículas es 5.00 m/s.

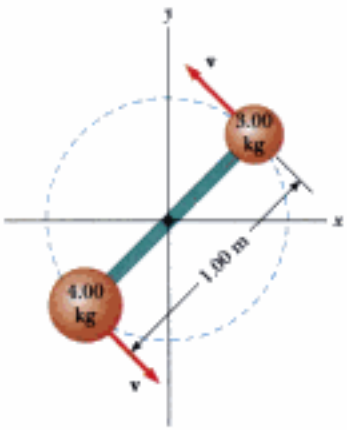


Figura P11.11

12. Una partícula de 1.50 kg se mueve en el plano xy con una velocidad de $\mathbf{v} = (4.20\hat{\mathbf{i}} - 3.60\hat{\mathbf{j}})$ m/s. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula cuando su vector de posición es $\mathbf{r} = (1.50\hat{\mathbf{i}} + 2.20\hat{\mathbf{j}})$ m.

13. El vector de posición de una partícula de masa 2.00 kg está dado como una función de tiempo por $\mathbf{r} = (6.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})$ m. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula alrededor del origen, como función del tiempo.

14. En la figura P11.14 se ilustra un péndulo cónico formado por una pesa de masa m en movimiento en trayectoria circular en un plano horizontal. Durante el movimiento, el alambre de soporte de longitud ℓ mantiene el ángulo constante θ con la vertical. Demuestre que la magnitud de la cantidad de movimiento angular de la pesa alrededor del centro del círculo es

$$L = \left(\frac{m^2 g\, \ell^3 \operatorname{sen}^4 \theta}{\cos \theta}\right)^{1/2}$$

Figura P11.14

15. Una partícula de masa m se mueve en un círculo de radio R a una rapidez constante v, como se muestra en la figura P11.15. Si el movimiento se inicia en el punto Q en el tiempo $t = 0$, determine la cantidad de movimiento angular de la partícula alrededor del punto P como función del tiempo.

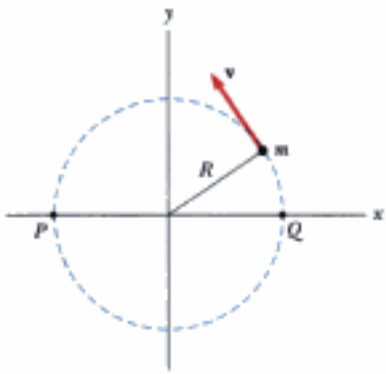


Figura P11.15

16. Un contrapeso de 4.00 kg está unido a una cuerda ligera, que está enrollada alrededor de un carrete (consulte la figura 10.20). El carrete es un cilindro sólido uniforme de 8.00 cm de radio y 2.00 kg de masa. (a) ¿Cuál es el par de torsión neto sobre el sistema alrededor del punto O? (b) Cuando el contrapeso tiene una rapidez v, la polea tiene una rapidez angular $\omega = v/R$. Determine la cantidad total de movimiento angular del sistema alrededor de O. (c) Usando el hecho de que $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ y el resultado de (b), calcule la aceleración del contrapeso.

17. Una partícula de masa m es disparada con una velocidad inicial $\mathbf{v}_i$ que forma un ángulo θ con la horizontal, como se muestra en la figura P11.17. La partícula se mueve en el campo gravitacional de la Tierra. Encuentre la cantidad de movimiento angular de la partícula alrededor del origen cuando la partícula esté (a) en el origen, (b) en el punto más alto de su trayectoria, y (c) a punto de llegar al suelo. (d) ¿Qué par de torsión hace cambiar su cantidad de movimiento angular?

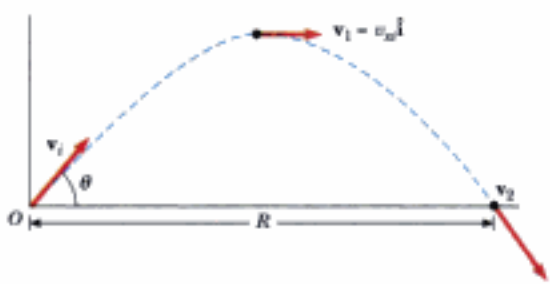


Figura P11.17

Materiał chroniony prawem autorskim

18. Con rumbo directo hacia la cima del Pico Pike, un avión de 12 000 kg de masa vuela sobre las llanuras de Kansas a una altitud casi constante de 4.30 km, con una velocidad constante de 175 m/s al oeste. (a) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular vectorial con respecto a un cosechero de trigo que está en el suelo directamente bajo el avión? (b) ¿Cambia este valor cuando el avión continúa su movimiento a lo largo de una recta? (c) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular con respecto a la cima del Pico Pike?

19. Una bola de masa m se sujeta al extremo de un asta de bandera que está conectada al costado de un edificio alto en el punto P, como se muestra en la figura P11.19. La longitud del asta de bandera es ℓ y forma un ángulo θ con la horizontal. Si la bola se suelta y empieza a caer, determine la cantidad de movimiento angular (como función del tiempo) de la bola alrededor del punto P. Desprecie la resistencia del aire.

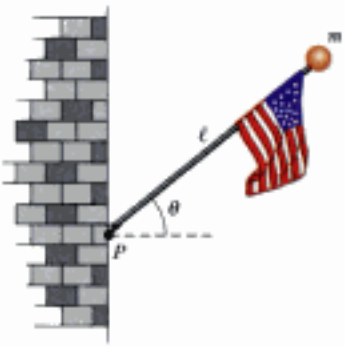


Figura P11.19

20. Un bombero se sujeta a una escalera vertical y dirige la boquilla de una manguera horizontalmente hacia un edificio en llamas. El gasto de agua es 6.31 kg/s, y la rapidez en la boquilla es de 12.5 m/s. La manguera pasa verticalmente entre los pies del bombero, que está 1.30 m abajo de la boquilla. Escoja que el origen esté dentro de la manguera entre los pies del bombero. ¿Qué par de torsión debe ejercer el bombero en la manguera? Esto es, ¿cuál es la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular del agua?

Sección 11.3 Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido en rotación

21. Demuestre que la energía cinética de un cuerpo en rotación alrededor de un eje fijo con cantidad de movimiento angular $L = I\omega$ se puede escribir como $K = L^2/2I$.

22. Una esfera sólida uniforme de 0.500 m de radio y 15.0 kg de masa gira en sentido contrario al de las manecillas de un reloj, alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Encuentre su cantidad de movimiento angular vectorial cuando su rapidez angular sea de 3.00 rad/s.

23. Un disco sólido uniforme de 3.00 kg de masa y 0.200 m de radio gira alrededor de un eje fijo perpendicular a su cara. Si la frecuencia angular de rotación es 6.00 rad/s, calcule la cantidad de movimiento angular del disco cuando el eje de rotación (a) pasa por su centro de masa y (b) pasa por un punto a la mitad entre el centro y el borde.

24. Big Ben (figura P10.40), el reloj de la torre del edificio del Parlamento en Londres, tiene manecillas de horas y minutos con longitudes de 2.70 m y 4.50 m, y masas de 60.0 kg y 100 kg, respectivamente. Calcule la cantidad de movimiento angular total de estas manecillas alrededor del punto central. Trate las manecillas como barras uniformes largas y delgadas.

25. Una partícula de masa 0.400 kg está unida a la marca de 100 cm de una regla graduada de masa 0.100 kg. La regla graduada gira en una mesa horizontal sin fricción, con una rapidez angular de 4.00 rad/s. Calcule la cantidad de movimiento angular del sistema cuando la regla hace pivote alrededor de un eje (a) perpendicular a la mesa por una marca de 50.0 cm y (b) perpendicular a la mesa por la marca de 0 cm.

26. La distancia entre los centros de las ruedas de una motocicleta es de 155 cm. El centro de masa de la motocicleta, incluyendo su conductor, está a 88.0 cm sobre el suelo y a la mitad entre las ruedas. Suponga que la masa de cada rueda es pequeña en comparación con el cuerpo de la motocicleta. El motor acciona la rueda trasera únicamente. ¿Qué aceleración horizontal de la motocicleta hará que la rueda delantera se levante del suelo?

27. Una estación espacial está construida en forma de un anillo hueco de masa 5.00×10^4 kg. Los tripulantes caminan en una cubierta formada por la superficie interior de la pared exterior cilíndrica del anillo, con radio 100 m. En reposo cuando se construyó, el anillo se pone en rotación alrededor de su eje de manera que las personas en su interior experimentan una aceleración efectiva en caída libre igual a g. (La figura P11.27 muestra el anillo junto con algunas otras piezas que forman una contribución insignificante al momento total de inercia). La rotación se logra al disparar dos pequeños cohetes unidos tangencialmente a puntos opuestos en el exterior del anillo. (a) ¿Qué cantidad de movimiento angular adquiere la estación espacial? (b) ¿Cuánto tiempo deben estar encendidos los cohetes si cada uno ejerce un empuje de 125 N? (c) Demuestre que el par de torsión total en el anillo, multiplicado por el intervalo hallado en la parte (b), es igual al cambio en la cantidad de movimiento angular, hallado en la parte (a). Esta igualdad representa el teorema del *impulso angular-cantidad de movimiento angular*.

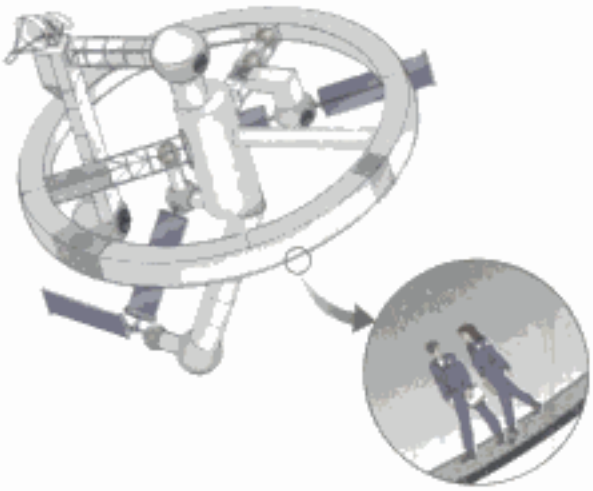


Figura P11.27 Problemas 27 y 36.

Materiał chroniony prawem autorskim

Sección 11.4 Conservación de la cantidad de movimiento angular

28. Un cilindro con momento de inercia I_1 gira alrededor de un eje vertical, sin fricción, con rapidez angular ω_i. Un segundo cilindro, que tiene momento de inercia I_2 y que inicialmente no gira, cae sobre el primer cilindro (figura P11.28). Debido a la fricción entre las superficies, los dos finalmente alcanzan la misma rapidez angular ω_f. (a) Calcule ω_f. (b) Demuestre que la energía cinética del sistema disminuye en esta interacción, y calcule la razón entre la energía rotacional final y la inicial.

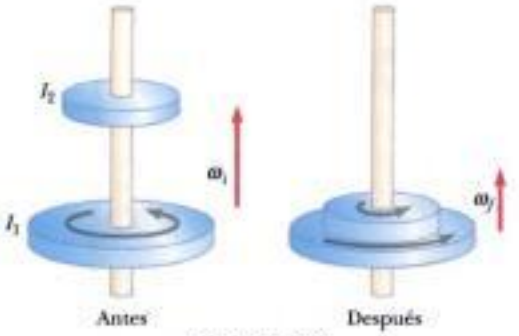


Figura P11.28

29. Un tiovivo de radio $R = 2.00$ m tiene un momento de inercia $I = 250$ kg · m² y está rotando a 10.0 rev/min alrededor de un eje vertical sin fricción. De frente hacia el eje, un niño de 25.0 kg salta sobre el tiovivo y se las arregla para sentarse en el borde. ¿Cuál es la nueva rapidez angular del tiovivo?

30. Un estudiante se sienta en un banco que gira libremente, sosteniendo dos pesas, cada una de 3.00 kg de masa (figura P11.30). Cuando sus brazos están extendidos horizontalmente, las pesas están a 1.00 m del eje de rotación y él gira con una rapidez angular de 0.750 rad/s. El momento de inercia del estudiante más el banco es 3.00 kg · m² y se supone que es constante. El estudiante mueve las pesas hacia dentro, horizontalmente, a una posición a 0.300 m del eje de rotación. (a) Encuentre la nueva rapidez angular del estudiante (b) Encuentre la energía cinética del sistema giratorio antes y después que él ponga las pesas más cerca de su cuerpo.

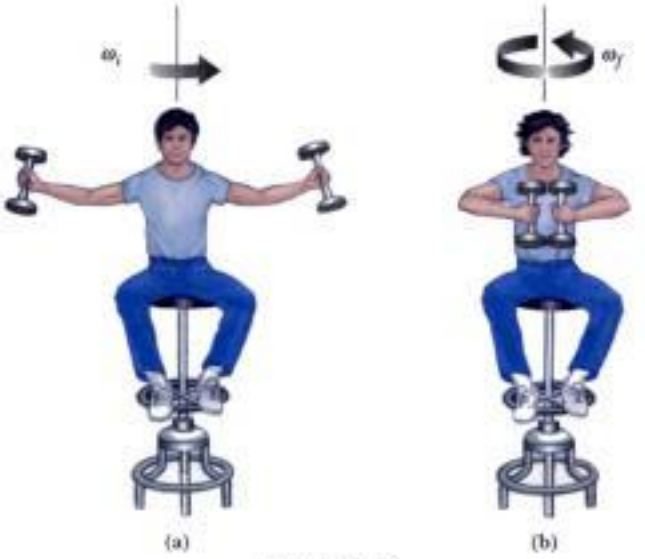


Figura P11.30

31. Una barra uniforme de masa 100 g y longitud 50.0 cm gira en un plano horizontal alrededor de un perno sin fricción, fijo y vertical, que pasa por su centro. Dos pequeñas esferillas, cada una de masa 30.0 g, están montadas en la barra de modo que puedan deslizarse sin fricción a lo largo de ella. Inicialmente las esferillas están sostenidas por hebillas en posiciones a 10.0 cm de cada lado del centro, en cuyo momento el sistema gira a una rapidez angular de 20.0 rad/s. De pronto, las hebillas se sueltan y las esferillas se deslizan hacia fuera a lo largo de la barra. (a) Encuentre la rapidez angular del sistema en el instante en que las esferillas llegan a los extremos de la barra. (b) **¿Qué pasaría si** las esferillas se salen de los extremos? ¿Cuál es la rapidez angular de la barra después que esto ocurra?

32. Una sombrilla está formada por un círculo de tela, una delgada barra con el mango en un extremo y el centro de tela en el otro extremo, y varillas rectas, uniformes, sujetas al extremo superior de la barra y que mantienen extendida la tela. Con las varillas perpendiculares a la barra, la sombrilla se hace girar alrededor de la barra con una rapidez angular de 1.25 rad/s. La tela es tan ligera y la barra tan delgada, que éstas hacen aportaciones insignificantes al momento de inercia, en comparación con las varillas. La sombrilla giratoria se balancea en su mango y sigue girando sin fricción. De pronto su cerrojo se rompe y la sombrilla se dobla parcialmente, hasta que cada una de las varillas forma un ángulo de 22.5° con la barra. ¿Cuál es la rapidez angular de la sombrilla?

33. Una mujer de 60.0 kg se pone de pie en el borde de una plataforma horizontal que tiene un momento de inercia de 500 kg · m² y radio de 2.00 m. La plataforma está inicialmente en reposo y libre para girar alrededor de un eje vertical sin fricción que pasa por su centro. La mujer empieza entonces a caminar alrededor del borde en el sentido de las manecillas del reloj (vista desde arriba del sistema) a una rapidez constante de 1.50 m/s con respecto a la Tierra. (a) ¿En qué dirección y con qué rapidez angular gira la plataforma? (b) ¿Cuánto trabajo realiza la mujer para ponerse en movimiento ella y la plataforma?

34. Un disco de 80.0 g de masa y radio 4.00 cm se desliza a lo largo de una mesa con una rapidez de 1.50 m/s, como se muestra en la figura P11.34a. Hace una colisión tangencial con un segundo disco de 6.00 cm de radio y 120 g de masa (inicialmente en reposo) tal que sus bordes apenas se tocan. Debido a que sus bordes están recubiertos con pegamento de acción instantánea, los discos se quedan pegados y giran después de la colisión (figura P11.34b). (a) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del sistema con respecto al centro de masa? (b) ¿Cuál es la rapidez angular alrededor del centro de masa?

Figura P11.34

Materiał chroniony prawem autorskim

35. Un bloque de madera de masa M, que está sobre una superficie horizontal sin fricción, está unido a una barra rígida de longitud ℓ y de masa despreciable (figura P11.35). La varilla hace pivote en el otro extremo. Una bala de masa m que se desplaza paralela a la superficie horizontal y perpendicular a la varilla, con rapidez v, golpea el bloque y se queda incrustada en éste. (a) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del sistema bala-bloque? (b) ¿Qué fracción de la energía cinética original se pierde en la colisión?

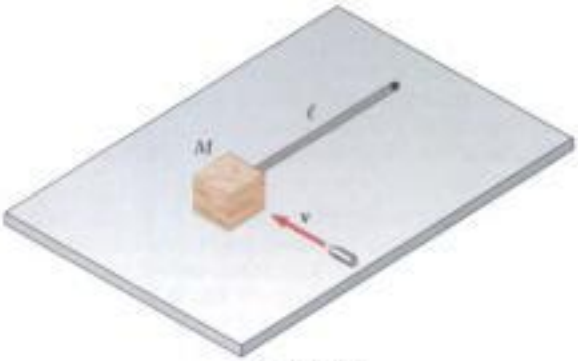


Figura P11.35

36. Una estación espacial en forma de rueda gigante tiene un radio de 100 m y un momento de inercia de 5.00×10^8 kg · m². Una tripulación de 150 viven en el borde, y la rotación de la estación hace que la tripulación experimente una aceleración aparente de caída libre de g (figura P11.27). Cuando 100 personas se mueven al centro de la estación para efectuar una reunión, cambia la rapidez angular. ¿Qué aceleración aparente de caída libre experimentan los administradores que quedan en el borde? Suponga que la masa promedio de cada habitante es de 65.0 kg.

37. Una bola de arcilla pegajosa de masa m y velocidad $\mathbf{v}_i$ es disparada en un cilindro sólido de masa M y radio R (figura P11.37). El cilindro está inicialmente en reposo y montado sobre un eje horizontal fijo que corre por su centro de masa. La línea de movimiento del proyectil es perpendicular al eje y a una distancia $d < R$ del centro. (a) Encuentre la rapidez angular del sistema inmediatamente después que la arcilla golpee y se quede pegada a la superficie del cilindro. (b) ¿Se conserva la energía mecánica del sistema arcilla-cilindro en este proceso? Explique su respuesta.

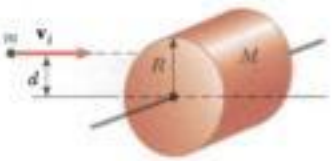


Figura P11.37

38. Un anuncio delgado rectangular uniforme cuelga verticalmente arriba de la puerta de una tienda. El anuncio está sujeto mediante una bisagra a una varilla estacionaria horizontal a lo largo de su borde superior. La masa del anuncio es de 2.40 kg y su dimensión vertical es 50.0 cm. El anuncio oscila sin fricción, convirtiéndose en un blanco tentador para niños armados de bolas de nieve. El máximo desplazamiento angular del anuncio es 25.0° a ambos lados de la vertical. En un momento, cuando el anuncio está vertical y se mueve a la izquierda, una bola de nieve de 400 g de masa, que se desplaza en forma horizontal con una velocidad de 160 cm/s a la derecha, golpea perpendicularmente el borde inferior del anuncio y se queda pegada ahí. (a) Calcule la rapidez angular del anuncio inmediatamente antes del impacto. (b) Calcule su rapidez angular inmediatamente después del impacto. (c) El anuncio salpicado oscilará hacia arriba en qué ángulo máximo?

39. Suponga que un meteoro de masa 3.00×10^{13} kg, que se mueve a 30.0 km/s con respecto al centro de la Tierra, cae sobre ésta. ¿Cuál es el orden de magnitud del decremento máximo posible de la rapidez angular de la Tierra debido a esta colisión? Explique su respuesta.

Sección 11.5 El movimiento de giroscopios y trompos

40. Una nave espacial está en el espacio vacío. Lleva un giroscopio con un momento de inercia de $I_g = 20.0$ kg · m² alrededor del eje del giroscopio. El momento de inercia de la nave alrededor del mismo eje es $I_s = 5.00 \times 10^5$ kg · m². Ni la nave ni el giroscopio están originalmente en rotación. El giroscopio puede ser energizado en un periodo insignificante a una rapidez angular de 100 s⁻¹. Si la orientación de la nave debe cambiarse en 30.0°, ¿durante cuánto tiempo debe operarse el giroscopio?

41. El vector de cantidad de movimiento angular de un giroscopio de precesión barre un cono, como se ve en la figura 11.14b. Su rapidez angular, llamada frecuencia de precesión, está dada por $\omega_p = \tau/L$, donde τ es la magnitud del par de torsión en el giroscopio y L es la magnitud de su cantidad de movimiento angular. En el movimiento llamado *precesión de los equinoccios* (lento movimiento retrógrada de puntos equinocciales a lo largo de la elíptica), el eje de rotación de la Tierra hace precesión alrededor de la perpendicular de su plano orbital con un periodo de 2.58×10^4 años. Modele la Tierra como una esfera uniforme y calcule el par de torsión en la Tierra que esté causando esta precesión.

Sección 11.6 Cantidad de movimiento angular como cantidad fundamental

42. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón se mueve en una órbita circular de radio 0.529×10^{-10} m alrededor del protón. Si se supone que la cantidad de movimiento angular orbital del electrón es igual a $h/2\pi$, calcule (a) la rapidez orbital del electrón, (b) la energía cinética del electrón, y (c) la frecuencia angular del movimiento del electrón.

Problemas adicionales

43. Todos nos hemos quejado de que no hay suficientes horas en un día. En un intento por cambiar esto, suponga que todas las personas en el mundo se alinean en el ecuador, y todas empiezan a corre hacia el este a 2.50 m/s con respecto a la superficie de la Tierra. ¿Cuánto aumenta la duración de un día? Suponga que la población mundial es 5.50×10^9 personas con una masa promedio de 70.0 kg cada una, y que la Tierra es una esfera homogénea sólida. Además, se puede usar la aproximación de que $1/(1 - x) \approx 1 + x$ para pequeños valores de x.

44. Un patinador con su patineta se puede modelar como una partícula 76.0 kg de masa situada en su centro de masa. Como se ve en la figura P8.67 en la página 248, el patinador inicia desde el reposo en posición en cuclillas en el borde de un tubo cortado a

Materiał chroniony prawem autorskim

la mitad (punto Ⓐ). Esta mitad de tubo forma la mitad de un cilindro de radio 6.80 m con su eje horizontal. En su descenso, el patinador se mueve sin fricción y se mantiene en cuclillas, de modo que su centro de masa se mueve un cuarto de círculo de radio 6.30 m. (a) Encuentre la rapidez en el fondo del tubo cortado a la mitad (punto Ⓑ). (b) Encuentre su cantidad de movimiento angular alrededor del centro de curvatura. (c) Inmediatamente después de pasar por el punto Ⓑ, él se pone de pie y levanta sus brazos, levantando su centro de gravedad de 0.500 m a 0.950 m arriba del concreto (punto Ⓒ). Explique por qué su cantidad de movimiento angular es constante en esta maniobra, mientras que su cantidad de movimiento lineal y su energía mecánica no son constantes. (d) Encuentre su rapidez inmediatamente después que se pone de pie, cuando su centro de masa se mueve en un cuarto de círculo de radio 5.85 m. (e) ¿Qué trabajo realizaron las piernas del patinador sobre su cuerpo cuando se puso de pie? A continuación, el patinador se desliza hacia arriba con su centro de masa moviéndose un cuarto de círculo de radio 5.85 m. Su cuerpo está horizontal cuando pasa por el punto Ⓓ, que es el borde lejano del tubo cortado a la mitad. (f) Encuentre su rapidez en este lugar. Al fin pasa a ser balístico, torciéndose mientras que su centro de masa se mueve verticalmente. (g) ¿A qué altura arriba del punto Ⓓ sube el patinador? (h) ¿Durante qué tiempo está el patinador en el aire antes de tocar de nuevo el tubo, de cara hacia abajo y de nuevo en cuclillas, 2.34 m abajo del nivel del punto Ⓓ? (i) Compare la solución a este problema con la solución del problema 8.67. ¿Cuál es más precisa? ¿Por qué? (*Atención:* No trate de hacer esto sin la pericia necesaria y el equipo de protección, ni en un canal de desagüe al que no tenga acceso legal).

45. Una varilla rígida y sin masa tiene tres partículas con iguales masas unidas a ella, como se ve en la figura P11.45. La varilla está libre para rotar en un plano vertical alrededor de un eje sin fricción perpendicular a la varilla que pasa por el punto P, y se suelta desde el reposo en la posición horizontal en $t = 0$. Si se supone que m y d se conocen, encuentre (a) el momento de inercia del sistema (varilla más partículas) alrededor del pivote, (b) el par de torsión que actúa sobre el sistema en $t = 0$, (c) la aceleración angular del sistema en $t = 0$, (d) la aceleración lineal de la partícula marcada como 3 en $t = 0$, (e) la máxima energía cinética del sistema, (f) la máxima rapidez angular alcanzada por la varilla, (g) la máxima cantidad de movimiento angular del sistema, y (h) la máxima rapidez alcanzada por la partícula marcada como 2.

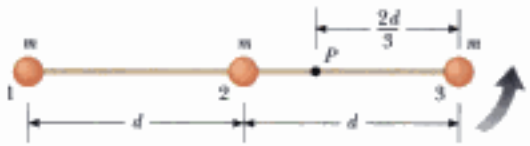


Figura P11.45

46. Un disco horizontal uniforme de 100 kg, de radio 5.50 m, gira sin fricción a 2.50 rev/s sobre un eje vertical que pasa por su centro, como en la figura P11.46. Un mecanismo de retroalimentación detecta la rapidez angular del disco y un motor en A mantiene constante la rapidez angular, mientras que un bloque de 1.20 kg en la parte superior del disco se desliza hacia fuera en una ranura radial. El bloque de 1.20 kg inicia en el centro del disco en el tiempo $t = 0$, y se mueve hacia fuera con rapidez constante de 1.25 cm/s con respecto al disco hasta que llega al borde en $t = 440$ s. El bloque deslizante no detecta fricción. Su movimiento está limitado a tener rapidez radial constante por un freno situado en B, que produce tracción en una cuerda ligera atada al bloque. (a) Encuentre el par de torsión que el motor debe dar como función del tiempo, mientras que el bloque se desliza. (b) Encuentre el valor de este par de torsión en $t = 440$ s, justo antes que el bloque deslizante termine su movimiento. (c) Encuentre la potencia que el motor debe entregar como función del tiempo. (d) Encuentre el valor de la potencia cuando el bloque deslizante esté apenas llegando al extremo de la ranura. (e) Encuentre la tracción en la cuerda como función del tiempo. (f) Encuentre el trabajo realizado por el motor durante el movimiento de 440 s. (g) Encuentre el trabajo realizado por el freno de la cuerda en el bloque deslizante. (h) Encuentre el trabajo total sobre el sistema formado por el disco y el bloque deslizante.

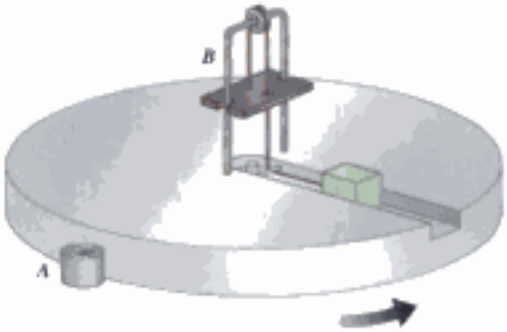


Figura P11.46

47. El cometa Halley se desplaza alrededor del Sol en una órbita elíptica, con su aproximación más cercana al Sol a unas 0.590 UA (unidades astronómicas) y su mayor distancia a 35.0 UA (1 UA = distancia de la Tierra al Sol). Si la rapidez del cometa en su aproximación más cercana es 54.0 km/s, ¿cuál es la rapidez cuando está más alejado del Sol? La cantidad de movimiento angular del cometa alrededor del Sol se conserva, porque no hay par de torsión que actúa sobre el cometa. La fuerza gravitacional ejercida por el Sol tiene cero brazo de momento.

48. Una cuerda ligera pasa sobre una polea liviana y sin fricción. Un extremo está sujeto a un racimo de plátanos de masa M, y un mono

Figura P11.48

Materiał chroniony prawem autorskim

de masa M se agarra del otro extremo (figura P11.48). El mono sube por la cuerda en un intento por alcanzar los plátanos. (a) Si se trata el sistema como formado por el mono, plátanos, cuerda y polea, evalúe el par de torsión neto alrededor del eje de la polea. (b) Usando los resultados de (a), determine la cantidad total de movimiento angular alrededor del eje de la polea, y describa el movimiento del sistema. ¿Alcanzará el mono los plátanos?

49. Un disco de masa m está unido a un cordón que pasa por un pequeño agujero en una superficie horizontal y sin fricción (figura P11.49). El disco está inicialmente girando en órbita con rapidez v_i en un círculo de radio r_i. El cordón se jala entonces lentamente desde abajo, reduciendo el radio del círculo a r. (a) ¿Cuál es la rapidez del disco cuando el radio es r? (b) Encuentre la tensión en el cordón como función de r. (c) ¿Cuánto trabajo W es realizado al mover m de r_i a r? (*Nota:* La tensión depende de r). (d) Obtenga valores numéricos para v, T y W cuando $r = 0.100$ m, $m = 50.0$ g, $r_i = 0.300$ m y $v_i = 1.50$ m/s.

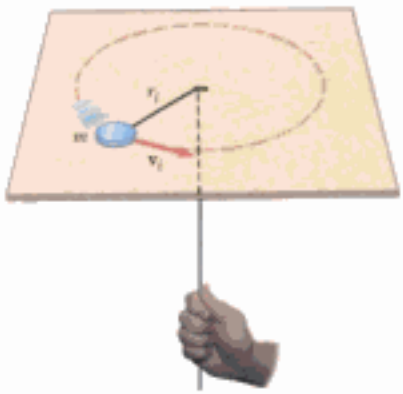


Figura P11.49

50. Un proyectil de masa m se mueve a la derecha con una rapidez v_i (figura P11.50a). El proyectil golpea y se queda pegado al extremo de una varilla estacionaria de masa M, longitud d, que hace pivote alrededor de un eje sin fricción que pasa por su centro (figura P11.50b). (a) Encuentre la rapidez angular del sistema inmediatamente después de la colisión. (b) Determine la pérdida fraccionaria en energía mecánica debida a la colisión.

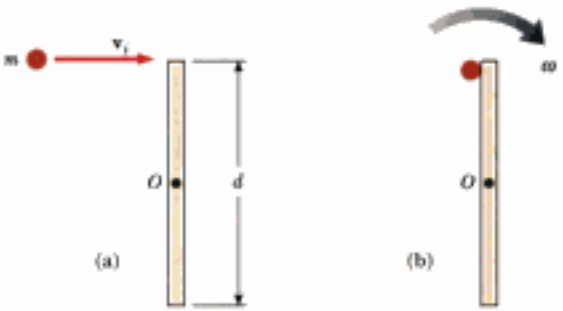


Figura P11.50

51. Dos astronautas (figura P11.51), cada uno de masa 75.00 kg, están unidos por una cuerda de 10.0 m de masa insignificante. Están aislados en el espacio, girando en órbita alrededor de su centro de masa a una rapidez de 5.00 m/s. Tratando los astronautas como partículas, calcule (a) la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema y (b) la energía rotacional del sistema. Al tirar de la cuerda, uno de los astronautas acorta la distancia entre ellos a 5.00 m. (c) ¿Cuál es la nueva cantidad de movimiento angular del sistema? (d) ¿Cuál es la nueva rapidez de los astronautas? (e) ¿Cuál es la nueva energía rotacional del sistema? (f) ¿Cuánto trabajo realiza el astronauta al acortar la cuerda?

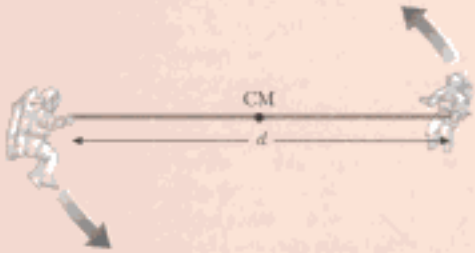


Figura P11.51 Problemas 51 y 52.

52. Dos astronautas (figura P11.51), cada uno de masa M, están unidos por una cuerda de longitud d de masa insignificante. Están aislados en el espacio, girando en órbita alrededor de su centro de masa a una rapidez v. Tratando los astronautas como partículas, calcule (a) la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema y (b) la energía rotacional del sistema. Al tirar de la cuerda, uno de los astronautas acorta la distancia entre ellos a $d/2$. (c) ¿Cuál es la nueva cantidad de movimiento angular del sistema? (d) ¿Cuál es la nueva rapidez de los astronautas? (e) ¿Cuál es la nueva energía rotacional del sistema? (f) ¿Cuánto trabajo realiza el astronauta al acortar la cuerda?

53. El calentamiento global es motivo de preocupación porque incluso pequeños cambios en la temperatura de la Tierra pueden tener consecuencias importantes. Por ejemplo, si los casquetes de hielo polar de la Tierra se derritieran por completo, el agua adicional resultante en los océanos inundaría muchas ciudades costeras. ¿Cambiaría de manera apreciable la duración de un día? Calcule el cambio resultante en la duración de un día. Modele el hielo polar como que tiene una masa de 2.50×10^{19} kg y que forma dos discos planos de radio 6.00×10^{5} m. Suponga que el agua se extiende en una delgada capa esférica continua después que se derrite.

54. Un cubo sólido de madera de lado $2a$ y masa M se apoya sobre una superficie horizontal. El cubo está limitado a rotar alrededor de un eje AB (figura P11.54). Una bala de masa m y rapidez v se dispara a la cara opuesta $ABCD$ a una altura de $4a/3$. La bala se incrusta en el cubo. Encuentre el valor mínimo de v necesario para volcar el cubo de modo que caiga sobre su cara $ABCD$. Suponga que $m \ll M$.

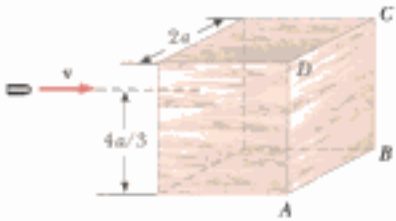


Figura P11.54

Materiał chroniony prawem autorskim

55. Un cubo sólido de lado $2a$ y masa M se desliza sobre una superficie sin fricción con velocidad uniforme $\mathbf{v}$, como se muestra en la figura P11.55a. Golpea un pequeño obstáculo que está en el extremo de la mesa, lo cual hace que el cubo se incline como se ve en la figura P11.55b. Encuentre el valor mínimo de $\mathbf{v}$ tal que el cubo caiga de la mesa. Nótese que el momento de inercia del cubo alrededor de un eje a lo largo de una de sus aristas es $8Ma^2/3$. (*Sugerencia:* El cubo experimenta una colisión elástica en la arista.)

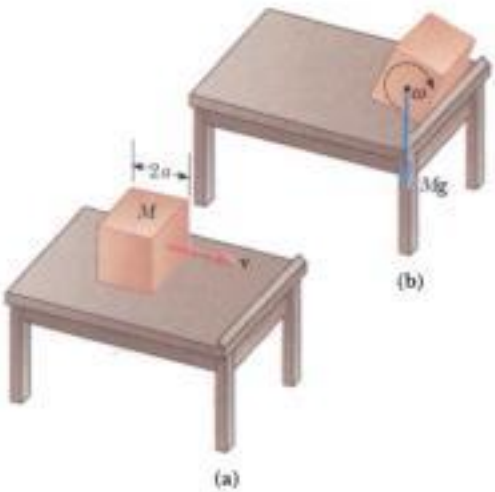


Figura P11.55

56. Un disco sólido uniforme se pone en rotación con una rapidez angular ω_i alrededor de un eje que pasa por su centro. Cuando todavía está girando a esta rapidez, el disco se pone en contacto con una superficie horizontal y se suelta, como se ve en la figura P11.56. (a) ¿Cuál es la rapidez angular del disco una vez que tenga lugar un rodamiento puro? (b) Encuentre la pérdida fraccionaria en energía cinética desde el momento en que el disco se suelta hasta que ocurra un rodamiento puro. (*Sugerencia:* Considere pares de torsión alrededor del centro de masa.)

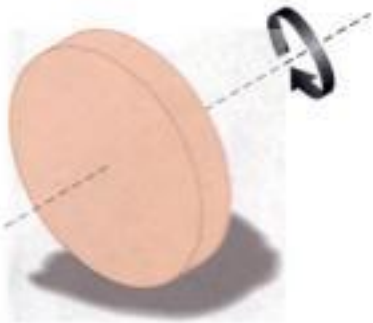


Figura P11.56 Problemas 56 y 57.

57. Suponga que un disco sólido de radio R recibe una rapidez angular ω_i alrededor de un eje que pasa por su centro y luego se baja a una superficie horizontal y se suelta, como en el problema 56 (figura P11.56). Además, suponga que el coeficiente de fricción entre disco y superficie es μ. (a) Demuestre que el intervalo antes que ocurre el movimiento de rodamiento puro es $R\omega_i/3\mu g$. (b) Demuestre que la distancia que recorre el disco antes que se presente el rodamiento puro es $R^2\omega_i^2/18\mu g$.

Respuestas a las *preguntas rápidas*

11.1 (d) Este resultado se puede obtener al sustituir $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ con $-(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, según la ecuación 11.4.

11.2 (d) Debido a que la función sen θ, $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ es igual o menor que AB, dependiendo del ángulo θ.

11.3 (a) Si $\mathbf{p}$ y $\mathbf{r}$ son paralelos o antiparalelos, la cantidad de movimiento angular es cero. Para una cantidad de movimiento angular diferente de cero, el vector de cantidad de movimiento lineal debe estar desviado del eje de rotación.

11.4 (c) La cantidad de movimiento angular es el producto de la cantidad de movimiento lineal y la distancia perpendicular desde el eje de rotación a la línea a lo largo de la cual se encuentra el vector de la cantidad de movimiento lineal.

11.5 (b) La esfera hueca tiene mayor momento de inercia que la esfera sólida.

11.6 (a) La clavadista es un sistema aislado, de modo que el producto $I\omega$ permanece constante. Debido a que disminuye su momento de inercia, su rapidez angular aumenta.

11.7 (a) Cuando disminuye el momento de inercia de la clavadista, la rapidez angular aumenta en el mismo factor. Por ejemplo, si I disminuye en un factor de 2, ω aumenta en un factor de 2. La energía cinética rotacional varía como el cuadrado de ω. Si I se reduce a la mitad, ω^2 aumenta en un factor de 4 y la energía aumenta en un factor de 2.

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 12

Equilibrio estático y elasticidad

12.1 Condiciones de equilibrio

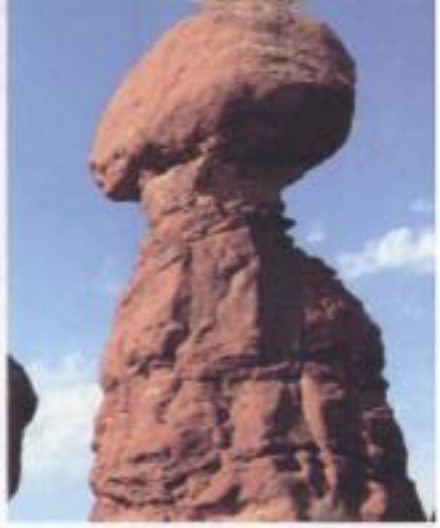
12.2 Más sobre el centro de gravedad

12.3 Ejemplos de cuerpos rígidos en equilibrio estático

12.4 Propiedades elásticas de sólidos

▲ *La Piedra Balanceada del Arches National Park, Utah, es una enorme piedra de 3 000 000 de kg que ha estado en equilibrio estable durante varios miles de años. Tenía una compañera cercana más pequeña, llamada "Chip Off the Old Block," (De Tal Palo Tal Astilla) que se cayó durante el invierno de 1975. La Piedra Balanceada apareció en una de las primeras escenas de la película* Indiana Jones y la Última Cruzada. *En este capítulo estudiaremos las condiciones bajo las que un objeto está en equilibrio. (John W. Jewett, Jr.)*

Materiał chroniony prawem autorskim



En los capítulos 10 y 11 estudiamos la dinámica de cuerpos rígidos. Parte del presente capítulo aborda las condiciones bajo las cuales un cuerpo rígido está en equilibrio. El término *equilibrio* implica ya sea que el cuerpo se encuentre en reposo o que su centro de masa se mueva con velocidad constante con respecto al observador. Aquí hablamos sólo del primer caso, en el que el cuerpo está en *equilibrio estático*. El equilibrio estático representa una situación común en la práctica de la ingeniería, y los principios que comprende son de especial interés para ingenieros civiles e ingenieros mecánicos. Si el lector es estudiante de ingeniería, no hay duda que en el futuro tomará un curso avanzado sobre estática.

La última sección de este capítulo trata de la forma en que los cuerpos se deforman bajo condiciones de carga. Un cuerpo *elástico* regresa a su forma original cuando se retiran las fuerzas que lo deforman. Se definen varias constantes elásticas, cada una de ellas correspondiente a un tipo diferente de deformación.

12.1 Condiciones de equilibrio

En el capítulo 5 encontramos que una condición necesaria para el equilibrio es que la fuerza neta que actúe sobre un cuerpo debe ser cero. Si el cuerpo se modela como una partícula, entonces ésta es la única condición que debe satisfacerse para el equilibrio. La situación con cuerpos reales (extendidos) es más compleja, sin embargo, porque estos cuerpos no se pueden modelar como partículas. Para que un cuerpo extendido se encuentre en equilibrio estático, debe satisfacerse una segunda condición. Ésta comprende un par de torsión neto que actúe sobre el cuerpo extendido.

Considere una fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido, como se ve en la figura 12.1. El efecto de la fuerza depende de la ubicación de su punto de aplicación *P*. Si **r** es el vector de posición de este punto con respecto a *O*, el par de torsión asociado con la fuerza **F** alrededor de *O* está dado por la ecuación 11.1:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Recordemos de nuestro estudio del producto vectorial en la sección 11.1, que el vector $\boldsymbol{\tau}$ es perpendicular al plano formado por **r** y **F**. Se puede usar la regla de la mano derecha para determinar la dirección de $\boldsymbol{\tau}$ como se ve en la figura 11.2. Por lo tanto, en la figura 12.1, $\boldsymbol{\tau}$ está dirigido saliendo de la página hacia el lector.

Como se puede ver de la figura 12.1, la tendencia de **F** a hacer rotar el objeto alrededor de un eje que pase por *O* depende del brazo de momento *d*, así como de la magnitud de **F**. Recuerde que la magnitud de $\boldsymbol{\tau}$ es *Fd* (véase la ecuación 10.19). Según la ecuación 10.21, el par de torsión neto sobre un cuerpo rígido ocasionará que éste experimente una aceleración angular.

En el presente análisis, deseamos ver las situaciones rotacionales en las que la aceleración angular de un cuerpo rígido es cero. Ese objeto está en **equilibrio rotacional.** Como $\Sigma\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$ para rotación alrededor de un eje fijo, la condición necesaria para equilibrio rotacional es que **el par de torsión neto alrededor de cualquier eje debe ser cero.** Ahora tenemos dos condiciones necesarias para equilibrio de un objeto:

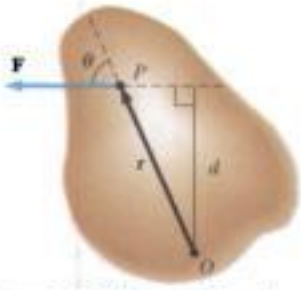


Figura 12.1 Una fuerza **F** actúa sobre un cuerpo rígido en el punto *P*.

Materiał chroniony prawem autorskim

1. La fuerza externa resultante debe ser igual a cero:

$$\sum \mathbf{F} = 0 \tag{12.1}$$

2. El par de torsión externo resultante alrededor de *cualquier* eje debe ser cero:

$$\sum \boldsymbol{\tau} = 0 \tag{12.2}$$

La primera condición es un enunciado de equilibrio de traslación; nos dice que la aceleración lineal del centro de masa del cuerpo debe ser cero cuando se vea desde un marco de referencia inercial. La segunda condición es un enunciado de equilibrio de rotación, y nos dice que la aceleración angular alrededor de [illegible] **brio estático,** que es el tema princi[illegible]

¡ADVERTENCIA!

12.1 Par de torsión cero

Un par de torsión neto cero no significa ausencia de movimiento de rotación. Un cuerpo que está girando a rapidez angular constante

Del mismo modo, el punto de aplicación de $\mathbf{F}_2$ con respecto a O' es $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'$, y así sucesivamente. Por lo tanto, el par de torsión alrededor de un eje que pasa por O' es

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{O'} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}') \times \mathbf{F}_2 + (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}') \times (\mathbf{F}_3 + \cdots$$
$$= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 + \cdots - \mathbf{r}' \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots)$$

Debido a que se supone que la fuerza neta es cero (dado que el cuerpo está en equilibrio de traslación), el último término desaparece, y vemos que el par de torsión alrededor de un eje que pasa por O' es igual al par de torsión alrededor de un eje que pasa por O. Por lo tanto, **si un cuerpo está en equilibrio de traslación y el par de torsión neto es cero alrededor de un eje, entonces el par de torsión neto debe ser cero alrededor de cualquier otro eje.**

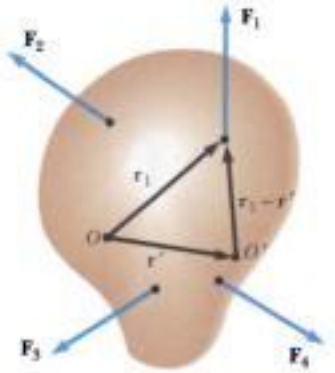


Figura 12.4 Construcción que muestra que si el par de torsión neto es cero alrededor del origen O, también es cero alrededor de cualquier otro origen, por ejemplo O'.

12.2 Más sobre el centro de gravedad

Hemos visto que el punto en el que se aplica una fuerza puede ser crítico para determinar la forma en que el cuerpo responde a esa fuerza. Por ejemplo, dos fuerzas de igual magnitud, pero dirigidas en sentido opuesto resultan en equilibrio si se aplican en el mismo punto sobre un cuerpo. No obstante, si se cambia el punto de aplicación de una de las fuerzas de modo que las dos fuerzas ya no actúen a lo largo de la misma línea de acción, entonces el cuerpo experimenta aceleración angular.

Siempre que tratemos con un cuerpo rígido, una de las fuerzas que debemos considerar es la fuerza gravitacional que actúa sobre él, y debemos conocer el punto de aplicación de esta fuerza. Como vimos en la sección 9.5, asociado con todo cuerpo existe un punto especial denominado su centro de gravedad. Todas las diversas fuerzas gravitacionales que actúan sobre todos los diversos elementos de masa del cuerpo, son equivalentes a una sola fuerza gravitacional que actúa en este punto. Entonces, para calcular el par de torsión debido a la fuerza gravitacional sobre un objeto de masa M, necesitamos sólo considerar la fuerza $M\mathbf{g}$ que actúa en el centro de gravedad del objeto.

¿Cómo encontramos este punto especial? Como se menciona en la sección 9.5, si suponemos que $\mathbf{g}$ es uniforme en el cuerpo, entonces el centro de gravedad del cuerpo coincide con su centro de masa. Para ver que esto es así, considere un cuerpo de forma arbitraria que se encuentra en el plano xy, como se ilustra en la figura 12.5. Suponga que el cuerpo se divide en un número grande de partículas de masas m_1, m_2, m_3, . . . con coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... En la ecuación 9.28 definimos que la coordenada x del centro de masa de ese cuerpo es

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i}$$

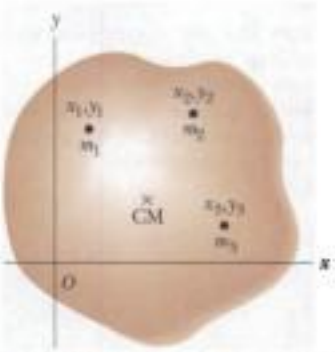


Figura 12.5 Un cuerpo se puede dividir en numerosas partículas pequeñas que tengan una masa específica y coordenadas específicas. Estas partículas se pueden usar para localizar el centro de masa.

Empleamos una ecuación semejante para definir la coordenada y del centro de masa, sustituyendo cada x por su similar y.

Examinemos ahora la situación desde otro punto de vista al considerar la fuerza gravitacional ejercida sobre cada una de las partículas, como se ve en la figura 12.6. Cada partícula contribuye con un par de torsión alrededor del origen igual en magnitud al peso mg de la partícula multiplicado por su brazo de momento. Por ejemplo, la magnitud del par de torsión debido a la fuerza $m_1\mathbf{g}_1$ es $m_1g_1x_1$, donde g_1 es el valor de la aceleración gravitacional debida a la posición de la partícula de masa m_1. Deseamos ubicar el centro de masa, el punto en el que la aplicación de la fuerza gravitacional individual $M\mathbf{g}$ (donde $M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots$ es la masa total del cuerpo) tiene el mismo efecto de rotación que el efecto combinado de todas las fuerzas gravitacionales individuales $m_i\mathbf{g}_i$. Si se iguala el par de torsión que resulta de que $M\mathbf{g}$ actúe en el centro de gravedad con la suma de los pares de torsión que actúan sobre las partículas individuales tendremos

$$(m_1g_1 + m_2g_2 + m_3g_3 + \cdots)x_{CG} = m_1g_1x_1 + m_2g_2x_2 + m_3g_3x_3 + \cdots$$

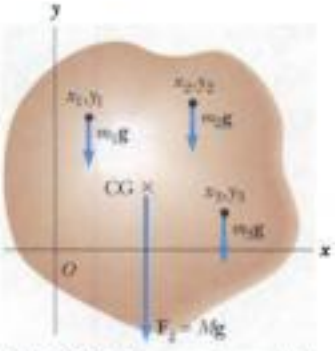


Figura 12.6 El centro de gravedad de un cuerpo está situado en el centro de masa si $\mathbf{g}$ es constante en todo el cuerpo.

Esta expresión toma en cuenta el hecho de que el valor de g puede en general variar sobre el cuerpo. Si suponemos una g uniforme en todo el cuerpo (como suele ser el caso), enton-

Materiał chroniony prawem autorskim

ces los términos g se cancelan y obtenemos

$$x_{CG} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \tag{12.4}$$

Al comparar este resultado con la ecuación 9.28, vemos que **el centro de gravedad está situado en el centro de masa mientras g sea uniforme en todo el cuerpo.** En varios ejemplos presentados en la siguiente sección trabajaremos con cuerpos simétricos, homogéneos. El centro de gravedad para cualquiera de estos objetos coincide con su centro geométrico.

Pregunta rápida 12.3 Una regla graduada está sostenida sobre un fulcro en la marca de 25 cm. Un cuerpo de 0.50 kg se cuelga del extremo cero de la regla graduada, y la regla se balancea horizontalmente. La masa de la regla graduada es (a) 0.25 kg (b) 0.50 kg (c) 0.75 kg (d) 1.0 kg (e) 2.0 kg (f) imposible de determinar.

Charles D. Winters

Figura 12.7 Este soporte para una botella de vino es un ejemplo sorprendente de equilibrio estático. El centro de gravedad del sistema (botella más soporte) está directamente sobre el punto de apoyo.

12.3 Ejemplos de cuerpos rígidos en equilibrio estático

La fotografía del soporte para una botella de vino de la figura 12.7 muestra un ejemplo de un sistema mecánico balanceado que parece desafiar la gravedad. Para que el sistema (soporte más botella) esté en equilibrio, la fuerza externa neta debe ser cero (véase la ecuación 12.1) y el par de torsión externo neto debe ser cero (véase la ecuación 12.2). La segunda condición puede ser satisfecha sólo cuando el centro de gravedad del sistema esté directamente sobre el punto de apoyo.

Cuando el estudiante trabaje problemas de equilibrio estático, debe reconocer todas las fuerzas externas que actúen sobre el cuerpo; no hacerlo así dará como resultado un análisis incorrecto. Cuando analice un cuerpo en equilibrio bajo la acción de varias fuerzas externas, utilice el siguiente procedimiento:

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

CUERPOS EN EQUILIBRIO ESTÁTICO

- Trace un diagrama claro, sencillo, del sistema.
- Aísle el cuerpo que analice. Trace un diagrama de cuerpo libre. Luego muestre y marque todas las fuerzas externas que actúen sobre el objeto, indicando en dónde se aplican esas fuerzas. No incluya fuerzas ejercidas por el objeto en su entorno. (Para sistemas que contienen más de un cuerpo, trace un diagrama separado de cuerpo libre para cada uno.) Trate de calcular la dirección correcta de cada fuerza.
- Establezca un cómodo sistema de coordenadas y encuentre los componentes de las fuerzas sobre el objeto a lo largo de los dos ejes. Luego aplique la primera condición de equilibrio. Recuerde dar seguimiento de los signos de los diversos componentes de fuerzas.
- Seleccione un eje conveniente para calcular el par de torsión neto sobre el cuerpo. Recuerde que la selección del origen para la ecuación del par de torsión es arbitraria; escoja por lo tanto un origen que simplifique sus cálculos cuanto sea posible. Tome nota que una fuerza que actúa a lo largo de una línea que pasa por el punto escogido como el origen, da contribución cero al par de torsión y por lo tanto se puede pasar por alto.
- La primera y segunda condiciones para equilibrio dan un conjunto de ecuaciones lineales que contienen varias incógnitas, y estas ecuaciones se pueden resolver simultáneamente. Si la dirección que usted seleccionó para una fuerza lleva a un valor negativo, no se alarme; esto simplemente significa que la dirección de la fuerza es opuesta a lo que usted calculó.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 12.1 Repaso del subibaja

Un subibaja formado por una tabla uniforme de masa M y longitud ℓ sostiene a un padre y su hija con masas m_f y m_d, respectivamente, como se ilustra en la figura 12.8. El soporte (llamado *fulcro*) está bajo el centro de gravedad de la tabla, el padre está a una distancia d del centro, y la hija está a una distancia $\ell/2$ del centro.

(A) Determine la magnitud de la fuerza ascendente **n** ejercida por el soporte sobre la tabla.

Solución Primero nótese que, además de **n**, las fuerzas externas que actúan sobre la tabla son las fuerzas hacia abajo ejercidas por cada persona y la fuerza gravitacional que actúa sobre la tabla. Sabemos que el centro de gravedad de la tabla está en su centro geométrico porque nos indican que la tabla es uniforme. Debido a que el sistema está en equilibrio estático, la fuerza neta sobre la tabla es cero. Por lo tanto, la fuerza **n** hacia arriba debe balancear todas las fuerzas hacia abajo. De $\Sigma F_y = 0$, y si definimos hacia arriba como la dirección y positiva, tenemos

$$n - m_f g - m_d g - Mg = 0$$

$$n = m_f g + m_d g + Mg$$

(La ecuación $\Sigma F_x = 0$ también aplica, pero no necesitamos considerarla porque no actúan fuerzas horizontalmente sobre la tabla).

(B) Determine si el padre debe sentarse de modo que equilibre el sistema.

Solución Para hallar esta posición, debemos invocar la segunda condición de equilibrio. Si tomamos un eje perpendicular a la página que pase por el centro de gravedad de la tabla como el eje para nuestra ecuación de par de torsión, los pares de torsión producidos por **n** y la fuerza gravitacional que actúa sobre la tabla es cero. De $\Sigma\tau = 0$ vemos que

$$(m_f g)(d) - (m_d g)\frac{\ell}{2} = 0$$

$$d = \left(\frac{m_d}{m_f}\right)\frac{1}{2}\ell$$

Éste es el mismo resultado que obtuvimos en el ejemplo 11.6 al evaluar la aceleración angular del sistema y hacer igual a cero la aceleración angular.

¿Qué pasaría si? Suponga que escogimos otro punto por el que ha de pasar el eje de rotación. Por ejemplo, suponga que el eje es perpendicular a la página y pasa por la ubicación del padre. ¿Cambia esto los resultados de las partes (A) y (B)?

Respuesta La parte (A) no resulta afectada porque el cálculo de la fuerza neta no comprende un eje de rotación. En la parte (B), de manera conceptual esperaríamos que no hubiera cambio si se selecciona un eje de rotación diferente, porque la segunda condición de equilibrio dice que el par de torsión es cero alrededor de cualquier eje de rotación.

Verifiquemos esto matemáticamente. Recordemos que el signo del par de torsión asociado con una fuerza es positivo si esa fuerza tiende a hacer girar el sistema en sentido contrario al de las manecillas de un reloj, mientras que el signo del par de torsión es negativo si la fuerza tiende a girar el sistema en el sentido de las manecillas de un reloj. En el caso de un eje de rotación que pasa por la ubicación del padre, $\Sigma\tau = 0$ da

$$n(d) - (Mg)(d) - (m_d g)(d + \ell/2) = 0$$

De la parte (A) sabemos que $n = m_f g + m_d g + Mg$. Por lo tanto, podemos sustituir esta expresión por n y despejar d:

$$(m_f g + m_d g + Mg)(d) - (Mg)(d) - (m_d g)\left(d + \frac{\ell}{2}\right) = 0$$

$$(m_f g)(d) - (m_d g)\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0$$

$$d = \left(\frac{m_d}{m_f}\right)\frac{1}{2}\ell$$

Este resultado está de acuerdo con uno obtenido en la parte (B).

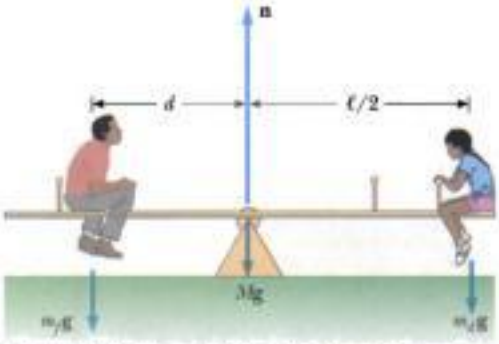


Figura 12.8 (Ejemplo 12.1) Un sistema balanceado.

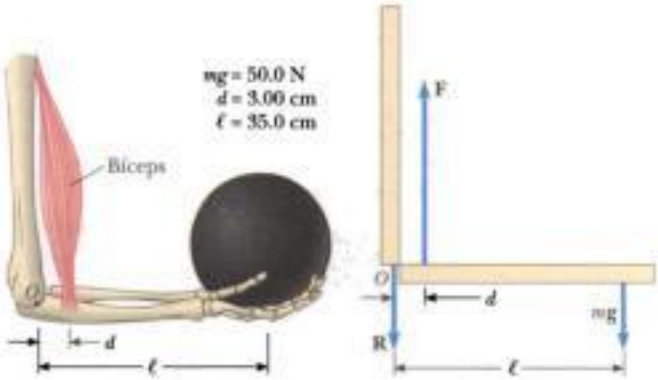
Ejemplo 12.2 Una mano pesada

Una persona sostiene una esfera de 50.0 N en su mano. El antebrazo está horizontal, como se ve en la figura 12.9a. El bíceps está unido a 3.00 cm del codo y la esfera está a 35.0 cm del codo. Encuentre la fuerza hacia arriba ejercida por el bíceps sobre el antebrazo y la fuerza hacia abajo ejercida por el brazo superior sobre el antebrazo y que actúa en el codo. Desprecie el peso del antebrazo.

Solución Simplificamos la situación al modelar el antebrazo como barra, como se muestra en la figura 12.9b, donde **F** es la fuerza hacia arriba ejercida por el bíceps y **R** es la fuerza hacia abajo ejercida por el brazo superior en el codo. De la primera condición para equilibrio tenemos, con el movimiento hacia arriba como la dirección y positiva,

$$(1) \qquad \sum F_y = F - R - 50.0\ \text{N} = 0$$

Materiał chroniony prawem autorskim



(a) (b)

Figura 12.9 (Ejemplo 12.2) (a) El bíceps jala hacia arriba con una fuerza **F** que está esencialmente a ángulo recto con el antebrazo. (b) Modelo mecánico para el sistema descrito en la parte (a).

De la segunda condición para equilibrio, sabemos que la suma de los pares de torsión alrededor de cualquier punto debe ser cero. Con la articulación O como el eje, tenemos

$$\sum \tau = Fd - mg\ell = 0$$

$$F(3.00\text{ cm}) - (50.0\text{ N})(35.0\text{ cm}) = 0$$

$$F = \mathbf{583\text{ N}}$$

Este valor de F se puede sustituir en la ecuación (1) para dar $R = 533$ N. Como muestra este ejemplo, las fuerzas en las articulaciones y en los músculos pueden ser sumamente grandes.

Ejemplo 12.3 De pie sobre una viga horizontal

Una viga horizontal uniforme de 8.00 m de longitud y 200 N de peso está unida a una pared por una conexión con perno. Su extremo lejano está sostenido por un cable que forma un ángulo de 53.0° con la viga (figura 12.10a). Si una persona de 600 N está de pie a 2.00 m de la pared, encuentre la tensión en el cable, así como la magnitud y dirección de la fuerza ejercida por la pared sobre la viga.

Solución Conceptualice este problema al imaginar que la persona en la figura 12.10 se mueve hacia fuera sobre la viga. Parece razonable que cuanto más lejos se mueva, mayor es el par de torsión que aplica alrededor del pivote y mayor la tensión que el cable debe hacer para balancear este par de torsión. Debido a que el sistema está en reposo, clasificamos éste como un problema de equilibrio estático. Para analizar el problema comenzamos por identificar todas las fuerzas externas que actúan sobre la viga: la fuerza gravitacional de 200 N, la fuerza **T** ejercida por el cable, la fuerza **R** ejercida por la pared en el pivote, y la fuerza de 600 N que la persona ejerce sobre la viga. Estas fuerzas están todas indicadas en el diagrama de cuerpo libre para la viga que se muestra en la figura 12.10b. Cuando asignamos direcciones para fuerzas, a veces es útil imaginar lo que pasaría si una fuerza se quitara de pronto. Por ejemplo, si la pared desapareciera súbitamente, el extremo izquierdo de la viga se movería a la izquierda cuando empiece a caer. Esto nos dice que la pared no sólo está sosteniendo la viga, sino que también presiona hacia fuera contra ella. Por lo tanto, trazamos el vector **R** como se ve en la figura 12.10b. Si descomponemos **T** y **R** en sus elementos horizontal y vertical, como se ve en la figura 12.10c, y aplicamos la primera condición de equilibrio, obtenemos

$$\text{(1)} \qquad \sum F_x = R\cos\theta - T\cos 53.0° = 0$$

$$\text{(2)} \qquad \sum F_y = R\,\text{sen}\,\theta + T\,\text{sen}\,53.0° - 600\text{ N} - 200\text{ N} = 0$$

donde hemos escogido hacia la derecha y hacia arriba como nuestras direcciones positivas. Como R, T y θ son todas incógnitas, no podemos obtener una solución a partir sólo de estas expresiones. (El número de ecuaciones simultáneas debe ser igual al número de incógnitas para que podamos despejar éstas.)

Invoquemos ahora la condición para equilibrio rotacional. Un eje conveniente a seleccionar para nuestra ecuación de par de torsión es el que pasa por la conexión del perno. La característica que hace que este punto sea conveniente, es que la fuerza **R** y la componente horizontal de **T** tienen ambas un brazo de momento de cero, por lo cual las fuerzas no dan par de torsión alrededor de este punto. Si recordamos nuestra convención de que positivo es sentido contrario a las manecillas de un reloj para el signo del par de torsión alrededor de un eje, y si observamos que los brazos de momento de las fuerzas de 600 N, 200 N y T sen 53.0° son 2.00 m, 4.00 m y 8.00 m, respectivamente, obtenemos

$$\text{(3)} \qquad \sum \tau = (T\,\text{sen}\,53.0°)(8.00\text{ m}) - (600\text{ N})(2.00\text{ m}) - (200\text{ N})(4.00\text{ m}) = 0$$

$$T = \mathbf{313\text{ N}}$$

Por lo tanto, la ecuación de par de torsión con este eje nos da directamente una de las incógnitas. Ahora sustituimos este valor en las ecuaciones (1) y (2) y encontramos que

$$R\cos\theta = 188\text{ N}$$

$$R\,\text{sen}\,\theta = 550\text{ N}$$

Dividimos la segunda ecuación entre la primera y, recordando la identidad trigonométrica sen θ/cos θ = tan θ, obtenemos

$$\tan\theta = \frac{550\text{ N}}{188\text{ N}} = 2.93$$

Materiał chroniony prawem autorskim

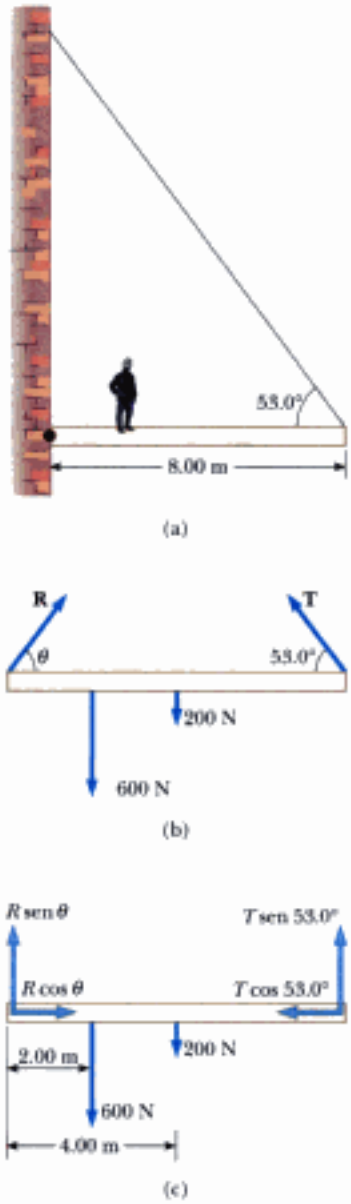


Figura 12.10 (Ejemplo 12.3) (a) Viga uniforme sostenida por un cable. Una persona camina hacia fuera sobre la viga. (b) Diagrama de cuerpo libre para la viga. (c) Diagrama de cuerpo libre para la viga mostrando los componentes de **R** y **T**.

$$\theta = 71.1°$$

Este valor positivo indica que nuestra estimación de la dirección de **R** era precisa.

Finalmente,

$$R = \frac{188\ \text{N}}{\cos\theta} = \frac{188\ \text{N}}{\cos 71.1°} = 580\ \text{N}$$

Para finalizar este problema, nótese que si hubiéramos seleccionado otro eje para la ecuación de par de torsión, la solución podría se diferente en los detalles, pero las respuestas serían las mismas. Por ejemplo, si hubiéramos escogido un eje que pasara por el centro de gravedad de la viga, la ecuación de par de torsión hubiera comprendido tanto T como R. Sin embargo, de esta ecuación, acoplada con las ecuaciones (1) y (2), todavía podrían despejarse las incógnitas. ¡Inténtelo!

Cuando muchas fuerzas intervienen en un problema de esta naturaleza, es conveniente hacer una tabla en el análisis. Por ejemplo, para el caso que acabamos de ver, podríamos construir la siguiente tabla. Hacer que la suma de los términos de la última columna sea igual a cero, representa la condición de equilibrio rotacional.

Componente de fuerza	Brazo de momento respecto a O (m)	Par de torsión alrededor de O (N · m)
T sen 53.0°	8.00	(8.00) T sen 53.0°
T cos 53.0°	0	0
200 N	4.00	− (4.00) (200)
600 N	2.00	− (2.00) (600)
R sen θ	0	0
R cos θ	0	0

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si la persona camina más por la viga? ¿Cambia *T*? ¿Cambia *R*? ¿Cambia *θ*?

Respuesta T debe aumentar porque el peso de la persona ejerce un mayor par de torsión alrededor de la conexión del perno, que debe ser contrarrestada por un par de torsión más grande en la dirección opuesta, debido a un mayor valor de T. Si T aumenta, el componente vertical de **R** disminuye para mantener el equilibrio de fuerza en la dirección vertical. Pero el equilibrio de fuerza en la dirección horizontal requiere de un mayor componente horizontal de **R** para balancear el componente horizontal de la **T** aumentada. Esto sugiere que θ se haga más pequeño, pero es difícil pronosticar qué pasará a R. El Problema 26 permite explorar el comportamiento de R.

Ejemplo 12.4 La escalera inclinada

Una escalera uniforme de longitud ℓ apoya contra una pared lisa y vertical (figura 12.11a). Si la masa de la escalera es m y el coeficiente de fricción estático entre la escalera y el suelo es $\mu_s = 0.40$, encuentre el mínimo ángulo θ_{min} al que la escalera no se resbala.

Solución El diagrama de cuerpo libre que muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre la escalera se ilustra en la figura 12.11b. La fuerza ejercida por el suelo sobre la escalera es la suma vectorial de una fuerza normal **n** y la fuerza de fricción estática $\mathbf{f}_s$. La fuerza de reacción **P** ejercida por la pared sobre la escalera es horizontal porque la pared es sin fricción. Nótese cómo hemos incluido sólo fuerzas que actúan sobre la escalera. Por ejemplo, las fuerzas ejercidas por la escalera sobre el suelo y sobre la pared no son parte del problema, por lo cual no aparecen en el diagrama de cuerpo libre. Al aplicar la primera condición para equilibrio a la escalera, tenemos

$$(1) \qquad \sum F_x = f - P = 0$$

$$(2) \qquad \sum F_y = n - mg = 0$$

Materiał chroniony prawem autorskim

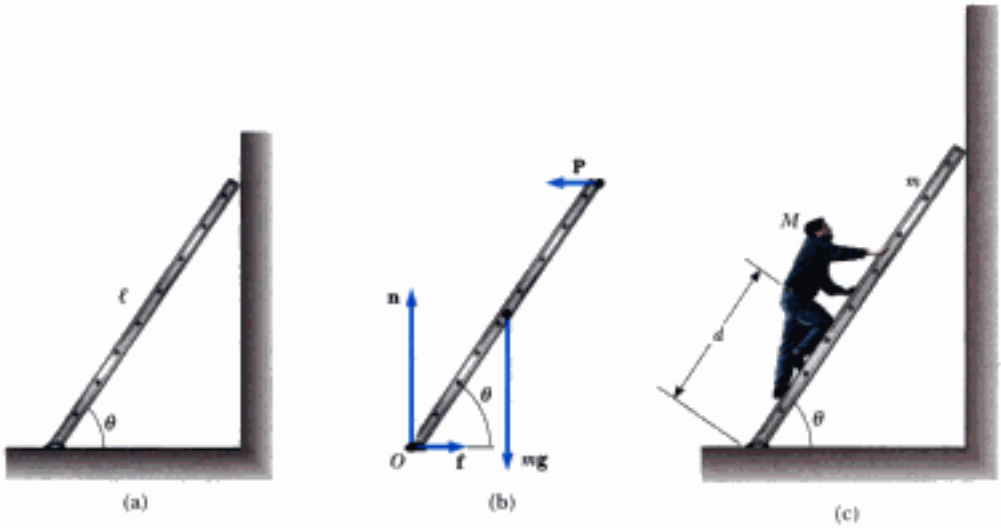


Figura 12.11 (Ejemplo 12.4) Escalera uniforme en reposo, inclinada contra una pared lisa. El suelo es rugoso. (b) Diagrama de cuerpo libre para la escalera. (c) Una persona de masa M empieza a subir por la escalera cuando está a un ángulo mínimo encontrado en la parte (a) del ejemplo. ¿Resbalará la escalera?

La primera ecuación nos dice que $P = f$. De la segunda ecuación vemos que $n = mg$. Además, cuando la escalera está a punto de resbalar, la fuerza de fricción debe ser máxima, lo cual está dado por $f_{s,\,\text{máx}} = \mu_s n$. (Recuerde la ecuación 5.8: $f_s \leq \mu_s n$.) En consecuencia, debemos tener $P = f = \mu_s n = \mu_s mg$.

Para hallar $\theta_{\text{mín}}$, debemos usar la segunda condición para equilibrio. Cuando tomamos los pares de torsión alrededor de un eje que pasa por el origen O en la parte más baja de la escalera, tenemos

$$(3) \qquad \sum \tau_O = P\ell \operatorname{sen}\theta - mg\frac{\ell}{2}\cos\theta = 0$$

12.11c). Las ecuaciones (1) y (2) se pueden escribir también como

$$(4) \qquad \sum F_x = f - P = 0$$

$$(5) \qquad \sum F_y = n - (m + M)g = 0$$

La ecuación (3) se puede rescribir como

$$\sum \tau_O = P\ell \operatorname{sen}\theta - mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - Mgd\cos\theta = 0$$

Si de esta ecuación despejamos tan θ, encontramos

Ejemplo 12.5 Para subir por un borde

(A) Estime la magnitud de la fuerza **F** que una persona debe aplicar a la rueda principal de una silla de ruedas para subir por el borde de una banqueta (figura 12.12a). Esta rueda principal que entra en contacto con el borde tiene un radio r, y la altura del borde es h.

Solución Normalmente, las manos de la persona proporcionan la fuerza necesaria a una rueda ligeramente más pequeña que es concéntrica con la rueda principal. Para mayor sencillez, suponemos que el radio de la rueda más pequeña es igual que el radio de la rueda principal. Estimemos un peso combinado de $mg = 1\,400$ N para la persona y la silla de ruedas y escojamos un radio de rueda de $r = 30$ cm. También escogemos una altura de borde de $h = 10$ cm. Suponemos que la silla de ruedas y el ocupante son simétricos, y que cada rueda soporta un peso de 700 N. Entonces continuamos para analizar sólo una de las ruedas. La figura 12.12b muestra la geometría de una sola rueda.

Cuando la rueda está a punto de subir desde la calle, la fuerza de reacción ejercida por el suelo sobre la rueda en el punto B se va a cero. En consecuencia, en este instante sólo tres fuerzas actúan sobre la rueda, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 12.12c. No obstante, la fuerza **R**, que es la fuerza ejercida por el borde sobre la rueda, actúa en el punto A y por ello si escogemos que nuestro eje de rotación pase por el punto A, no necesitamos incluir **R** en nuestra ecuación de torsión. Del triángulo OAC que se ilustra en la figura 12.12b, vemos que el brazo de momento d de la fuerza gravitacional $m\mathbf{g}$ que actúa sobre la rueda con respecto al punto A es

$$d = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{2rh - h^2}$$

El brazo de momento de **F** con respecto al punto A es $2r - h$ (véase la figura 12.12c). Por lo tanto, el par de torsión neto que actúa sobre la rueda alrededor del punto A es

$$mgd - F(2r - h) = 0$$

$$mg\sqrt{2rh - h^2} - F(2r - h) = 0$$

$$F = \frac{mg\sqrt{2rh - h^2}}{2r - h}$$

$$= \frac{(700\text{ N})\sqrt{2(0.3\text{ m})(0.1\text{ m}) - (0.1\text{ m})^2}}{2(0.3\text{ m}) - 0.1\text{ m}}$$

$$= \mathbf{3 \times 10^2\ N}$$

(Nótese que hemos conservado sólo un dígito como significativo.) Este resultado indica que la fuerza que debe ser aplicada a cada rueda es considerable. Por comparación, el lector puede estimar la fuerza necesaria para hacer rodar una silla de ruedas por una rampa de acceso de una banqueta común y corriente.

(A) Determine la magnitud y dirección de **R.**

Solución Usamos la primera condición de equilibrio para determinar la dirección:

$$\sum F_x = F - R\cos\theta = 0$$

$$\sum F_y = R\,\text{sen}\,\theta - mg = 0$$

Al dividir la segunda ecuación entre la primera tendremos

$$\tan\theta = \frac{mg}{F} = \frac{700\text{ N}}{300\text{ N}}$$

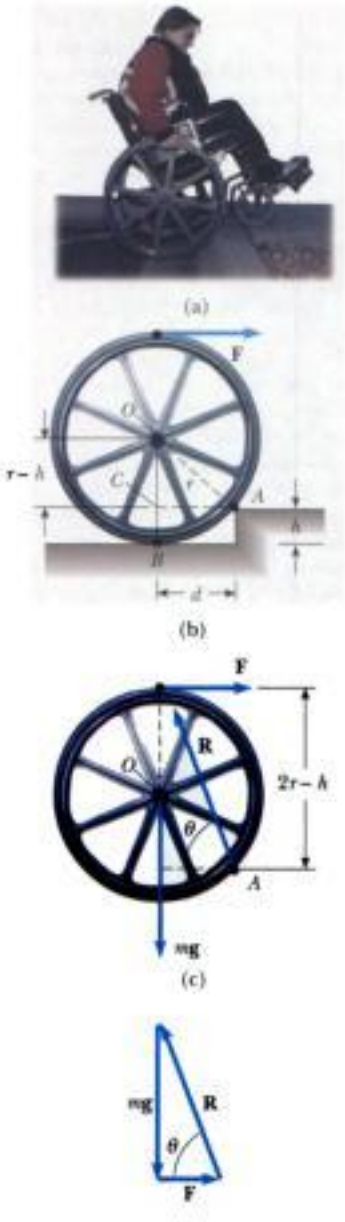


Figura 12.12 (Ejemplo 12.5) (a) Una persona en una silla de ruedas trata de subir por el borde de una banqueta. (b) Detalles de la rueda y el borde. La persona aplica una fuerza **F** en la parte superior de la rueda. (c) Diagrama de cuerpo libre para la rueda cuando está a punto de subir. Tres fuerzas actúan sobre la rueda en este instante: **F**, que es ejercida por la mano; **R**, que es ejercida por el borde; y la fuerza gravitacional $m\mathbf{g}$. (d) La suma vectorial de las tres fuerzas externas que actúan sobre la rueda es cero.

$$\theta = \mathbf{70°}$$

Podemos usar el triángulo recto que se ve en la figura 12.12d para obtener R:

$$R = \sqrt{(mg)^2 + F^2} = \sqrt{(700\text{ N})^2 + (300\text{ N})^2} = \mathbf{800\ N}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Aplicación Análisis de un armazón

Techos, puentes y otras estructuras que deben ser fuertes y de peso ligero se hacen a veces de armazones similares a la que se ilustra en la figura 12.13a. Imagine que esta estructura de armazón representa parte de un puente. Para abordar este problema, suponemos que los componentes estructurales están conectados con uniones de pernos. También suponemos que toda la estructura está libre para deslizarse horizontalmente porque apoya sobre pedestales de oscilación en cada extremo, que le permiten moverse de un lado para otro cuando experimenta expansión y contracción térmicas. Suponemos que la masa de la estructura del puente es insignificante en comparación con la carga. En esta situación, la fuerza ejercida por cada una de las barras (tirantes) sobre los pernos de bisagra es una fuerza de tensión o de compresión y debe ser a todo lo largo de la barra. Calculemos la fuerza en cada tirante cuando el puente está soportando una carga de 7 200 N en su centro. Haremos esto si determinamos las fuerzas que actúan en los pernos.

La notación de fuerza que usamos aquí no es de nuestro formato acostumbrado. Hasta ahora, hemos empleado la notación F_{AB} para querer decir "la fuerza ejercida por A sobre B." Para esta aplicación, sin embargo, la primera letra en un subíndice de doble letra en la F indica la ubicación del perno sobre el cual se ejerce la fuerza. La combinación de dos letras identifica el tirante que ejerce la fuerza sobre el perno. Por ejemplo, en la figura 12.13b, F_{AB} es la fuerza ejercida por el tirante AB sobre el perno en A. Los subíndices son simétricos en que el tirante AB es el mismo que BA y $F_{AB} = F_{BA}$.

Primero, aplicamos la segunda ley de Newton a la armazón en su conjunto en la dirección vertical. Fuerzas internas no entran en este cálculo. Equilibramos el peso de la carga con las fuerzas normales ejercidas en los dos extremos por los soportes sobre los que apoya el puente:

$$\sum F_y = n_A + n_E - F_g = 0$$

$$n_A + n_E = 7\,200 \text{ N}$$

A continuación, calculamos el par de torsión alrededor de A, tomando nota que la longitud total de la estructura del puente es $L = 50$ m:

$$\sum \tau = L n_E - (L/2) F_g = 0$$

$$n_E = F_g/2 = 3\,600 \text{ N}$$

Aun cuando podríamos repetir el cálculo de par de torsión para el extremo derecho (punto E), debe quedar claro, a partir de argumentos de simetría, que $n_A = 3\,600$ N.

Ahora equilibremos las fuerzas verticales que actúan sobre el perno en el punto A. Si suponemos que el tirante AB está en compresión, entonces la fuerza F_{AB} que el tirante ejerce sobre el perno en el punto A tiene un componente y negativo. (Si el tirante está realmente en tensión, nuestros cálculos resultarán en un valor negativo para la magnitud de la fuerza, todavía del tamaño correcto):

$$\sum F_y = n_A - F_{AB} \operatorname{sen} 30° = 0$$

$$F_{AB} = 7\,200 \text{ N}$$

El resultado positivo muestra que nuestra suposición de compresión era correcta.

Ahora podemos hallar la fuerza F_{AC} si consideramos las fuerzas horizontales que actúan sobre el perno en el punto A. Debido a que el punto A no está acelerando, podemos con seguridad suponer que F_{AC} debe apuntar hacia la derecha (figura 12.13b); esto indica que la barra entre los puntos A y C está bajo tensión:

$$\sum F_x = F_{AC} - F_{AB} \cos 30° = 0$$

$$F_{AC} = (7\,200 \text{ N}) \cos 30° = 6\,200 \text{ N}$$

Ahora considere las fuerzas verticales que actúan sobre el perno en el punto C. Supondremos que el tirante CB está en tensión. (Imagine el subsiguiente movimiento del perno en el

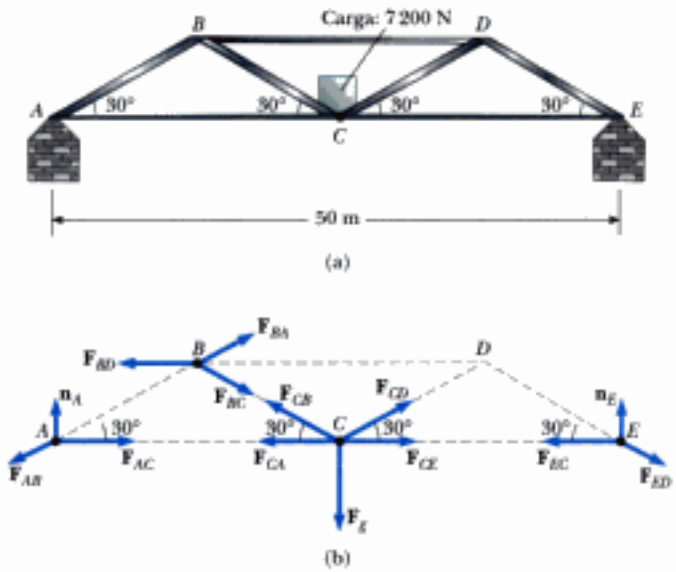


Figura 12.13 (a) Estructura de armazón para un puente. (b) Fuerzas que actúan sobre los pernos en los puntos A, B, C y E. Los vectores de fuerza no están a escala.

Materiał chroniony prawem autorskim

punto C si el tirante CB se rompiera de pronto.) Con base en la simetría, expresamos que $F_{CB} = F_{CD}$ y $F_{CA} = F_{CE}$:

$$\sum F_y = 2\,F_{CB}\,\text{sen}\,30° - 7\,200\text{ N} = 0$$

$$F_{CB} = 7\,200\text{ N}$$

Por último, balanceamos las fuerzas horizontales sobre B, suponiendo que el tirante BD está en compresión:

$$\sum F_x = F_{BA}\cos 30° + F_{BC}\cos 30° - F_{BD} = 0$$

$$(7\,200\text{ N})\cos 30° + (7\,200\text{ N})\cos 30° - F_{BD} = 0$$

$$F_{BD} = 12\,000\text{ N}$$

En consecuencia, la barra superior del puente de este diseño debe ser muy fuerte.

12.4 Propiedades elásticas de sólidos

Excepto por nuestro estudio acerca de resortes en capítulos anteriores, hemos supuesto que los objetos permanecen rígidos cuando sobre ellos actúan fuerzas externas. En realidad, todos los objetos son deformables, es decir, es posible cambiar la forma o el tamaño (o ambos) de un cuerpo si se le aplican fuerzas externas. Cuando estos cambios tienen lugar, no obstante, fuerzas internas dentro del cuerpo resisten la deformación.

Estudiaremos la deformación de sólidos en términos de los conceptos de *esfuerzo* y *deformación* unitaria. **Esfuerzo** es una cantidad que es proporcional a la fuerza que causa una deformación; más específicamente, un esfuerzo es la fuerza externa que actúa sobre un cuerpo por unidad de área de sección transversal. El resultado de un esfuerzo es una **deformación unitaria,** que es una medida del grado de deformación. Se encuentra que, para esfuerzos suficientemente pequeños, **la deformación es proporcional al esfuerzo;** la constante de proporcionalidad depende del material que se deforme y de la naturaleza de la deformación. A esta constante de proporcionalidad se da el nombre de **coeficiente de elasticidad.** El coeficiente de elasticidad se define, por lo tanto, como la razón entre el esfuerzo y la deformación resultante:

$$\text{Coeficiente de elasticidad} = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación unitaria}} \tag{12.5}$$

El coeficiente de elasticidad en general relaciona lo que se hace a un cuerpo sólido (se aplica una fuerza) con la forma en que el cuerpo responde (se deforma en alguna medida).

Consideramos tres tipos de deformación y definimos un coeficiente de elasticidad para cada uno:

1. **Módulo de elasticidad,** que mide la resistencia de un sólido a cambiar en su longitud.
2. **Coeficiente de rigidez,** que mide la resistencia al movimiento de los planos dentro de un sólido, paralelos entre ellos.
3. **Módulo de volumen,** que mide la resistencia de sólidos o líquidos a cambios en sus volúmenes.

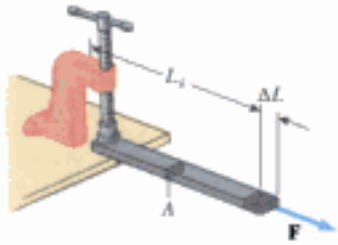


Figura activa 12.14 Una barra más larga sujeta en un extremo se alarga una cantidad ΔL bajo la acción de una fuerza F.

En el vínculo **Active Figures** *en* http://www.pse6.com, *usted podrá ajustar* **los valores de la fuerza** *aplicada* **y el módulo de** *elasticidad* **(también llamado módulo** *de* **Young), para observar el** *cambio en* **longitud de la barra.**

Módulo de elasticidad: elasticidad en longitud

Considere una barra larga de área A de sección transversal y longitud inicial L_i que está sujeta en un extremo, como en la figura 12.14. Cuando una fuerza externa se aplica perpendicular a la sección transversal, fuerzas internas de la barra se resisten a la distorsión ("estiramiento"), pero la barra alcanza una situación de equilibrio en la que su longitud final L_f es mayor que L_i y en la que la fuerza externa está equilibrada exactamente por fuerzas internas. En esta situación, se dice que la barra está sometida a esfuerzo. Definimos la **resistencia a la tensión** como la razón entre la magnitud de la fuerza externa F y el área A de sección transversal. La **deformación por tensión** en este caso se define como la razón entre el cambio en longitud ΔL y la longitud original L_i. Definimos el **coeficiente de elasticidad** por una combinación de estas dos razones:

$$Y = \frac{\text{resistencia a la tensión}}{\text{deformación por tensión}} = \frac{F/A}{\Delta L/L_i} \tag{12.6}$$

Coeficiente de elasticidad

Materiał chroniony prawem autorskim

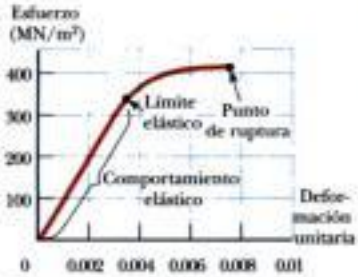


Figura 12.15 Curva de esfuerzo contra deformación para un sólido elástico.

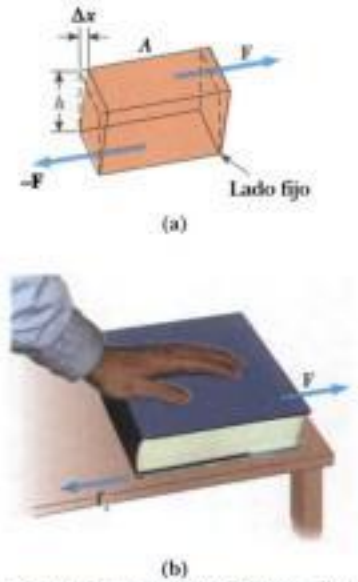


Figura activa 12.16 (a) Deformación al corte en la que un bloque rectangular es distorsionado por dos fuerzas de igual magnitud pero de direcciones opuestas aplicadas a dos caras paralelas. (b) Libro bajo esfuerzo cortante.

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, usted podrá ajustar los valores de la fuerza aplicada y el coeficiente de rigidez para observar el cambio en forma del bloque de la parte (a).

Tabla 12.1

Valores típicos para coeficientes de elasticidad

Sustancia	Coeficiente de elasticidad (N/m^2)	Coeficiente de rigidez (N/m^2)	Módulo de volumen (N/m^2)
Tungsteno	35×10^{10}	14×10^{10}	20×10^{10}
Acero	20×10^{10}	8.4×10^{10}	6×10^{10}
Cobre	11×10^{10}	4.2×10^{10}	14×10^{10}
Latón	9.1×10^{10}	3.5×10^{10}	6.1×10^{10}
Aluminio	7.0×10^{10}	2.5×10^{10}	7.0×10^{10}
Vidrio	$6.5–7.8 \times 10^{10}$	$2.6–3.2 \times 10^{10}$	$5.0–5.5 \times 10^{10}$
Cuarzo	5.6×10^{10}	2.6×10^{10}	2.7×10^{10}
Agua	—	—	0.21×10^{10}
Mercurio	—	—	2.8×10^{10}

El módulo de elasticidad suele emplearse para caracterizar una barra o alambre sometidos a esfuerzo, ya sea bajo tensión o a compresión. Nótese que debido a que la deformación es una cantidad sin dimensiones, Y tiene unidades de fuerza por unidad de área. En la tabla 12.1 se dan valores típicos. Experimentos realizados demuestran (a) que para una fuerza aplicada fija, el cambio en longitud es proporcional a la longitud original y (b) que la fuerza necesaria para producir una deformación unitaria dada es proporcional al área de sección transversal. Estas dos observaciones están en conformidad con la ecuación 12.6.

Para esfuerzos relativamente pequeños, la barra regresará a su longitud original cuando la fuerza se retire. El **límite elástico** de una sustancia se define como el máximo esfuerzo que puede aplicarse a la sustancia antes que ésta se deforme de modo permanente y no regrese a su longitud inicial. Es posible exceder el límite elástico de una sustancia si se aplica un esfuerzo suficientemente grande, como se ve en la figura 12.15. Inicialmente, una curva de esfuerzo contra deformación unitaria es una recta. Cuando aumenta el esfuerzo, sin embargo, la curva ya no es una recta. Cuando el esfuerzo excede del límite elástico, el cuerpo se distorsiona permanentemente y no regresa a su forma original después de retirar el esfuerzo. Cuando el esfuerzo se aumenta aún más, el material finalmente se rompe.

Coeficiente de rigidez: elasticidad de forma

Otro tipo de deformación se presenta cuando un cuerpo se somete a una fuerza paralela a una de sus caras, mientras que la cara opuesta es mantenida fija por otra fuerza (figura 12.16a). El esfuerzo en este caso se denomina esfuerzo cortante. Si el cuerpo es originalmente un bloque rectangular, un esfuerzo cortante resulta en una forma cuya sección transversal es un paralelogramo. Un libro empujado a los lados, como se ve en la figura 12.16b, es un ejemplo de un cuerpo sometido a esfuerzo cortante. Para una primera aproximación (para pequeñas distorsiones), no hay cambio en volumen con esta deformación.

Definimos el **esfuerzo cortante** como F/A, la razón entre la fuerza tangencial y el área A de la cara que se somete a esfuerzo cortante. La **deformación por esfuerzo cortante** se define como la razón $\Delta x/h$, donde Δx es la distancia horizontal en que se mueve la cara sometida a esfuerzo cortante y h es la altura del cuerpo. En términos de estas cantidades, el **coeficiente de rigidez** es

Coeficiente de rigidez

$$S = \frac{\text{esfuerzo cortante}}{\text{deformación por esfuerzo cortante}} = \frac{F/A}{\Delta x/h} \tag{12.7}$$

En la tabla 12.1 se dan valores para el coeficiente de rigidez para algunos materiales representativos. Al igual que el coeficiente de elasticidad, la unidad del coeficiente de rigidez es la razón entre la unidad de fuerza y la unidad de área.

Módulo de volumen: elasticidad de volumen

El módulo de volumen caracteriza la respuesta de un cuerpo a cambios en una fuerza de magnitud uniforme aplicada perpendicularmente sobre toda la superficie del cuerpo, co-

Materiał chroniony prawem autorskim

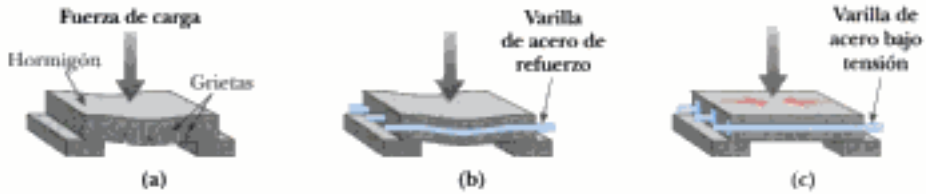


Figura activa 12.18 (a) Una losa de hormigón sin refuerzo tiende a fracturarse bajo una pesada carga. (b) La resistencia del hormigón aumenta si se usan varillas de acero de refuerzo. (c) El hormigón se refuerza aún más al pretensarlo con varillas de acero bajo tensión.

Normalmente el hormigón es muy quebradizo cuando se vacía en secciones delgadas. En consecuencia, las losas de hormigón tienden a pandearse y agrietarse en lugares no soportados, como se ve en la figura 12.18a. La loza se puede reforzar si se usan varillas de acero para reforzar el hormigón, como se ve en la figura 12.18b. Debido a que el hormigón es mucho más fuerte bajo compresión (apretarlo) que bajo tensión (estirarlo) o corte, columnas verticales de hormigón pueden soportar cargas muy pesadas, mientras que vigas horizontales de hormigón tienden a pandearse y agrietarse. No obstante, se logra un aumento considerable en resistencia al corte si el hormigón reforzado es pretensado, como se ve en la figura 12.18c. Al vaciar el concreto, las varillas de acero se mantienen bajo tensión por medio de fuerzas externas. Éstas se sueltan después que el hormigón se solidifica, lo cual resulta en una tensión permanente en el acero y por lo tanto en un esfuerzo de compresión en el hormigón. Esto hace posible que la losa de hormigón soporte una carga mucho mayor.

Ejemplo 12.6 Diseño de un escenario

Recordemos el ejemplo 8.4, en donde analizamos un cable empleado para sostener un actor cuando cuelga sobre un escenario. Suponga que la tensión en el cable es 940 N cuando el actor llega al punto más bajo. ¿Qué diámetro debe tener un alambre de acero de 10 m de largo si no deseamos que se estire más de 0.5 cm bajo estas condiciones?

Solución De la definición del módulo de elasticidad, podemos despejar el área de sección pedida. Si suponemos que la sección es circular, podemos determinar el diámetro del alambre. De la ecuación 12.6, tenemos

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L_i}$$

$$A = \frac{FL_i}{Y\Delta L} = \frac{(940\ \text{N})(10\ \text{m})}{(20 \times 10^{10}\ \text{N/m}^2)(0.005\ \text{m})}$$

$$= 9.4 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$

Como $A = \pi r^2$, el radio del alambre se puede hallar de

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{9.4 \times 10^{-6}\ \text{m}^2}{\pi}} = 1.7 \times 10^{-3}\ \text{m} = 1.7\ \text{mm}$$

$$d = 2r = 2(1.7\ \text{mm}) = \mathbf{3.4\ mm}$$

Para obtener un gran margen de seguridad, probablemente usaríamos un cable flexible hecho de numerosos alambres más pequeños que tienen un área de sección transversal total mayor que nuestro valor calculado.

Ejemplo 12.7 Compresión de una esfera de bronce

Una esfera de bronce macizo está inicialmente rodeada de aire, y la presión de aire ejercida sobre ella es $1.0 \times 10^5\ \text{N/m}^2$ (presión atmosférica normal). La esfera se hace bajar en el océano a una profundidad donde la presión es $2.0 \times 10^7\ \text{N/m}^2$. El volumen de la esfera en aire es $0.50\ \text{m}^3$. ¿Cuánto cambia este volumen una vez que la esfera se sumerge?

Solución De la definición de módulo de volumen, tenemos

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V_i}$$

$$\Delta V = -\frac{V_i \Delta P}{B}$$

Sustituyendo los valores numéricos, obtenemos

$$\Delta V = -\frac{(0.50\ \text{m}^3)(2.0 \times 10^7\ \text{N/m}^2 - 1.0 \times 10^5\ \text{N/m}^2)}{6.1 \times 10^{10}\ \text{N/m}^2}$$

$$= \mathbf{-1.6 \times 10^{-4}\ m^3}$$

El signo negativo indica que el volumen de la esfera decrece.

Materiał chroniony prawem autorskim

RESUMEN

Un cuerpo rígido está en **equilibrio** si y sólo si **la fuerza externa resultante que actúa sobre él es cero y el par de torsión externo resultante sobre él es cero alrededor de cualquier eje:**

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \tag{12.1}$$

$$\Sigma \boldsymbol{\tau} = 0 \tag{12.2}$$

La primera condición es para equilibrio de traslación, y la segunda es para equilibrio de rotación. Estas dos ecuaciones permiten analizar una gran variedad de problemas. Asegúrese de identificar fuerzas no ambiguas, crear un diagrama de cuerpo libre y luego aplicar las ecuaciones 12.1 y 12.2 y despejar las incógnitas.

La fuerza gravitacional ejercida sobre un cuerpo puede considerarse como que actúa en un solo punto llamado **centro de gravedad.** El centro de gravedad de un cuerpo coincide con su centro de masa si el cuerpo está en un campo gravitacional uniforme.

Podemos describir las propiedades elásticas de una sustancia si usamos los conceptos de esfuerzo y deformación unitaria. **Esfuerzo** es una cantidad proporcional a la fuerza que produce una deformación; **deformación unitaria** es una medida del grado de deformación. La deformación unitaria es proporcional al esfuerzo, y la constante de proporcionalidad es el **coeficiente de elasticidad:**

$$\text{Coeficiente de elasticidad} = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación unitaria}} \tag{12.5}$$

Tres tipos comunes de deformación están representados por (1) la resistencia de un sólido al alargamiento bajo una carga, caracterizada por el **módulo de elasticidad** Y; (2) la resistencia de un sólido al movimiento de planos internos que se deslizan entre sí, caracterizada por el **coeficiente de rigidez** S y (3) la resistencia de un sólido o líquido a un cambio de volumen, caracterizada por el **módulo de volumen** B.

PREGUNTAS

1. Póngase de pie de espaldas a una pared. ¿Por qué no puede poner sus talones firmemente contra la pared y luego doblarse hacia delante sin caer?
2. ¿Puede un cuerpo estar en equilibrio si está en movimiento? Explique.
3. ¿Puede un objeto estar en equilibrio cuando sólo una fuerza actúa sobre él? Si el lector piensa que la respuesta es afirmativa, dé un ejemplo para apoyar su conclusión.
4. (a). Dé un ejemplo en el que la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es cero, pero el par de torsión neto no es cero. (b) Dé un ejemplo en el que el par de torsión neto que actúa sobre un cuerpo es cero, pero la fuerza neta es diferente de cero.
5. ¿Puede un cuerpo estar en equilibrio si los únicos pares de torsión que actúan sobre él producen rotación en el sentido de las manecillas de un reloj?
6. Si usted mide que la fuerza neta y el par de torsión neto sobre un sistema son cero, (a) ¿podría el sistema estar girando con respecto a usted? (b) podría estar en traslación con respecto a usted?
7. El centro de gravedad de un cuerpo puede estar situado fuera del cuerpo. Dé unos pocos ejemplos donde éste es el caso.
8. Suponga que usted recibe una pieza de madera de forma arbitraria, junto con un martillo, clavo y plomada. ¿Cómo podría usar estos objetos para ubicar el centro de gravedad de la pieza de madera? *Sugerencia:* Use el clavo para colgar la pieza.
9. Para que una silla esté balanceada en una pata, ¿dónde debe estar situado el centro de gravedad de la silla?
10. Una muchacha tiene un perro grande y dócil al que desea pesar en una pequeña báscula de baño. Cree que ella puede determinar el peso de su perro con el siguiente método: primero pone las dos patas delanteras del perro sobre la báscula y registra la lectura de ésta. Luego pone las dos patas traseras del perro sobre la báscula y registra la lectura de ésta. Ella piensa que la suma de las dos lecturas será el peso del perro. ¿Tiene razón? Explique su respuesta.
11. Un caja alta y una caja corta de igual masa se colocan una al lado de la otra en un plano inclinado, sin tocarse. Cuando se aumenta el ángulo del plano inclinado, ¿cuál caja bajará primero? Explique.
12. Una escalera está apoyada en el suelo, inclinada contra una pared. ¿Se sentiría usted más seguro al subir por la escalera si le informaran que el suelo es sin fricción pero que la pared es rugosa, o que la pared es sin fricción pero que el suelo es rugoso? Justifique su respuesta.
13. Cuando usted levanta un objeto pesado, se recomienda mantenga la espalda tan vertical como sea posible, levantándose con las rodillas. ¿Por qué es mejor que doblarse y levantarse de la cintura?
14. ¿Qué clase de deformación exhibe un cubo de gelatina cuando se menea?
15. Es frecuente que antiguos templos griegos tengan columnas verticales intactas, pero pocas losas horizontales de piedra están todavía en su lugar. ¿Puede dar una razón para esto?

Materiał chroniony prawem autorskim

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, difícil = solución guiada con sugerencias disponibles en http://www.pse6.com

= use computadora para resolver el problema = problemas numéricos y simbólicos por pares

Sección 12.1 Condiciones de equilibrio

1. Un jugador de béisbol toma un bat de 36 onzas (peso = 10.0 N) con una mano en el punto O (figura P12.1). El bat está en equilibrio. El peso del bat actúa a lo largo de una recta de 60.0 cm a la derecha de O. Determine la fuerza y el par de torsión ejercidos por el jugador sobre el bat alrededor de un eje que pasa por O.

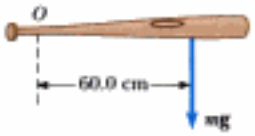


Figura P12.1

2. Escriba las condiciones necesarias para equilibrio del cuerpo que se muestra en la figura P12.2. Tome el origen de la ecuación del par de torsión en el punto O.

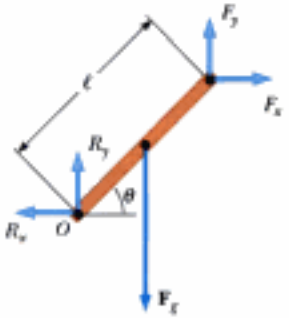


Figura P12.2

3. Una viga uniforme de masa m_b y longitud ℓ sostiene bloques con masas m_1 y m_2 en dos posiciones, como se ve en la figura P12.3. La viga se apoya sobre dos filos de cuchillos. ¿Para qué valor de x estará balanceada la viga en P tal que la fuerza normal en O es cero?

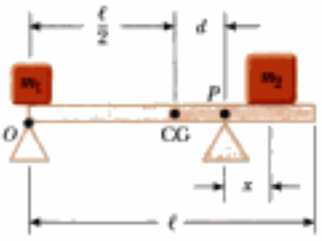


Figura P12.3

Sección 12.2 Más sobre el centro de gravedad

Los problemas 38, 39, 41, 43 y 44 del capítulo 9 de este volumen también se pueden asignar con esta sección.

4. Una pizza circular de radio R tiene una pieza circular de radio $R/2$ removida de un lado, como se muestra en la figura P12.4. El centro de gravedad se ha cambiado de C a C' a lo largo del eje x. Demuestre que la distancia de C a C' es $R/6$. Suponga que el grosor y densidad de la pizza son uniformes en toda la pieza.

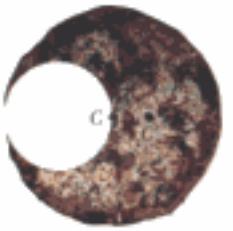


Figura P12.4

5. Una escuadra de carpintero tiene la forma de una L, como en la figura P12.5. Localice su centro de gravedad.

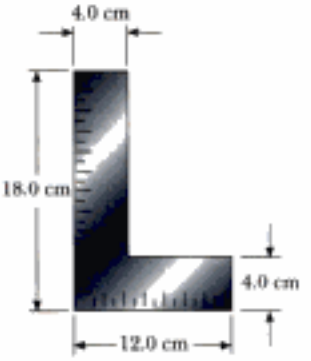


Figura P12.5

6. Pat construye una pista de madera para su auto modelo, como en la figura P12.6. La pista mide 5.00 cm de ancho, 1.00 m de alto y

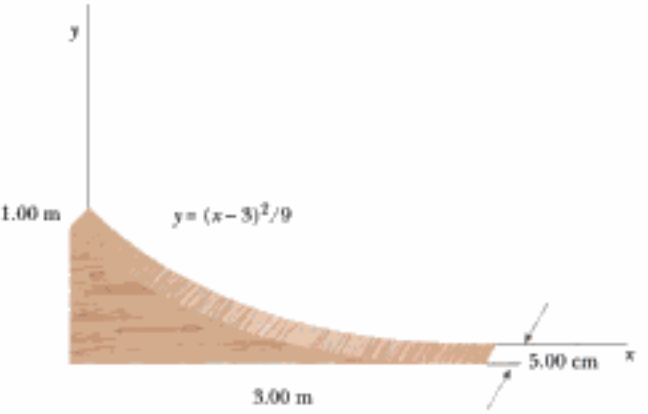


Figura P12.6

Materiał chroniony prawem autorskim

14. Una escalera uniforme de longitud L y masa m_1 se apoya contra una pared sin fricción. La escalera forma un ángulo θ con la horizontal. (a) Encuentre las fuerzas horizontal y vertical que el suelo ejerce sobre la base de la escalera cuando un bombero de masa m_2 está a una distancia x de la base. (b) Si la escalera está a punto de resbalar cuando el bombero está a una distancia d de la base, ¿cuál es el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el suelo?

15. La figura P12.15 muestra un martillo de uña que se emplea para sacar un clavo de una tabla horizontal. Si se ejerce una fuerza de 150 N horizontalmente, como se muestra, encuentre (a) la fuerza ejercida por las uñas del martillo sobre el clavo y (b) la fuerza ejercida por la superficie sobre el punto de contacto en la cabeza del martillo. Suponga que la fuerza que el martillo ejerce sobre el clavo es paralela al clavo.

Figura P12.15

16. Un tablón uniforme de 6.00 m de largo y 30.0 kilos de masa se apoya horizontalmente entre las dos barras horizontales de un andamio. Las barras están a 4.50 m una de otra, y 1.50 m del tablón sobresalen a un lado del andamio. Trace un diagrama de cuerpo libre del tablón. ¿Cuánto puede caminar un pintor de 70.0 kilos de masa sobre la parte sobresaliente del tablón antes que éste se incline?

17. Un automóvil de 1 500 kilos tiene una distancia entre ejes de 3.00 m. El centro de masa del automóvil está sobre la línea del centro en un punto a 1.20 m detrás del eje delantero. Encuentre la fuerza ejercida por el suelo sobre cada rueda.

18. Un poste vertical de sección transversal cuadrada mide 10.0 m de alto. Su extremo inferior está encerrado en una base de 1.50 m de alto, que es precisamente cuadrada pero ligeramente floja. Una fuerza de 5.50 N a la derecha actúa sobre el extremo superior del poste. La base mantiene el poste en equilibrio. Encuentre la fuerza que la parte superior de la pared del lado derecho de la base ejerce sobre el poste. Encuentre la fuerza que la parte inferior de la pared del lado izquierdo de la base ejerce sobre el poste.

19. Una cadena flexible que pesa 40.0 N, cuelga entre dos ganchos situados a la misma altura (figura P12.19). En cada gancho, la tangente a la cadena forma un ángulo $\theta = 42.0°$ con la horizontal.

Figura P12.19

Encuentre (a) la magnitud de la fuerza que cada gancho ejerce sobre la cadena y (b) la tensión de la cadena en su punto medio. (*Sugerencia:* Para la parte (b), haga un diagrama de cuerpo libre para la mitad de la cadena.)

20. El caballero Lost-a-Lot se pone su armadura y sale del castillo en su leal caballo en su búsqueda por mejorar la comunicación entre damiselas y dragones (figura P12.20). Desafortunadamente, su escudero bajó el puente levadizo demasiado y por último lo detuvo a 20.0° abajo de la horizontal. Lost-a-Lot y su caballo se detienen cuando su centro combinado de masa está a 1.00 m del extremo del puente. El puente uniforme mide 8.00 m de largo y tiene una masa de 2 000 kg. El cable de levantamiento está unido al puente a 5.00 m de la bisagra del extremo del castillo, y a un punto de la pared del castillo a 12.0 m sobre el puente. La masa combinada de Lost-a-Lot con su armadura y su caballo es de 1 000 kg. Determine (a) la tensión del cable y (b) los componentes de fuerza horizontal y (c) vertical que actúan sobre el puente en la bisagra.

Figura P12.20 Problemas 20 y 21.

21. **Problema de repaso.** En la situación descrita en el problema 20 e ilustrada en la figura P12.20, el cable de levantamiento se rompe de pronto. La bisagra entre la pared del castillo y el puente es sin fricción, y el puente gira libremente hasta que queda vertical. (a) Encuentre la aceleración angular del puente una vez que empieza a moverse. (b) Encuentre la rapidez angular del puente cuando golpea la pared vertical del castillo abajo de la bisagra. (c) Encuentre la fuerza ejercida por la bisagra sobre el puente inmediatamente después que el cable se rompe. (d) Encuentre la fuerza ejercida por la bisagra sobre el puente inmediatamente antes de golpear la pared del castillo.

22. Esteban está empujando a su hermana Joyce en una carretilla cuando ésta es detenida por un ladrillo de 8.00 cm de alto (figura P12.22). Las agarraderas hacen un ángulo de 15.0° abajo de la

Materiał chroniony prawem autorskim

horizontal. Una fuerza de 400 N es ejercida sobre la rueda, que tiene un radio de 20.0 cm. (a) ¿Qué fuerza debe aplicar Esteban a lo largo de las agarraderas para apenas mover la rueda sobre el ladrillo? (b) ¿Cuál es la fuerza (magnitud y dirección) que el ladrillo ejerce sobre la rueda justo cuando la rueda empieza a levantarse sobre el ladrillo? Suponga en ambas partes que el ladrillo permanece fijo y no se desliza por el suelo.

Figura P12.22

23. Un extremo de una varilla uniforme de 4.00 m de largo y peso F_g está sostenido por un cable. El otro extremo apoya contra la pared, donde es sostenido por fricción, como en la figura P12.23. El coeficiente de fricción estática entre la pared y la varilla es $\mu_s = 0.500$. Determine la distancia mínima x desde el punto A en el que un peso adicional F_g (el mismo que el peso de la varilla) puede colgarse sin hacer que la varilla deslice en el punto A.

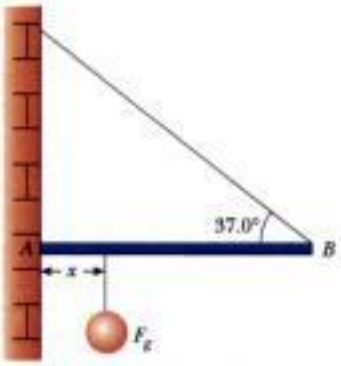


Figura P12.23

24. Dos ladrillos uniformes de longitud L están colocados uno sobre el otro en el borde de una superficie horizontal con máximo saliente posible sin caer, como en la figura P12.24. Encuentre la distancia x.

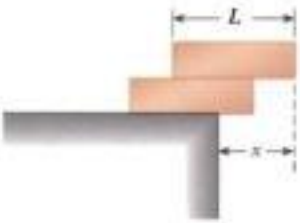


Figura P12.24

25. Una deportista de salto de garrocha sujeta una pértiga de 29.4 N en equilibrio, ejerciendo una fuerza hacia arriba **U** con su mano delantera y una fuerza hacia abajo **D** con su mano trasera, como se ve en la figura P12.25. El punto C es el centro de gravedad de la pértiga. ¿Cuáles son las magnitudes de **U** y **D**?

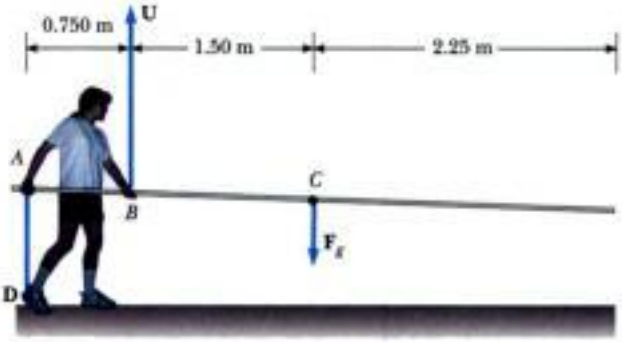


Figura P12.25

26. En la sección **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 12.3, representamos por x la distancia en metros entre la persona y la bisagra del extremo izquierdo de la viga. (a) Demuestre que la tensión del cable en newtons está dada por $T = 93.9x + 125$. Explique que T aumenta cuando x aumenta. (b) Demuestre que el ángulo de dirección θ de la fuerza de la bisagra está descrito por

$$\tan\theta = \left(\frac{32}{3x+4} - 1\right)\tan 53.0°$$

¿Cómo cambia θ cuando x aumenta? (c) Demuestre que la magnitud de la fuerza de la bisagra está dada por

$$R = \sqrt{8.82 \times 10^3 x^2 - 9.65 \times 10^4 x + 4.96 \times 10^5}$$

¿Cómo cambia R cuando x aumenta?

Sección 12.4 Propiedades elásticas de sólidos

27. Una carga de 200 kg se cuelga de un alambre que tiene una longitud de 4.00 m y área de sección transversal de 0.200×10^{-4} m^2 y un módulo de Young de 8×10^{10} N/m^2 ¿Cuál es el aumento en longitud?

28. Suponga que el módulo de elasticidad es 1.50×10^{10} N/m^2 para hueso y que un hueso se fractura si se le aplica un esfuerzo mayor a 1.50×10^8 N/m^2. (a) ¿Cuál es la máxima fuerza que puede ser ejercida sobre el fémur de la pierna si tiene un diámetro efectivo mínimo de 2.50 cm? (b) Si esta fuerza se aplica en compresión, ¿cuánto se acorta un hueso de 25.0 cm de largo?

29. Evalúe el módulo de elasticidad para el material cuya curva de esfuerzo contra deformación unitaria se muestra en la figura 12.15.

30. Un alambre de acero de 1 mm de diámetro puede soportar una tensión de 0.2 kN. Un cable para soportar una tensión de 20 kN ¿debe tener un diámetro de qué orden de magnitud?

31. Un niño se desliza por un piso en un par de zapatos con suela de hule. La fuerza de fricción que actúa sobre cada pie es de 20.0 N.

Materiał chroniony prawem autorskim

El área de la huella de cada suela es de 14.0 cm^2, y el grosor de cada suela es 5.00 mm. Encuentre la distancia horizontal por la cual las superficies superior e inferior de cada suela están descentradas. El coeficiente de rigidez del hule es 3.00 MN/m^2.

32. **Problema de repaso.** Un martillo de 30.0 kg golpea un clavo de acero de vía de 2.30 cm de diámetro cuando se mueve con una rapidez de 20.0 m/s. El martillo rebota con una rapidez de 10.0 m/s después de 0.110 s. ¿Cuál es el promedio de deformación unitaria en el clavo durante el impacto?

33. Si el esfuerzo cortante en acero excede de 4.00×10^8 N/m^2, el acero se rompe. Determine la fuerza de corte necesaria para (a) cortar un tornillo de acero de 1.00 cm de diámetro y (b) perforar un agujero de 1.00 cm de diámetro en una placa de acero de 0.500 cm de grueso.

34. **Problema de repaso.** Un alambre cilíndrico de acero de 2.00 m de largo con un diámetro de sección transversal de 4.00 mm se coloca sobre una polea ligera sin fricción, con un extremo del alambre conectado a un cuerpo de 5.00 kg y el otro extremo conectado a un cuerpo de 3.00 kg. ¿Cuánto se estira el alambre cuando los cuerpos están en movimiento?

35. Cuando el agua se congela, se dilata en alrededor del 9.00%. ¿Qué aumento de presión ocurriría dentro del bloque del motor de un automóvil si se congela el agua que está en su interior? (El módulo de volumen del hielo es de 2.00×10^9 N/m^2.)

36. El punto más profundo de los océanos es la Fosa de las Marianas, de unos 11 km de profundidad. La presión a esta profundidad es enorme, de alrededor de 1.13×10^8 N/m^2. (a) Calcule el cambio en el volumen de 1.00 m^3 de agua de mar llevada desde la superficie a este punto más profundo del océano Pacífico. (b) La densidad del agua de mar en la superficie es de 1.03×10^3 kg/m^3. Encuentre su densidad en el fondo. (c) ¿Es buena aproximación considerar el agua como incompresible?

37. Un pasillo colgante que cruza el lobby de un hotel está sostenido en numerosos puntos, a lo largo de sus bordes, por un cable vertical arriba de cada punto y una columna vertical por abajo. El cable de acero mide 1.27 cm de diámetro y 5.75 m de largo antes de aplicarle carga. La columna de aluminio es un cilindro hueco con diámetro interior de 16.14 cm, un diámetro exterior de 16.24 cm, y una longitud de 3.25 m sin carga. Cuando el pasillo ejerce una fuerza de carga de 8 500 N sobre uno de los puntos de apoyo, ¿cuánto baja el punto?

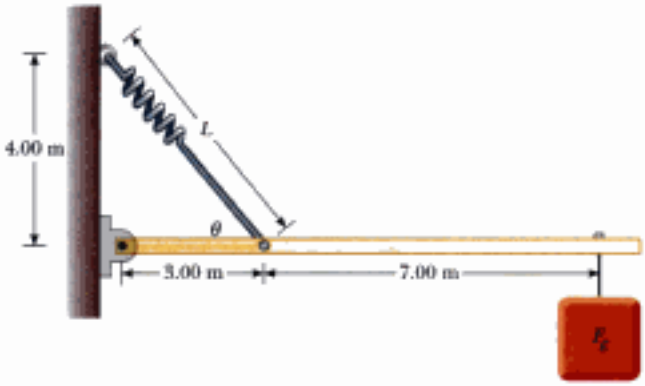


Figura P12.38

39. Un puente de 50.0 m de longitud y 8.00×10^4 kg de masa está sostenido sobre un pilar liso en cada extremo, como se ve en la figura P12.39. Un camión con masa de 3.00×10^4 kg está situado a 15.0 m de un extremo. ¿Cuáles son las fuerzas sobre el puente en los puntos de apoyo?

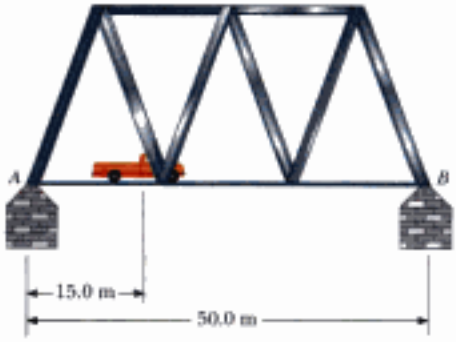


Figura P12.39

Problemas adicionales

38. Una viga rígida de peso ligero, de 10.0 m de largo, está sostenida por un cable unido a un resorte de constante de fuerza k = 8.25 kN/m como en la figura P12.38. Cuando no hay carga sobre la viga ($F_g = 0$), la longitud L es igual a 5.00 m. (a) Encuentre el ángulo θ en esta situación. (b) Ahora se cuelga una carga de F_g = 250 N sobre el extremo de la viga. Temporalmente haga caso omiso de la extensión del resorte y el cambio del ángulo θ. Calcule la tensión del cable con esta aproximación. (c) Utilice la respuesta de la parte (b) para calcular el alargamiento del resorte y un nuevo valor para el ángulo θ. (d) Con el valor de θ de la parte (c), encuentre una segunda aproximación para la tensión del cable. (e) Utilice la respuesta a la parte (d) para calcular valores más precisos para el alargamiento del resorte y el ángulo θ. (f) A una precisión de tres dígitos, ¿cuál es el valor real de θ bajo carga?

40. Consulte la figura 12.18c. Un dintel de hormigón reforzado pretensado mide 1.50 m de largo. El área de sección transversal del hormigón es de 50.0 cm^2. El hormigón encierra una barra de acero de refuerzo de área de sección de 1.50 cm^2. La barra une dos fuertes placas de extremo. El módulo de elasticidad para el hormigón es de 30.0×10^9 N/m^2. Después que el hormigón se solidifica y se suelta la tensión original T_1 de la barra, el hormigón debe estar bajo un esfuerzo de compresión de 8.00×10^6 N/m^2. (a) ¿Qué distancia comprimirá la barra al hormigón cuando la tensión original de la barra se suelte? (b) ¿La barra todavía estará bajo qué tensión T_2? (c) ¿cuánto más larga será entonces la barra que en su longitud sin esfuerzo? (d) Cuando se vacíe el hormigón, ¿qué extensión debe haberse alargado la barra desde su longitud sin esfuerzo? (e) Hállese la tensión T_1 original pedida en la barra.

Materiał chroniony prawem autorskim

dos como una barra horizontal uniforme de 350 N de peso, que hace pivote en la base de la espina. El músculo espinal erector, unido a un punto a dos tercios hacia arriba de la espina dorsal, mantiene la posición de la espalda. El ángulo entre la espina y su músculo es de 12.0°. Encuentre la tensión del músculo de la espalda y la fuerza de compresión de la espina.

52. Una barra uniforme de peso F_g y longitud L está sostenida en sus extremos por un canal sin fricción, como se ve en la figura P12.52. (a) Demuestre que el centro de gravedad de la barra debe estar verticalmente sobre el punto O cuando la barra está en equilibrio. (b) Determine el valor de equilibrio del ángulo θ.

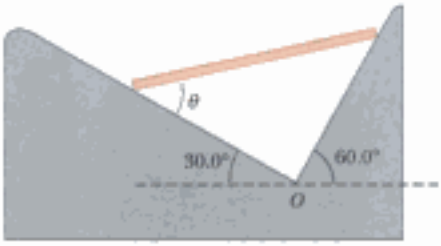


Figura P12.52

53. Una fuerza actúa sobre un armario rectangular que pesa 400 N, como en la figura P12.53. (a) Si el armario se desliza con rapidez constante cuando $F = 200$ N y $h = 0.400$ m, encuentre el coeficiente de fricción cinético y la posición de la fuerza normal resultante. (b) Si $F = 300$ N, encuentre el valor de h para el que el armario apenas empieza a inclinarse.

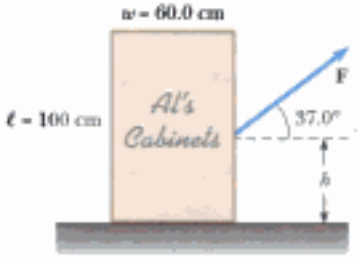


Figura P12.53 Problemas 53 y 54.

54. Considere el armario rectangular del problema 53, pero con una fuerza **F** aplicada horizontalmente en el borde superior. (a) ¿Cuál es la fuerza mínima necesaria para hacer que empiece a inclinar el armario? (b) ¿Cuál es el mínimo coeficiente de fricción estático necesario para que el armario no se deslice con la aplicación de una fuerza de esta magnitud? (c) Encuentre la magnitud y dirección de la mínima fuerza necesaria para inclinar el armario si el punto de aplicación se puede escoger en cualquier parte sobre el armario.

55. Una viga uniforme de masa m está inclinada a un ángulo θ con respecto a la horizontal. Su extremo superior produce un doblez de 90 grados en una cuerda muy gruesa amarrada a la pared, y su extremo inferior apoya sobre un piso rugoso (figura P12.55). (a) Si el coeficiente de fricción estático entre viga y piso es μ_s, determine una expresión para la máxima masa M que se puede colgar de la parte superior antes que la viga resbale. (b) Determine la magnitud de la fuerza de reacción en el piso y la magnitud de la fuerza ejercida por la viga sobre la cuerda en P en términos de m, M y μ_s.

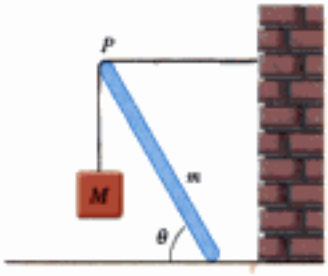


Figura P12.55

56. La figura P12.56 muestra un armazón que sostiene una fuerza hacia abajo de 1 000 N aplicada en el punto B. El armazón tiene peso insignificante. Los pilares en A y B son lisos. (a) Aplique las condiciones de equilibrio para demostrar que $n_A = 366$ N y $n_C = 634$ N. (b) Demuestre que, como las fuerzas actúan sobre el armazón ligero sólo en las articulaciones de bisagra, cada barra del armazón debe ejercer sobre cada perno sólo una fuerza a lo largo de esa barra, una fuerza de tensión o compresión. (c) Encuentre la fuerza de tensión o de compresión en cada una de las tres barras.

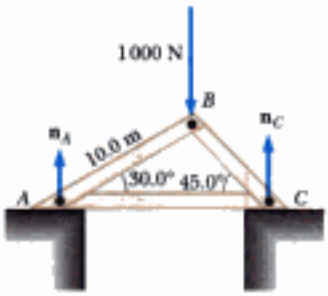


Figura P12.56

57. Una escalera de tijera de peso insignificante está construida como se ve en la figura P12.57. Una pintora de masa 70.0 kg está de pie sobre la escalera a 3.00 m del suelo. Si se supone que el piso es sin fricción, encuentre (a) la tensión de la barra horizontal

Figura P12.57

Materiał chroniony prawem autorskim

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{gRd}{2h}}$$

Para reducir el riesgo de volcadura, ¿debe aumentar o disminuir h? ¿Debe aumentar o disminuir el ancho d de la distancia entre las ruedas?

Respuestas a las *preguntas rápidas*

12.1 (a) Los pares de torsión no balanceados debidos a las fuerzas de la figura 12.2 producen una aceleración angular aun cuando la aceleración lineal sea cero.

12.2 (b) Nótese que las líneas de acción de todas las fuerzas de la figura 12.3 se cruzan en un punto común. Por lo tanto, el par de torsión neto alrededor de este punto es cero. Este valor cero del par de torsión neto es independiente de los valores de las fuerzas. Debido a que ninguna fuerza tiene un componente hacia abajo, hay una fuerza neta y el cuerpo no está en equilibrio de fuerza.

12.3 (b) Tanto el cuerpo como el centro de gravedad de la regla miden 25 cm desde el punto pivote. En consecuencia, la regla y el cuerpo deben tener la misma masa si el sistema está balanceado.

12.4 (b) La fuerza de fricción sobre el bloque cuando se desliza a lo largo de la superficie es paralela a la superficie inferior y hará que el bloque experimente una deformación al corte.

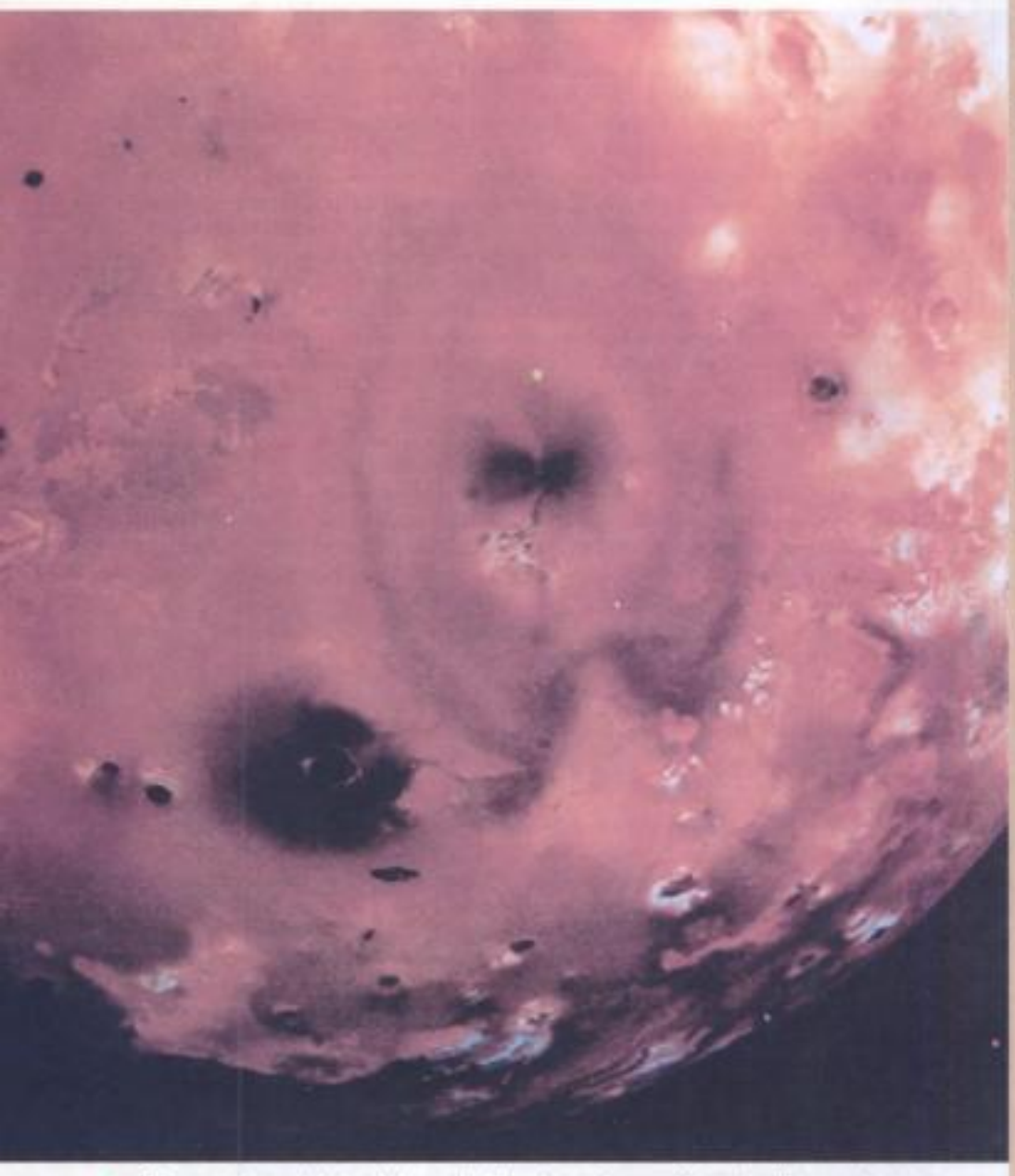
12.5 (a) El estiramiento del alambre debido a la mayor tensión está descrito por el módulo de elasticidad.

12.6 (c) La presión de la atmósfera resulta en una fuerza de magnitud uniforme perpendicular en todos los puntos sobre la superficie de la esfera.

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 13

Gravitación universal



▲ *El conocimiento de la ley de la gravitación universal ha permitido a científicos enviar naves espaciales en viajes de una precisión asombrosa a otras partes de nuestro sistema solar. Esta foto de un volcán de Io, una de las lunas de Júpiter, fue tomada por la nave espacial Galileo, que ha estado en órbita alrededor de Júpiter desde 1995. El material rojo ha sido arrojado desde el interior de esta luna. (Univ. de Arizona/JPL/NASA)*

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

13.1 Ley de Newton de la gravitación universal

13.2 Medición de la constante gravitacional

13.3 Aceleración en caída libre y la fuerza gravitacional

13.4 Leyes de Kepler y el movimiento de planetas

13.5 El campo gravitacional

13.6 Energía potencial gravitacional

13.7 Consideraciones de energía en el movimiento planetario y de satélites

Materiał chroniony prawem autorskim

Antes de 1687, se había reunido gran cantidad de información sobre los movimientos de la Luna y los planetas, pero no había un conocimiento claro de las fuerzas relacionadas con estos movimientos. En ese año, Isaac Newton dio la clave que reveló los secretos de los cielos. Él sabía, por su primera ley, que una fuerza neta tenía que estar actuando sobre la Luna, porque sin esa fuerza la Luna se movería en trayectoria recta en lugar de una órbita casi circular. Newton razonó que esta fuerza era de atracción gravitacional ejercida por la Tierra sobre la Luna. Se dio cuenta que las fuerzas que intervienen en la atracción entre la Tierra y la Luna, y entre el Sol y los planetas, no eran algo especial para estos cuerpos celestes, sino que eran casos particulares de una atracción general y universal entre cuerpos. En otras palabras, vio que la misma fuerza de atracción que hace que la Luna siga su trayectoria alrededor de la Tierra, también hace que una manzana caiga de un árbol. Como él lo dijo, "deduje que las fuerzas que mantienen a los planetas en sus órbitas, deben ser inversamente proporcionales a los cuadrados de sus distancias desde los centros alrededor de los cuales giran; y por eso comparé el requisito de fuerza para mantener la Luna en su órbita con la fuerza de gravedad en la superficie de la Tierra; encontré que correspondían muy bien".

En este capítulo estudiamos la ley de la gravitación universal. Destacamos una descripción de movimiento planetario porque la información astronómica da una importante prueba de la validez de esta ley. A continuación demostramos que las leyes del movimiento planetario creadas por Johannes Kepler se deducen de la ley de la gravitación universal y del concepto de conservación de cantidad de movimiento angular. Concluimos al deducir una expresión general para la energía potencial gravitacional, y examinar las energías del movimiento planetario y de satélites.

13.1 Ley de Newton de la gravitación universal

Es posible que el lector haya escuchado la leyenda de que Newton fue golpeado en la cabeza por una manzana que cayó cuando él dormitaba bajo un árbol. Se supone que este accidente lo inspiró a imaginar que quizá todos los cuerpos en el universo eran atraídos unos a otros en la misma forma que la manzana fue atraída a la Tierra. Newton analizó datos astronómicos sobre el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. De ese análisis, hizo la audaz afirmación de que la ley de fuerza que gobierna el movimiento de planetas *era la misma* que la ley de fuerza que atrajo una manzana que cayó a la Tierra. Ésta fue la primera vez que los movimientos "terrestre" y "celeste" se unificaron. En esta sección veremos los detalles matemáticos del análisis de Newton.

En 1687, Newton publicó su obra de la ley de gravedad en su tratado *Principios Matemáticos de Filosofía Natural.* **La ley de Newton de la gravitación universal,** expresa que

La ley de la gravitación universal

toda partícula del universo atrae a toda otra partícula con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

Materiał chroniony prawem autorskim

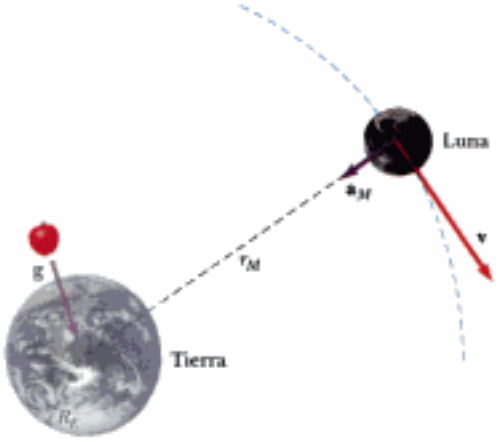


Figura 13.2 Cuando gira alrededor de la Tierra, la Luna experimenta una aceleración centrípeta $\mathbf{a}_M$ dirigida hacia la Tierra. Un objeto cerca de la superficie terrestre, por ejemplo la manzana que aquí vemos, experimenta una aceleración $\mathbf{g}$ (las dimensiones no están a escala).

Por lo tanto, la aceleración centrípeta de la Luna es

$$a_M = (2.75 \times 10^{-4})(9.80\ \text{m/s}^2) = 2.70 \times 10^{-3}\ \text{m/s}^2$$

Newton también calculó la aceleración centrípeta de la Luna a partir de un conocimiento de su distancia media desde la Tierra y el valor conocido de su periodo orbital, $T = 27.32$ días $= 2.36 \times 10^6$ s. En el intervalo T, la Luna se desplaza una distancia $2\pi r_M$, que es igual a la circunferencia de su órbita. Por lo tanto, su rapidez orbital es $2\pi r_M/T$ y su aceleración centrípeta es

$$a_M = \frac{v^2}{r_M} = \frac{(2\pi r_M/T)^2}{r_M} = \frac{4\pi^2 r_M}{T^2} = \frac{4\pi^2(3.84 \times 10^8\ \text{m})}{(2.36 \times 10^6\ \text{s})^2}$$
$$= 2.72 \times 10^{-3}\ \text{m/s}^2$$

La concordancia casi perfecta entre este valor y el valor que Newton obtuvo usando g, da una fuerte evidencia de la naturaleza del inverso del cuadrado de la ley de fuerza gravitacional.

Aun cuando estos resultados deben haber sido más que estimulantes para Newton, tuvo un gran problema por una suposición que hizo en el análisis. Para evaluar la aceleración de un cuerpo en la superficie de la Tierra, Newton trató la Tierra como si su masa estuviera toda concentrada en su centro, es decir, supuso que nuestro planeta actuaba como una partícula en cuanto se refería a su influencia sobre un cuerpo exterior. Varios años después, en 1687, con base en su obra pionera en el desarrollo del cálculo, Newton demostró que esta suposición era válida y era consecuencia natural de la ley de la gravitación universal.

Tenemos evidencia de que la fuerza gravitacional que actúa sobre un cuerpo es directamente proporcional a su masa por nuestras observaciones de cuerpos en caída, estudiadas en el capítulo 2. Todos los cuerpos, cualquiera que sea su masa, caen en ausencia de la resistencia del aire a la misma aceleración g cerca de la superficie terrestre. De acuerdo con la segunda ley de Newton, esta aceleración está dada por $g = F_g/m$, donde m es la masa del cuerpo en caída. Si esta razón ha de ser la misma que para todos los cuerpos en caída, entonces F_g debe ser directamente proporcional a m, de modo que la masa se cancela en la razón. Si consideramos la situación más general de una fuerza gravitacional entre cualesquiera dos cuerpos con masa, por ejemplo dos planetas, este mismo argumento puede aplicarse para demostrar que la fuerza gravitacional es proporcional a una de las masas. Podemos escoger *cualquiera* de las masas en el argumento, y por lo tanto, la fuerza gravitacional debe ser directamente proporcional a *ambas* masas, como se puede ver en la ecuación 13.3.

Pregunta rápida 13.1 La Luna permanece en su órbita alrededor de la Tierra en lugar de caer a la Tierra porque (a) está fuera de la influencia gravitacional de la Tierra (b) está en equilibrio con las fuerzas gravitacionales del Sol y otros planetas (c) la fuerza neta sobre la Luna es cero (d) ninguno de éstos (e) todos éstos.

Materiał chroniony prawem autorskim

Pregunta rápida 13.2 Un planeta tiene dos lunas de igual masa. La luna 1 está en órbita circular de radio r. La luna 2 es una órbita circular de radio $2r$. La magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por el planeta sobre la luna 2 es (a) cuatro veces mayor que sobre la luna 1 (b) el doble que sobre la luna 1 (c) igual a la que actúa sobre la luna 1 (d) la mitad de la que actúa sobre la luna 1 (e) la cuarta parte de la que actúa sobre la luna 1.

Ejemplo 13.1 ¿Quiere alguien jugar al billar?

Tres bolas de billar de 0.300 kg están puestas sobre una mesa en las esquinas de un triángulo recto, como se ve en la figura 13.3. Calcule la fuerza gravitacional sobre la bola tiradora (designada m_1) resultante de las otras dos bolas.

Solución Primero calculamos por separado las fuerzas individuales sobre la bola tiradora debidas a las otras dos bolas, y luego encontramos la suma vectorial para obtener la fuerza resultante. Podemos ver gráficamente que esta fuerza debe apuntar hacia arriba y hacia la derecha. Localizamos nuestros ejes de coordenadas como se ve en la figura 13.3, si colocamos nuestro origen en la posición de la bola tiradora.

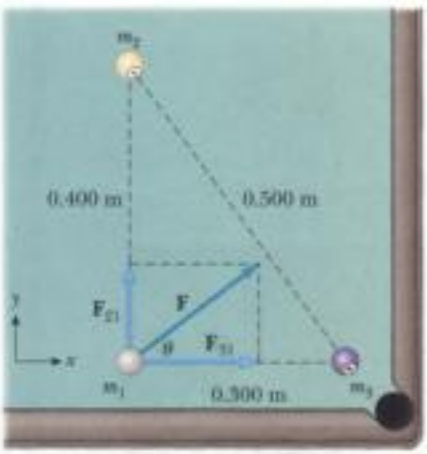


Figura 13.3 (Ejemplo 13.1) La fuerza gravitacional resultante que actúa sobre la bola tiradora es la suma vectorial $\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31}$.

La fuerza ejercida por m_2 sobre la bola tiradora está dirigida hacia arriba y está dada por

$$\mathbf{F}_{21} = G\frac{m_2 m_1}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{j}}$$
$$= (6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2})\frac{(0.300\ \mathrm{kg})(0.300\ \mathrm{kg})}{(0.400\ \mathrm{m})^2}\hat{\mathbf{j}}$$
$$= 3.75 \times 10^{-11}\ \hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{N}$$

Este resultado muestra que las fuerzas gravitacionales entre objetos de uso cotidiano tienen magnitudes sumamente pequeñas. La fuerza ejercida por m_3 sobre la bola tiradora está dirigida a la derecha:

$$\mathbf{F}_{31} = G\frac{m_3 m_1}{r_{31}^2}\hat{\mathbf{i}}$$
$$= (6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2})\frac{(0.300\ \mathrm{kg})(0.300\ \mathrm{kg})}{(0.300\ \mathrm{m})^2}\hat{\mathbf{i}}$$
$$= 6.67 \times 10^{-11}\ \hat{\mathbf{i}}\ \mathrm{N}$$

Por lo tanto, la fuerza gravitacional neta sobre la bola tiradora es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} = (6.67\hat{\mathbf{i}} + 3.75\hat{\mathbf{j}}) \times 10^{-11}\ \mathrm{N}$$

y la magnitud de esta fuerza es

$$F = \sqrt{F_{21}^2 + F_{31}^2} = \sqrt{(3.75)^2 + (6.67)^2} \times 10^{-11}\ \mathrm{N}$$
$$= 7.65 \times 10^{-11}\ \mathrm{N}$$

De $\tan\theta = 3.75/6.67 = 0.562$, la dirección de la fuerza gravitacional neta es $\theta = 29.3°$ en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj a partir del eje x.

13.2 Medición de la constante gravitacional

La constante de la gravitación universal G fue medida en un importante experimento por Henry Cavendish (1731-1810) en 1798. El aparato de Cavendish está formado por dos pequeñas esferas, cada una de masa m, fijas a los extremos de una barra horizontal ligera suspendida por una fibra fina o un alambre metálico delgado, como se ve en la figura 13.4. Cuando dos esferas grandes, cada una de masa M, se ponen cerca de las esferas más pequeñas, la fuerza de atracción entre las esferas más pequeñas y las más grandes hace que la barra gire y tuerza el alambre a una nueva orientación de equilibrio. El ángulo de rotación se mide por la desviación de un haz luminoso reflejado desde un espejo unido a la suspensión vertical. La desviación del haz luminoso es una técnica efectiva para amplificar el movimiento. Este experimento se repite cuidadosamente con diferentes masas a distintas separaciones. Además de dar un valor para G, los resultados muestran experimentalmente que la

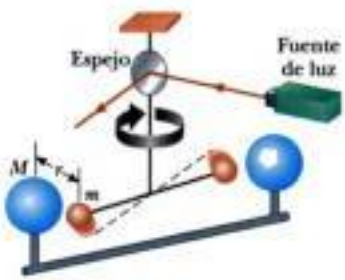


Figura 13.4 Aparato de Cavendish para medir G. La línea punteada representa la posición original de la barra.

Materiał chroniony prawem autorskim

fuerza es de atracción, proporcional al producto mM, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r.

13.3 Aceleración en caída libre y la fuerza gravitacional

En el capítulo 5, al definir mg como el peso de un cuerpo de masa m, nos referimos a g como la magnitud de la aceleración en caída libre. Ahora estamos en posición de obtener una descripción más fundamental de g. Como la magnitud de la fuerza que actúa sobre un cuerpo en caída libre de masa m cerca de la superficie terrestre está dada por la ecuación 13.4, podemos igualar mg con esta fuerza para obtener

$$mg = G\frac{M_E m}{R_E^2}$$

$$g = G\frac{M_E}{R_E^2} \tag{13.5}$$

Ahora considere un cuerpo de masa m situado a una distancia h sobre la superficie terrestre o a una distancia r del centro de nuestro planeta, donde $r = R_E + h$. La magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre este objeto es

$$F_g = G\frac{M_E m}{r^2} = G\frac{M_E m}{(R_E + h)^2}$$

La magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre el objeto en esta posición es también $F_g = mg$, donde g es el valor de la aceleración en caída libre a la altitud h. La sustitución de esta expresión por F_g en la última ecuación muestra que g es

Variación de g con la altitud

$$g = \frac{GM_E}{r^2} = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2} \tag{13.6}$$

Por lo tanto, se deduce que g *decrece* con una *altitud creciente*. Como el peso de un cuerpo es mg, vemos que como $r \to \infty$, su peso se aproxima a cero.

Cortesía de la NASA

Los astronautas F. Story Musgrave y Jeffrey A. Hoffman, junto con el telescopio espacial Hubble y el transbordador espacial *Endeavor*, están todos en caída libre girando en órbita sobre la Tierra.

Materiał chroniony prawem autorskim

Johannes Kepler
Astrónomo alemán (1571-1630)

El astrónomo alemán Kepler es mejor conocido por crear las leyes de movimiento planetario basadas en las cuidadosas observaciones de Tycho Brahe *(Art Resource)*.

13.4 Leyes de Kepler y el movimiento de planetas

El hombre ha observado los movimientos de los planetas, estrellas y otros cuerpos celestes, durante miles de años. En la Antigüedad, los sabios consideraban la Tierra como el centro del universo. Este *modelo egocéntrico* fue elaborado y formalizado por el astrónomo griego Claudio Tolomeo (c. 100-c.170) en el siglo II de nuestra era y fue aceptado durante los siguientes 1 400 años. En 1543, el astrónomo polonés Nicolás Copérnico (1473-1543) sugirió que la Tierra y los otros planetas giraban en órbitas circulares alrededor del Sol (*modelo heliocéntrico*).

El astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601) quiso determinar cómo estaban construidos los cielos, y así creó un programa para determinar las posiciones de estrellas y planetas. Es interesante ver que esas observaciones de los planetas y 777 estrellas visibles a simple vista fueron realizadas con sólo un sextante de buen tamaño y un compás (el telescopio todavía no había sido inventado).

El astrónomo alemán Johannes Kepler fue discípulo de Brahe durante corto tiempo antes de la muerte de éste, de quien adquirió la información astronómica de su maestro y pasó 16 años tratando de deducir un modelo matemático para el movimiento de los planetas. Estos datos son difíciles de clasificar porque la Tierra también está en movimiento alrededor del Sol. Después de laboriosos cálculos, Kepler encontró que los datos de Brahe sobre la revolución de Marte alrededor del Sol daban la respuesta.

El análisis completo de Kepler del movimiento planetario se resume en tres enunciados conocidos como **leyes de Kepler:**

Leyes de Kepler

1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en un foco.
2. El radio vector trazado desde el Sol a un planeta barre áreas iguales en intervalos iguales.
3. El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

A continuación estudiamos estas leyes.

Primera ley de Kepler

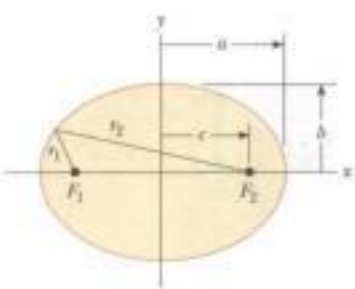


Figura activa 13.5 Gráfica de una elipse. El semieje mayor tiene longitud a, y el semieje menor tiene longitud b. Cada uno de los focos está situado a una distancia c del centro a cada lado del centro.

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, usted podrá mover los puntos focales o introducir valores para a, b, c y e para ver la forma elíptica resultante.

Por nuestros análisis de este capítulo, estamos familiarizados con órbitas circulares de cuerpos alrededor de centros de fuerza gravitacional. La primera ley de Kepler indica que la órbita circular es un caso muy especial y las órbitas elípticas son la situación general. Ésta era una noción difícil de aceptar para los científicos de aquella época, porque pensaban que las órbitas perfectamente circulares de los planetas reflejaban la perfección de los cielos.

La figura 13.5 muestra la geometría de una elipse, que sirve como nuestro modelo para la órbita elíptica de un planeta. Una elipse se define matemáticamente al escoger dos puntos F_1 y F_2, cada uno de los cuales se llama **foco,** y luego trazar una curva que pase por los puntos para los cuales la suma de las distancias r_1 y r_2 desde F_1 y F_2, respectivamente, es una constante. La distancia más larga que pasa por el centro entre puntos en la elipse (y que pase por ambos focos) se denomina **eje mayor,** y esta distancia es $2a$. En la figura 13.5, el eje mayor está trazado a lo largo de la dirección x. La distancia a recibe el nombre de **semieje mayor.** Del mismo modo, la distancia más corta que pasa por el centro entre puntos sobre la elipse se llama **eje menor** de longitud $2b$, donde la distancia b es el **semieje menor.** Cualquiera de los focos de la elipse está situado a una distancia c desde el centro de la elipse, donde $a^2 = b^2 + c^2$. En la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol, el Sol está en un foco de la elipse. No hay nada en el otro foco.

La **excentricidad** de una elipse se define como $e = c/a$ y describe la forma general de la elipse. Para un círculo, $c = 0$, y la excentricidad es cero. Cuanto menor sea b que a, más corta es la elipse a lo largo de la dirección y en comparación con su magnitud en la dirección x en la figura 13.5. Cuando b disminuye, c aumenta, y la excentricidad e aumenta. Por lo tan-

Materiał chroniony prawem autorskim

Figura 13.6 (a) Forma de la órbita de Plutón, que tiene la mayor excentricidad ($e = 0.25$) entre los planetas del sistema solar. El Sol está situado en el punto amarillo grande, que es un foco de la elipse. No hay nada físico situado en el centro (el punto pequeño) ni en el otro foco (el punto azul). (b) Forma de la órbita del cometa Halley.

¡ADVERTENCIA!

13.2 ¿Dónde está el Sol?

El Sol está en un foco de la órbita elíptica de un planeta. *No está* en el centro de la elipse.

to, valores mayores de excentricidad corresponden a elipses más largas y más angostas. El intervalo de valores de la excentricidad para una elipse es $0 < e < 1$.

Las excentricidades para órbitas planetarias varían ampliamente en el sistema solar. La excentricidad de la órbita de la Tierra es 0.017, que la hace casi circular. Por otra parte, la excentricidad de la órbita de Plutón es 0.25, la mayor de los nueve planetas. La figura 13.6a muestra una elipse con la excentricidad de la órbita de Plutón. Nótese que incluso esta órbita de máxima excentricidad es difícil de distinguir de un círculo. Ésta es la razón por la cual la primera ley de Kepler es un logro admirable. La excentricidad de la órbita del cometa Halley es 0.97, que describe una órbita cuyo eje mayor es mucho más largo que su eje menor, como se ve en la figura 13.6b. En consecuencia, el cometa Halley pasa mucho de su periodo de 76 años alejado del Sol e invisible desde la Tierra. Sólo es visible a simple vista durante una pequeña parte de su órbita cuando está cerca del Sol.

Ahora imagine un planeta en órbita elíptica como la que se ve en la figura 13.5, con el Sol en el foco F_2. Cuando el planeta está a la extrema izquierda del diagrama, la distancia entre el planeta y el Sol es $a + c$. Este punto se denomina *afelio*, donde el planeta está más alejado del Sol de lo que puede en su órbita. (Para un cuerpo que gire en órbita alrededor de la Tierra, este punto se llama *apogeo*.) Por el contrario, cuando el planeta está en el extremo derecho de la elipse, el punto se llama *perihelio* (para una órbita alrededor de la Tierra, es el *perigeo*), y la distancia entre el planeta y el Sol es $a - c$.

La primera ley de Kepler es resultado directo de la naturaleza del inverso del cuadrado de la fuerza gravitacional. Hemos estudiado órbitas circulares y elípticas. Éstas son las formas permitidas de órbitas para cuerpos que están *ligados* al centro de fuerza gravitacional. Estos cuerpos incluyen planetas, asteroides y cometas que se mueven repetidamente alrededor del Sol, así como lunas que giran alrededor de un planeta. También podría haber cuerpos *no ligados*, por ejemplo un meteorito de las profundidades del espacio que podría pasar cerca del Sol una vez y nunca regresar. La fuerza gravitacional entre el Sol y estos cuerpos también varía con el inverso del cuadrado de la distancia de separación, y las trayectorias permitidas para estos cuerpos incluyen parábolas ($e = 1$) e hipérbolas ($e > 1$).

Segunda ley de Kepler

Se puede demostrar que la segunda ley de Kepler es consecuencia de la conservación de la cantidad de movimiento angular como sigue. Considere un planeta de masa M_P que se mueve alrededor del Sol en una órbita elíptica (figura 13.7a). Consideremos el planeta

Materiał chroniony prawem autorskim

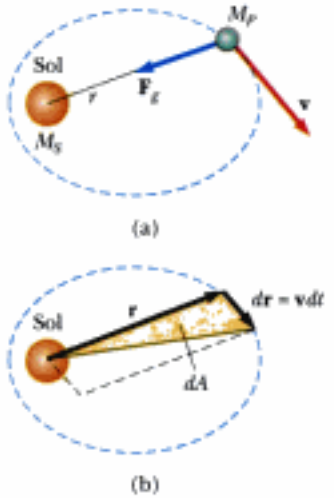


Figura activa 13.7 (a) La fuerza gravitacional que actúa sobre un planeta está dirigida hacia el Sol. (b) Cuando un planeta gira en órbita alrededor del Sol, el área barrida por el radio vector en un intervalo dt es igual a la mitad del área del paralelogramo formado por los vectores $\mathbf{r}$ y $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt$.

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, usted podrá asignar un valor de la excentricidad y ver el movimiento resultante del planeta alrededor del Sol.

como un sistema. Haremos un modelo en donde el Sol es tan grande, en comparación con el planeta, que el Sol no se mueve. La fuerza gravitacional que actúa sobre el planeta es una fuerza central, siempre a lo largo del radio vector, dirigida hacia el Sol (figura 13.7a). El par de torsión sobre el planeta debido a esta fuerza central es claramente cero, porque $\mathbf{F}$ es paralela a $\mathbf{r}$. Esto es

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times F(r)\hat{\mathbf{r}} = 0$$

Recordemos que el par de torsión neto externo sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular del sistema; esto es, $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$. Por lo tanto, como $\boldsymbol{\tau} = 0$, **la cantidad de movimiento angular L del planeta es una constante del movimiento:**

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = M_P\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{constante}$$

Podemos relacionar este resultado con la siguiente consideración geométrica. En un intervalo dt, el radio vector $\mathbf{r}$ en la figura 13.7b barre el área dA, que es igual a la mitad del área $|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|$ del paralelogramo formado por los vectores $\mathbf{r}$ y $d\mathbf{r}$. Como el desplazamiento del planeta en el intervalo dt está dado por $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt$, tenemos

$$dA = \tfrac{1}{2}|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = \tfrac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\,dt| = \frac{L}{2M_P}\,dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2M_P} = \text{constante} \tag{13.7}$$

donde L y M_P son constantes ambas. Por lo tanto, concluimos que **el radio vector del Sol a cualquier planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.**

Es importante reconocer que este resultado es una consecuencia de que la fuerza gravitacional es una fuerza central, que a su vez implica que la cantidad de movimiento angular del planeta es constante. Por lo tanto, la ley se aplica a *cualquier* situación que comprenda una fuerza central, sea o no sea del inverso del cuadrado.

Tercera ley de Kepler

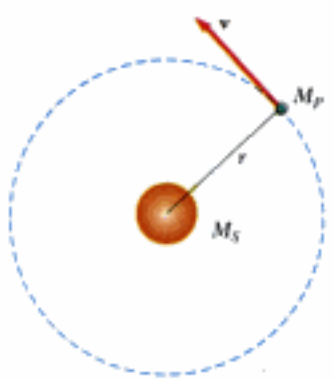


Figura 13.8 Planeta de masa M_P que se mueve en órbita circular alrededor del Sol. Las órbitas de todos los planetas, excepto Mercurio y Plutón, son casi circulares.

Es ilustrativo demostrar que la tercera ley de Kepler se puede pronosticar a partir de la ley del inverso del cuadrado para órbitas circulares.[2] Considere un planeta de mas M_P que se supone se está moviendo alrededor del Sol (masa M_S) en órbita circular, como en la figura 13.8. Debido a que la fuerza de gravedad da la aceleración centrípeta del planeta cuando se mueve en un círculo, usamos la segunda ley de Newton para una partícula en movimiento circular uniforme,

$$\frac{GM_SM_P}{r^2} = \frac{M_Pv^2}{r}$$

La rapidez orbital del planeta es $2\pi r/T$, donde T es el periodo; por lo tanto, la expresión precedente se convierte en

$$\frac{GM_S}{r^2} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right)r^3 = K_Sr^3$$

donde K_S es una constante dada por

$$K_S = \frac{4\pi^2}{GM_S} = 2.97 \times 10^{-19}\ \text{s}^2/\text{m}^3$$

[2] Las órbitas de todos los planetas, excepto Mercurio y Plutón, están muy cerca de ser circulares; por lo tanto, no introducimos mucho error con esta suposición. Por ejemplo, la razón entre el semieje menor y el semieje mayor para la órbita de la Tierra es $b/a = 0.999\,86$.

Materiał chroniony prawem autorskim

Tabla 13.2

Datos planetarios útiles

Cuerpo	Masa (kg)	Radio medio (m)	Periodo de revolución (s)	Distancia media al Sol (m)	$\frac{T^2}{r^3}$ (s^2/m^3)
Mercurio	5.18×10^{23}	2.43×10^6	7.60×10^6	5.79×10^{10}	2.97×10^{-19}
Venus	4.88×10^{24}	6.06×10^6	1.94×10^7	1.08×10^{11}	2.99×10^{-19}
Tierra	5.98×10^{24}	6.37×10^6	3.156×10^7	1.496×10^{11}	2.97×10^{-19}
Marte	6.42×10^{23}	3.37×10^6	5.94×10^7	2.28×10^{11}	2.98×10^{-19}
Júpiter	1.90×10^{27}	6.99×10^7	3.74×10^8	7.78×10^{11}	2.97×10^{-19}
Saturno	5.68×10^{26}	5.85×10^7	9.35×10^8	1.43×10^{12}	2.99×10^{-19}
Urano	8.68×10^{25}	2.33×10^7	2.64×10^9	2.87×10^{12}	2.95×10^{-19}
Neptuno	1.03×10^{26}	2.21×10^7	5.22×10^9	4.50×10^{12}	2.99×10^{-19}
Plutón	$\approx 1.4 \times 10^{22}$	$\approx 1.5 \times 10^6$	7.82×10^9	5.91×10^{12}	2.96×10^{-19}
Luna	7.36×10^{22}	1.74×10^6	—	—	—
Sol	1.991×10^{30}	6.96×10^8	—	—	—

Esta ecuación también es válida para órbitas elípticas si sustituimos r por la longitud a del semieje mayor (figura 13.5):

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right) a^3 = K_S a^3 \qquad (13.8)$$

Tercera ley de Kepler

La ecuación 13.8 es la tercera ley de Kepler. Como el semieje mayor de una órbita circular es su radio, la ecuación 13.8 es válida para órbitas circulares y elípticas. Nótese que la constante de proporcionalidad K_S es independiente de la masa del planeta. La ecuación 13.8 es entonces válida para *cualquier* planeta.[3] Si fuéramos a considerar la órbita de un satélite como la de la Luna alrededor de la Tierra, entonces la constante tendría un valor diferente, con la masa del Sol sustituida por la masa de la Tierra, es decir, $K_E = 4\pi^2/GM_E$.

La tabla 13.2 es un conjunto de datos planetarios útiles. La última columna verifica que la razón T^2/r^3 es constante. Las pequeñas variaciones de los valores de esta columna se deben a incertidumbres en los datos medidos para los periodos y semiejes mayores de los planetas.

Un reciente trabajo astronómico ha revelado la existencia de un gran número de cuerpos del sistema solar situados a mayor distancia de la órbita de Neptuno. En general, éstos se encuentran en la *franja de Kuiper*, región que se extiende de unas 30 UA (el radio orbital de Neptuno) a 50 UA. (Una UA es una *unidad astronómica*, o sea el radio de la órbita de la Tierra.) Las estimaciones actuales identifican por lo menos 70 000 objetos en esta región con diámetros mayores a 100 km. El primer KBO (cuerpo de la franja de Kuiper) fue descubierto en 1992. Desde entonces se han detectado muchos más, y a algunos se les han dado nombres, como Varuna (diámetro de entre 900 y 1 000 km, descubierto en 2000), Ixion (diámetro entre 900 y 1 000 km, descubierto en 2001), y Quaoar (diámetro de unos 800 km, descubierto en 2002).

Un subconjunto de unos 1 400 KBO se llaman "Plutinos" porque, al igual que Plutón, exhiben un fenómeno de resonancia, girando dos veces alrededor del Sol en el mismo intervalo que Neptuno gira tres veces. Algunos astrónomos hasta dicen que Plutón no debería ser considerado como planeta, sino como KBO. La aplicación contemporánea de las leyes de Kepler, y propuestas tan exóticas como la de intercambio planetario de cantidad de movimiento angular y planetas migratorios[4], dan idea de lo interesante de este activo campo de investigación de nuestro tiempo.

Pregunta rápida 13.4 Plutón, el planeta más alejado del Sol, tiene un periodo orbital que es (a) mayor a un año (b) menor a un año (c) igual a un año.

[3] La ecuación 13.8 es de hecho una proporción, porque la razón entre las dos cantidades T^2 y a^3 es una constante. No es necesario que las variables de una proporción se limiten sólo a la primera potencia.

[4] Malhotra, R., "Migrating Planets," *Scientific American*, sept. 1999, vol. 281, número 3.

Materiał chroniony prawem autorskim

Pregunta rápida 13.5 Un asteroide está en una órbita elíptica altamente excéntrica alrededor del Sol. El periodo de la órbita del asteroide es 90 días. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero acerca de la posibilidad de una colisión entre este asteroide y la Tierra? (a) No hay peligro posible de colisión. (b) Hay una posibilidad de colisión. (c) No hay suficiente información para determinar si hay peligro de colisión.

Pregunta rápida 13.6 Un satélite se mueve en órbita elíptica alrededor de la Tierra de modo que, en sus posiciones de perigeo y apogeo, sus distancias desde el centro de la Tierra son respectivamente D y $4D$. La relación entre la rapidez en estas dos posiciones es (a) $v_p = v_a$ (b) $v_p = 4v_a$ (c) $v_a = 4v_p$ (d) $v_p = 2v_a$ (e) $v_a = 2v_p$.

Ejemplo 13.4 La masa del Sol

Calcule la masa del Sol usando el dato de que el periodo de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es 3.156×10^7 s y su distancia al Sol es 1.496×10^{11} m.

Solución Usando la ecuación 13.8, encontramos que

$$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11}\ \text{m})^3}{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(3.156 \times 10^7\ \text{s})^2}$$

$$= \mathbf{1.99 \times 10^{30}\ kg}$$

En el ejemplo 13.3, el conocimiento de fuerzas gravitacionales hizo posible que descubriéramos algo acerca de la densidad del núcleo de la Tierra, y ahora hemos empleado este conocimiento para determinar la masa del Sol.

¿Qué pasaría si? Suponga el lector que se le pide la masa de Marte. ¿Cómo podría determinar este valor?

Respuesta La tercera ley de Kepler es válida para cualquier sistema de cuerpos en órbita alrededor de un cuerpo de masa grande. Marte tiene dos lunas, Fobos y Deimos. Si reescribimos la ecuación 13.8 para estas lunas de Marte, tenemos

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_M}\right)a^3$$

donde M_M es la masa de Marte. Al despejar esta masa,

$$M_M = \left(\frac{4\pi^2}{G}\right)\frac{a^3}{T^2} = \left(\frac{4\pi^2}{6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2}\right)\frac{a^3}{T^2}$$

$$= (5.92 \times 10^{11}\ \text{kg}\cdot\text{s}^2/\text{m}^3)\frac{a^3}{T^2}$$

Fobos tiene un periodo orbital de 0.32 días y una órbita casi circular de 9 380 km de radio. La órbita de Deimos es incluso más circular, con un radio de 23 460 km y un periodo orbital de 1.26 días. Calculemos la masa de Marte usando cada uno de estos conjuntos de datos:

Fobos:

$$M_M = (5.92 \times 10^{11}\ \text{kg}\cdot\text{s}^2/\text{m}^3) \times \frac{(9.380 \times 10^6\ \text{m})^3}{(0.32\ \text{d})^2}\left(\frac{1\ \text{d}}{86\,400\ \text{s}}\right)^2 = 6.39 \times 10^{23}\ \text{kg}$$

Deimos:

$$M_M = (5.92 \times 10^{11}\ \text{kg}\cdot\text{s}^2/\text{m}^3) \times \frac{(2.346 \times 10^7\ \text{m})^3}{(1.26\ \text{d})^2}\left(\frac{1\ \text{d}}{86\,400\ \text{s}}\right)^2 = 6.45 \times 10^{23}\ \text{kg}$$

Estos dos cálculos están a no más del 1% entre ellos, y ambos a no más de 0.5% del valor de la masa de Marte dada en la tabla 13.2.

Ejemplo 13.5 Un satélite geosincrono

Considere un satélite de masa m que se mueve en órbita circular alrededor de la Tierra a una rapidez constante v y una altitud h sobre la superficie terrestre, como se ilustra en la figura 13.9.

(A) Determine la rapidez del satélite en términos de G, h, R_E (el radio de la Tierra), y M_E (la masa de la Tierra).

Solución Conceptualice este problema e imagine que el satélite se mueve alrededor de la Tierra en órbita circular bajo la influencia de la fuerza gravitacional. El satélite debe tener una aceleración centrípeta. Por lo tanto, clasificamos este problema como uno en donde interviene la segunda ley de Newton, la ley de gravitación universal y un movimiento circular. Para analizar el problema, nótese que la única fuerza externa que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitacional, que actúa hacia el centro de la Tierra y mantiene al satélite en su órbita circular. Por lo tanto, la fuerza neta sobre el satélite es la fuerza gravitacional

$$F_r = F_g = G\frac{M_E m}{r^2}$$

De la segunda ley de Newton y el hecho de que la aceleración del satélite es centrípeta, obtenemos

$$G\frac{M_E m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Al despejar v y recordar que la distancia r desde el centro de la Tierra al satélite es $r = R_E + h$, obtenemos

$$(1) \qquad v = \sqrt{\frac{GM_E}{r}} = \sqrt{\frac{GM_E}{R_E + h}}$$

(B) Si el satélite ha de ser *geosíncrono* (es decir, que parece permanecer en una posición fija sobre la Tierra), ¿Con qué rapidez se mueve en el espacio?

Solución Para que dé la impresión que permanece en una posición fija sobre la Tierra, el periodo del satélite debe ser 24 h y el satélite debe estar en órbita directamente sobre el ecuador. De la tercera ley de Kepler (ecuación 13.8) con $a = r$ y $M_S \rightarrow M_E$, encontramos el radio de la órbita:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_E}\right) r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_E T^2}{4\pi^2}}$$

Sustituyendo valores numéricos y tomando nota de que el periodo es $T = 24\ \text{h} = 86\,400\ \text{s}$, encontramos

$$r = \sqrt[3]{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})(86\,400\ \text{s})^2}{4\pi^2}}$$

$$= 4.23 \times 10^7\ \text{m}$$

Para hallar la rapidez del satélite, usamos la ecuación (1):

$$v = \sqrt{\frac{GM_E}{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})}{4.23 \times 10^7\ \text{m}}}$$

$$= \mathbf{3.07 \times 10^3\ m/s}$$

Para finalizar este problema, es interesante observar que el valor de r calculado aquí se traslada a una altura del satélite sobre la superficie terrestre de casi 36 000 km. Por lo tanto, los satélites geosíncronos tienen la ventaja de permitir que una antena que apunte a la Tierra se apunte en una dirección fija, pero hay la desventaja de que las señales entre la Tierra y el satélite deben recorrer una gran distancia. Es difícil usar satélites geosíncronos para observación óptica de la superficie de la Tierra debido a su gran altitud.

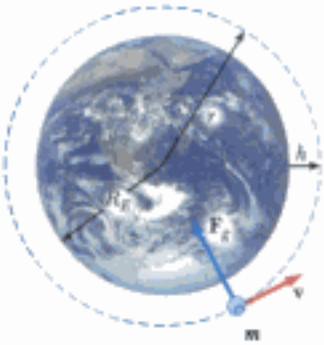


Figura 13.9 (Ejemplo 13.5) Satélite de masa m que se mueve alrededor de la Tierra en órbita circular de radio r con rapidez v constante. La única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitacional $\mathbf{F}_g$ (Dibujo no a escala).

¿Qué pasaría si? **¿Qué pasaría si el movimiento del satélite de la parte (A) tuviera lugar a una altura h sobre la superficie de otro planeta más grande que la Tierra, pero del mismo radio? ¿Se movería el satélite a una rapidez mayor o menor de lo que se mueve alrededor de la Tierra?**

Respuesta Si el planeta atrae al satélite hacia abajo con más fuerza gravitacional debido a su mayor masa, el satélite tendría que moverse a una mayor rapidez para evitar moverse hacia la superficie. Esto es consistente con los pronósticos de la ecuación (1), lo cual demuestra que como la rapidez v es proporcional a la raíz cuadrada de la masa del planeta, cuando aumenta la masa, también aumenta la rapidez.

13.5 El campo gravitacional

Cuando Newton publicó su teoría de la gravitación universal, se consideró un éxito, porque explicaba satisfactoriamente el movimiento de los planetas. Desde 1687 se ha usado la misma teoría para tomar en cuenta los movimientos de cometas, la desviación de una balanza de Cavendish, las órbitas de estrellas binarias y la rotación de galaxias. Sin embargo, los contemporáneos de Newton y sus sucesores encontraron difícil aceptar el concepto de una fuerza que actúa a distancia, como se menciona en la sección 5.1. Preguntaron que cómo era posible que dos objetos interactuaran cuando no estaban en contacto uno con el otro. Newton mismo no pudo contestar esa pregunta.

Un planteamiento para describir interacciones entre dos cuerpos que no están en contacto, llegó mucho después de la muerte de Newton, y hace posible que veamos las interacciones gravitacionales de modo diferente, usando el concepto de **campo gravitacional** que existe en todo punto en el espacio. Cuando una partícula de masa m se coloca en un punto donde el campo gravitacional es $\mathbf{g}$, la partícula experimenta una fuerza $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$. En

Materiał chroniony prawem autorskim

13.6 Energía potencial gravitacional

En el capítulo 8 introdujimos el concepto de energía potencial gravitacional, que es la energía asociada con la configuración de un sistema de cuerpos que interactúan por medio de la fuerza gravitacional. Destacamos el hecho de que la función mgy de energía potencial gravitacional para un sistema partícula-Tierra es válida sólo cuando la partícula está cerca de la superficie de la Tierra, donde la fuerza gravitacional es constante. Debido a que la fuerza gravitacional entre dos partículas varía con $1/r^2$, esperamos que una función más general de energía potencial, una que sea válida sin la restricción de tener que estar cerca de la superficie de la Tierra, será muy diferente de $U = mgy$.

Antes de calcular esta forma general para la función de energía potencial gravitacional, verifiquemos primero que la *fuerza gravitacional sea conservativa* (recordemos de la sección 8.3 que una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza sobre un cuerpo que se mueve entre dos puntos cualesquiera es independiente de la trayectoria tomada por el cuerpo). Para hacer esto, primero observamos que la fuerza gravitacional es una fuerza central. Por definición, una fuerza central es cualquier fuerza que está dirigida a lo largo de una recta radial a un centro fijo y tiene una magnitud que depende sólo de la coordenada radial r. Por lo tanto, una fuerza central puede ser representada por $F(r)\hat{\mathbf{r}}$ donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario dirigido del origen hacia la partícula, como se ve en la figura 13.11.

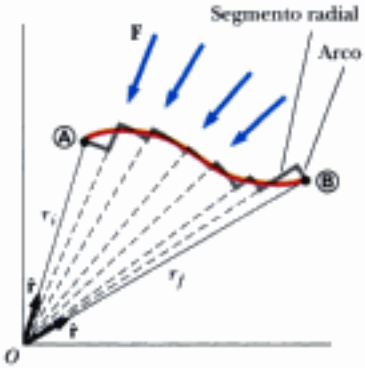


Figura 13.11 Una partícula se mueve de Ⓐ a Ⓑ, cuando sobre ella actúa una fuerza central **F**, que está dirigida radialmente. La trayectoria está descompuesta en una serie de segmentos radiales y arcos. Debido a que el trabajo realizado a lo largo de los arcos es cero, el trabajo realizado es independiente de la trayectoria y depende sólo de r_f y r_i.

Considere una fuerza central que actúa sobre una partícula que se mueve a lo largo de la trayectoria general Ⓐ a Ⓑ en la figura 13.11. La trayectoria de Ⓐ a Ⓑ puede aproximarse por una serie de escalones de acuerdo con el siguiente procedimiento. En la figura 13.11 trazamos varias aristas delgadas, que se muestran como rectas interrumpidas. La frontera exterior de nuestro conjunto de aristas es una trayectoria formada por cortos segmentos de rectas radiales y arcos (gris en la figura). Seleccionamos la longitud de la dimensión radial de cada arista de forma que el arco corto en el extremo ancho de la cuña se cruza con la trayectoria real de la partícula. Entonces podemos aproximar la trayectoria real con una serie de movimientos en zigzag que se alternan entre moverse a lo largo de un arco y moverse a lo largo de una recta radial.

Por definición, una fuerza central siempre se dirige a lo largo de una recta radial; por tanto, el trabajo realizado por **F** a lo largo de cualquier recta radial es

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F(r)\ dr$$

Por definición, el trabajo realizado por una fuerza que es perpendicular al desplazamiento es cero. En consecuencia, el trabajo realizado al moverse a lo largo de cualquier arco es cero porque **F** es perpendicular al desplazamiento a lo largo de estos segmentos. Por lo tanto, el trabajo total realizado por **F** es la suma de las contribuciones a lo largo de los segmentos radiales:

Trabajo realizado por una fuerza central

$$W = \int_{r_i}^{r_f} F(r)\ dr$$

donde los subíndices i y f se refieren a las posiciones inicial y final. Como el integrando es una función sólo de la posición radial, esta integral depende sólo de los valores inicial y final de r. Por lo tanto, el trabajo realizado es el mismo sobre *cualquier* trayectoria de Ⓐ a Ⓑ. Como el trabajo realizado es independiente de la trayectoria y depende sólo de los puntos finales, concluimos que *cualquier fuerza central es conservativa*. Ahora estamos seguros que una función de energía potencial se puede obtener una vez que se especifique la forma de la fuerza central.

Recordemos de la ecuación 8.15 que el cambio en la energía potencial gravitacional de un sistema, asociado con un desplazamiento dado de un miembro del sistema, se define como el negativo del trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre ese miembro durante el desplazamiento:

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{r_i}^{r_f} F(r)\ dr \tag{13.11}$$

Podemos usar este resultado para evaluar la función de energía potencial gravitacional. Considere una partícula de masa m que se mueve entre dos puntos Ⓐ y Ⓑ sobre la superficie de la Tierra (figura 13.12). La partícula está sujeta a la fuerza gravitacional dada por la ecuación 13.1. Podemos expresar esta fuerza como

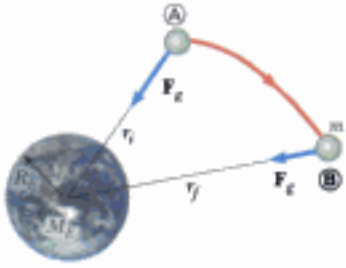


Figura 13.12 Cuando una partícula de masa m se mueve de Ⓐ a Ⓑ sobre la superficie de la Tierra, cambia la energía potencial gravitacional de acuerdo con la ecuación 13.11.

$$F(r) = -\frac{GM_E m}{r^2}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

donde el signo negativo indica que la fuerza es de atracción. Si sustituimos esta expresión por $F(r)$ en la ecuación 13.11, podemos calcular el cambio en la función de energía potencial gravitacional:

$$U_f - U_i = GM_E m \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} = GM_E m \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_i}^{r_f}$$

$$U_f - U_i = -GM_E m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \tag{13.12}$$

Como siempre, la elección de una configuración de referencia para la energía potencial es completamente arbitraria. Es costumbre escoger que la configuración de referencia para energía potencial cero sea la misma que aquella para la cual la fuerza es cero. Si tomamos $U_i = 0$ en $r_i = \infty$, obtenemos el siguiente importante resultado

Energía potencial gravitacional del sistema Tierra-partícula para $r > R_E$

$$U(r) = -\frac{GM_E m}{r} \tag{13.13}$$

Esta expresión aplica al sistema Tierra-partícula donde la partícula está separada del centro de la Tierra por una distancia r, siempre que $r \geq R_E$. El resultado no es válido para partículas dentro de la Tierra, donde $r < R_E$. Debido a nuestra elección de U_i, la función U siempre es negativa (figura 13.13).

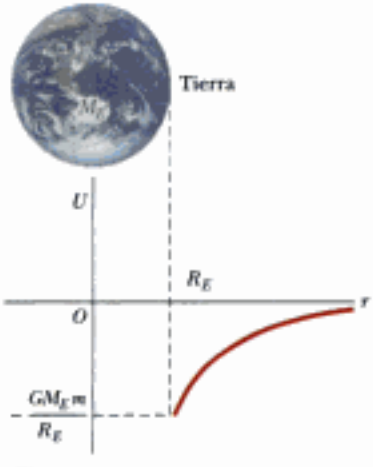


Figura 13.13 Gráfica de la energía potencial gravitacional U contra r para un cuerpo arriba de la superficie de la Tierra. La energía potencial se va a cero cuando r se aproxima al infinito.

Aun cuando la expresión 13.13 se dedujo para el sistema partícula-Tierra, se puede aplicar a dos partículas cualesquiera. Esto es, la energía potencial gravitacional asociada con cualquier par de partículas de masas m_1 y m_2 separadas por una distancia r es

$$U = -\frac{Gm_1 m_2}{r} \tag{13.14}$$

Esta expresión muestra que la energía potencial gravitacional para cualquier par de partículas varía con $1/r$, mientras que la fuerza entre ellas varía con $1/r^2$. Además, la energía potencial es negativa porque la fuerza es de atracción y hemos tomado la energía potencial como cero cuando la separación de la partícula es infinita. Como la fuerza entre las partículas es de atracción, sabemos que un agente externo debe realizar trabajo positivo para aumentar la separación entre ellas. El trabajo realizado por el agente externo produce un aumento en la energía potencial cuando las dos partículas se separan. Esto es, U se hace menos negativa cuando r aumenta.

Cuando dos partículas están en reposo y separadas por una distancia r, el agente externo tiene que proporcionar una energía al menos igual a $+Gm_1m_2/r$ para separar las partículas a una distancia infinita. Por lo tanto, es conveniente considerar el valor absoluto de la energía potencial como la *energía de amarre* del sistema. Si el agente externo proporciona una energía mayor que la energía de amarre, el exceso de energía del sistema será en la forma de energía cinética de las partículas cuando éstas estén a una separación infinita.

Podemos extender este concepto a tres o más partículas. En este caso, la energía potencial total del sistema es la suma sobre todos los pares de partículas.[6] Cada par contribuye con un término de la forma dada por la ecuación 13.14. Por ejemplo, si el sistema contiene tres partículas, como en la figura 13.14, encontramos que

$$U_{\text{total}} = U_{12} + U_{13} + U_{23} = -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right) \tag{13.15}$$

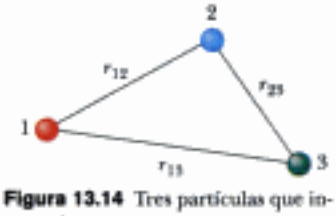


Figura 13.14 Tres partículas que interactúan.

El valor absoluto de U_{total} representa el trabajo necesario para separar las partículas por una distancia infinita.

[6] El hecho de que términos de energía potencial se puedan sumar para todos los pares de partículas se deriva del dato experimental de que las fuerzas gravitacionales obedecen el principio de superposición.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 13.6 El cambio en energía potencial

Una partícula de masa m se desplaza una pequeña distancia vertical Δy cerca de la superficie de la Tierra. Demuestre que, en esta situación, la expresión general para el cambio en energía potencial gravitacional dada por la ecuación 13.12 se reduce a la conocida relación $\Delta U = mg\,\Delta y$.

Solución Podemos expresar la ecuación 13.12 en la forma

$$\Delta U = -GM_E m\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) = GM_E m\left(\frac{r_f - r_i}{r_i r_f}\right)$$

Si tanto la posición inicial como la final de la partícula están cerca de la superficie de la Tierra, entonces $r_f - r_i = \Delta y$ y $r_i r_f \approx R_E^2$. (Recuerde que r se mide desde el centro de la Tierra.) Por lo tanto, el cambio en energía potencial se convierte en

$$\Delta U \approx \frac{GM_E m}{R_E^2}\,\Delta y = mg\,\Delta y$$

donde hemos empleado el dato de que $g = GM_E/R_E^2$ (ecuación 13.5). Recuerde que la configuración de referencia es arbitraria porque es el *cambio* en energía potencial que es significativa.

¿Qué pasaría si? Suponga que usted realiza estudios de la atmósfera superior y se le pide hallar la altura de la atmósfera de la Tierra en donde la "ecuación de superficie" $\Delta U = mg\,\Delta y$ da un 1.0% de error en el cambio de la energía potencial. ¿Cuál es esta altura?

Respuesta Como la ecuación de superficie supone un valor constante para g, dará un valor ΔU que es mayor que el dado por la ecuación general, ecuación 13.12. Por lo tanto, un 1.0% de error estaría descrito por la razón

$$\frac{\Delta U_{\text{superficie}}}{\Delta U_{\text{general}}} = 1.010$$

Si sustituimos las expresiones para cada unos de estos cambios ΔU, tenemos

$$\frac{mg\,\Delta y}{GM_E m(\Delta y/r_i r_f)} = \frac{g r_i r_f}{GM_E} = 1.010$$

Donde $r_i = R_E$ y $r_f = R_E + \Delta y$. Sustituyendo por g de la ecuación 13.5, encontramos

$$\frac{(GM_E/R_E^2)R_E(R_E + \Delta y)}{GM_E} = \frac{R_E + \Delta y}{R_E} = 1 + \frac{\Delta y}{R_E} = 1.010$$

Por lo tanto,

$$\Delta y = 0.010R_E = 0.010(6.37 \times 10^6\ \text{m}) = 6.37 \times 10^4\ \text{m} = 63.7\ \text{km}$$

13.7 Consideraciones de energía en el movimiento planetario y de satélites

Considere un cuerpo de masa m que se mueve con una rapidez v en la cercanía de un cuerpo de gran tamaño y masa M, donde $M \gg m$. El sistema podría ser un planeta que se mueve alrededor del Sol, un satélite en órbita alrededor de la Tierra, o un cometa que hace su recorrido de una sola vez hacia el Sol. Si suponemos que el objeto de masa M está en reposo en un marco inercial de referencia, entonces la energía mecánica total E del sistema formado por los dos objetos, cuando éstos están separados por una distancia r, es la suma de la energía cinética del cuerpo de masa m y la energía potencial del sistema, dada por la ecuación 13.14:[7]

$$E = K + U$$

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \qquad (13.16)$$

[7] El lector puede reconocer que hemos hecho caso omiso de la energía cinética del cuerpo más grande. Para ver que esta simplificación es razonable, considere un objeto de masa m que cae hacia la Tierra. Debido a que el centro de masa del sistema objeto-Tierra es efectivamente estacionario, se deduce de la conservación de la cantidad de movimiento que $mv = M_E v_E$. En consecuencia, la Tierra adquiere una energía cinética igual a

$$\tfrac{1}{2}M_E v_E^2 = \tfrac{1}{2}\frac{m^2}{M_E}v^2 = \frac{m}{M_E}K$$

donde K es la energía cinética del objeto. Como $M_E \gg m$, este resultado muestra que la energía cinética de la Tierra es insignificante.

Materiał chroniony prawem autorskim

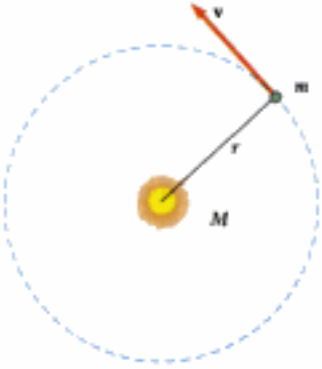


Figura 13.15 Cuerpo de masa m que se mueve en órbita circular alrededor de un cuerpo mucho más grande de masa M.

Esta ecuación muestra que E puede ser positiva, negativa o cero, dependiendo del valor de v. No obstante, para un sistema enlazado,[8] como lo es el sistema Tierra-Sol, E es necesariamente *menor que cero* porque hemos seleccionado la convención de que $U \to 0$ como $r \to \infty$.

Podemos fácilmente establecer que $E < 0$ para el sistema formado por un cuerpo de masa m que se mueve en órbita circular alrededor de un cuerpo de masa $M \gg m$ (figura 13.15). La segunda ley de Newton aplicada al cuerpo de masa m da

$$\frac{GMm}{r^2} = ma = \frac{mv^2}{r}$$

La multiplicación de ambos lados por r y división entre 2 da

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r} \tag{13.17}$$

Si sustituimos esto en la ecuación 13.16 obtenemos

$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$$

Energía total para órbitas circulares

$$E = -\frac{GMm}{2r} \quad \text{(órbitas circulares)} \tag{13.18}$$

Este resultado muestra claramente que **la energía mecánica total es negativa en el caso de órbitas circulares.** Nótese que **la energía cinética es positiva e igual a la mitad del valor absoluto de la energía potencial.** El valor absoluto de E también es igual a la energía de amarre del sistema, porque esta cantidad de energía debe ser proporcionada al sistema para separar los dos cuerpos infinitamente.

La energía mecánica total también es negativa en el caso de órbitas elípticas. La expresión para E para órbitas elípticas es la misma que la ecuación 13.18 con r sustituida por la longitud a del semieje mayor:

Energía total para órbitas elípticas

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad \text{(órbitas elípticas)} \tag{13.19}$$

Además, la energía total es constante si suponemos que el sistema está aislado. Por lo tanto, cuando el objeto de masa m se mueve de Ⓐ a Ⓑ en la figura 13.12, la energía total permanece constante y la ecuación 13.16 da

$$E = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GMm}{r_i} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{r_f} \tag{13.20}$$

Al combinar este enunciado de conservación de la energía con nuestro anterior análisis de conservación de la cantidad de movimiento angular, vemos que **tanto la energía total como la cantidad total de movimiento angular de un sistema de dos cuerpos con enlace gravitacional son constantes del movimiento.**

Pregunta rápida 13.7 Un cometa se mueve en órbita elíptica alrededor del Sol. ¿Cuál punto de su órbita (perihelio o afelio) representa el valor más alto de (a) la rapidez del cometa (b) la energía potencial del sistema cometa-Sol (c) la energía cinética del cometa (d) la energía total del sistema cometa-Sol?

[8] De los tres ejemplos dados al principio de esta sección, el planeta que se mueve alrededor del Sol y un satélite en órbita alrededor de la Tierra son sistemas enlazados: la Tierra siempre estará cerca del Sol, y el satélite siempre estará cerca de la Tierra. El cometa que hace un solo recorrido hacia el Sol representa un sistema no enlazado, es decir, el cometa interactúa una vez con el Sol pero no está enlazado a él. Por lo tanto, en teoría el cometa puede moverse infinitamente lejos del Sol.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 13.7 Cambio de la órbita de un satélite

El transbordador espacial lanza un satélite de comunicaciones de 470 kg cuando está en órbita de 280 km sobre la superficie de la Tierra. Un motor cohete en el satélite impulsa a éste en una órbita geosincrónica, que es una órbita en la que el satélite permanece directamente en un solo lugar sobre la Tierra. ¿Cuánta energía tiene que proporcionar el motor?

Solución Primero determinamos el radio inicial (no la altitud sobre la superficie de la Tierra) de la órbita del satélite cuando todavía está en el compartimiento de carga del transbordador. Éste es simplemente

$$R_E + 280\text{ km} = 6.65 \times 10^6\text{ m} = r_i$$

En el ejemplo 13.5 encontramos que el radio de la órbita de un satélite geosíncrono es $r_f = 4.23 \times 10^7$ m. Al aplicar la ecuación 13.18 obtenemos, para las energías totales inicial y final,

$$E_i = -\frac{GM_E m}{2r_i} \qquad E_f = -\frac{GM_E m}{2r_f}$$

La energía necesaria del motor para impulsar el satélite es

$$\begin{aligned}\Delta E = E_f - E_i &= -\frac{GM_E m}{2}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)\\ &= -\frac{(6.67 \times 10^{-11}\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\text{ kg})(470\text{ kg})}{2}\\ &\quad \times\left(\frac{1}{4.23 \times 10^7\text{ m}} - \frac{1}{6.65 \times 10^6\text{ m}}\right)\\ &= \mathbf{1.19 \times 10^{10}\text{ J}}\end{aligned}$$

Ésta es la energía equivalente de 89 galones de gasolina. Los ingenieros de la NASA deben tomar en cuenta el cambio de masa de la nave espacial cuando expulsa el combustible quemado, algo que no hemos hecho aquí. ¿Esperaría el lector que el cálculo que incluye el efecto de este cambio de masa diera una cantidad mayor o menor de energía necesaria desde el motor?

Si deseamos determinar la forma en que la energía se distribuye después de encender el motor, encontramos de la ecuación 13.17 que el cambio en energía cinética es $\Delta K = (GM_E m/2)(1/r_f - 1/r_i) = -1.19 \times 10^{10}$ J (una reducción), y el cambio correspondiente en energía potencial es $\Delta U = -GM_E m(1/r_f - 1/r_i) = 2.38 \times 10^{10}$ J (un aumento). Por lo tanto, el cambio en energía orbital del sistema es $\Delta E = \Delta K + \Delta U = 1.19 \times 10^{10}$ J, como ya habíamos calculado. El encendido del motor resulta en una transformación de energía potencial química en el combustible a energía orbital del sistema. Debido a que un aumento en energía potencial gravitacional está acompañada por una reducción en energía cinética, concluimos que la rapidez de un satélite en órbita disminuye cuando aumenta su altitud.

Rapidez de escape

Suponga que un cuerpo de masa m se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una rapidez inicial v_i, como se ilustra en la figura 13.16. Podemos usar consideraciones de energía para hallar el valor mínimo de la rapidez inicial necesaria para permitir que el cuerpo se aleje infinitamente de la Tierra. La ecuación 13.16 da la energía total del sistema en cualquier punto. En la superficie de la Tierra, $v = v_i$ y $r = r_i = R_E$. Cuando el cuerpo alcanza su altitud máxima, $v = v_f = 0$ y $r = r_f = r_{máx}$. Como la energía total del sistema es constante, sustituir estas condiciones en la ecuación 13.20 da

$$\tfrac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_E m}{R_E} = -\frac{GM_E m}{r_{máx}}$$

Al despejar v_i^2 tendremos

$$v_i^2 = 2GM_E\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{r_{máx}}\right) \tag{13.21}$$

Por lo tanto, si se conoce la rapidez inicial, esta expresión se puede usar para calcular la altitud máxima h porque sabemos que

$$h = r_{máx} - R_E$$

Ahora estamos en posición para calcular la **rapidez de escape,** que es la velocidad mínima que un cuerpo debe tener en la superficie de la Tierra para alcanzar una distancia infinita de separación desde la Tierra. Al desplazarse a esta velocidad mínima, el cuerpo

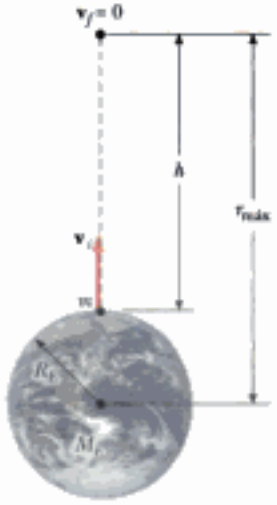


Figura 13.16 Un cuerpo de masa m lanzado hacia arriba de la superficie de la Tierra con rapidez inicial v_i alcanza una altitud máxima h.

Materiał chroniony prawem autorskim

Agujeros negros

En el ejemplo 11.7 describimos brevemente un evento raro llamado una supernova, que es la catastrófica explosión de una estrella muy grande. El material que permanece en el núcleo centro de este cuerpo continúa colapsándose, y el destino final del núcleo depende de su masa. Si el núcleo tiene una masa menor a 1.4 veces la masa de nuestro Sol, gradualmente se enfría y termina su vida como una estrella enana blanca. No obstante, si la masa del núcleo es mayor que esto, puede colapsarse más debido a fuerzas gravitacionales. Lo que resta es una estrella de neutrones, que se estudia en el ejemplo 11.7, donde la masa de una estrella se comprime a un radio de unos 10 km. (En la Tierra, una cucharada de este material pesaría unos 5 000 millones de toneladas.)

Puede ocurrir la todavía más rara muerte de una estrella cuando el núcleo tiene una masa mayor a unas tres masas solares. El colapso puede continuar hasta que la estrella se convierte en un cuerpo pequeño en el espacio, comúnmente conocido como **agujero negro.** En efecto, los agujeros negros son restos de estrellas que se han colapsado bajo su propia fuerza gravitacional. Si un objeto, como por ejemplo una nave espacial, se acerca a un agujero negro, será sometido a una fuerza gravitacional extremadamente fuerte y quedará atrapada para siempre.

La rapidez de escape para un agujero negro es muy alta, debido a la concentración de la masa de la estrella en una esfera de radio muy pequeño (véase la ecuación 13.23). Si la rapidez de escape excede de la velocidad de la luz c, la radiación del cuerpo (por ejemplo la luz visible) no puede escapar, y el objeto parece ser negro; de aquí el origen de la terminología "agujero negro". El radio crítico R_S al cual la rapidez de escape es c recibe el nombre de **radio de Schwarzschild** (figura 13.17). La superficie imaginaria de una esfera de este radio que roda al agujero negro se llama **horizonte de evento.** Éste es el límite de lo cerca que uno se puede aproximar al agujero negro y tener esperanza de escapar.

Aun cuando la luz de un agujero negro no puede escapar, la luz de eventos que tienen lugar cerca del agujero negro debe ser visibles. Por ejemplo, es posible para un sistema de una estrella binaria formada por una estrella normal y un agujero negro. El material que rodea la estrella ordinaria puede ser atraído hacia el agujero negro, formando un **disco de acreción** alrededor del agujero negro, como lo sugiere la figura 13.18. La fricción entre partículas del disco de acreción resulta en la transformación de energía mecánica en energía interna. En consecuencia, la altura orbital del material sobre el horizonte de evento disminuye y aumenta la temperatura. Este material de alta temperatura emite una gran cantidad de radiación, que se extiende a lo profundo en la región de rayos X del espectro electromagnético. Estos rayos X son característicos de un agujero negro. Varios posibles candidatos para agujeros negros han sido identificados por observación de estos rayos X.

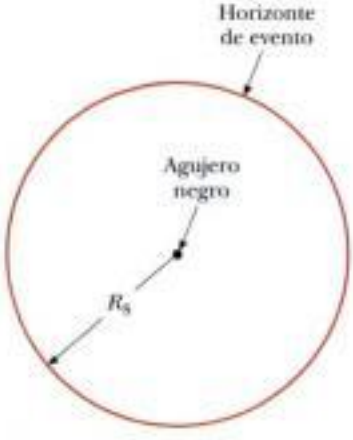
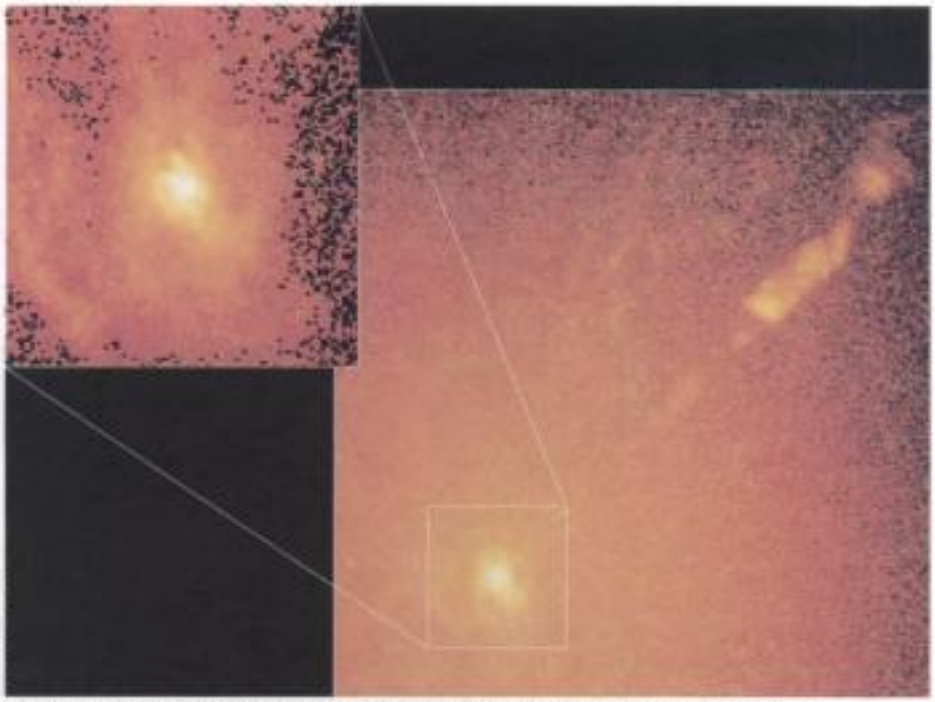


Figura 13.17 Un agujero negro. La distancia R_S es igual al radio de Schwarzschild. Cualquier evento que ocurra dentro de la frontera de radio R_S, llamado horizonte de evento, es invisible a un observador del exterior.

Figura 13.18 Sistema de estrellas binarias formado por una estrella ordinaria a la izquierda y un agujero negro a la derecha. La materia atraída desde la estrella ordinaria forma un disco de acreción alrededor del agujero negro, en el que la materia se eleva a temperaturas enormes, que resulta en la emisión de rayos X.

Materiał chroniony prawem autorskim



H. Ford et al. & NASA

Figura 13.19 Imágenes de la galaxia M87 tomadas desde el telescopio espacial Hubble. El recuadro muestra el centro de la galaxia. La imagen más abierta muestra un chorro de material que se aleja del centro de la galaxia hacia arriba a la derecha de la figura y a alrededor de un décimo de la velocidad de la luz. Se cree que estos chorros son evidencia de un agujero negro supergrande situado en el centro de la galaxia.

También hay evidencia de que existen agujeros negros supergrandes en los centros de galaxias, con masas mucho mayores que nuestro Sol. (Hay una fuerte evidencia de un agujero negro supergrande de masa de 2 a 3 millones de masas solares en el centro de nuestra galaxia.) Los modelos teóricos para estos extravagantes cuerpos predicen que chorros de material deben ser evidentes a lo largo del eje de rotación del agujero negro. La figura 13.19 muestra una fotografía de la galaxia M87 tomada desde el telescopio espacial Hubble. Se piensa que el chorro de material que proviene de esta galaxia es evidencia para un agujero negro supergrande en el centro de la galaxia.

RESUMEN

La ley de Newton de la gravitación universal expresa que la fuerza gravitacional de atracción entre dos partículas cualesquiera de masas m_1 y m_2, separadas por una distancia r, tiene la magnitud

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{13.1}$$

donde $G = 6.673\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$ es la **constante de la gravitación universal.** Esta ecuación hace posible que calculemos la fuerza de atracción entre masas bajo una amplia variedad de circunstancias.

Un cuerpo a una distancia h sobre la superficie de la Tierra, experimenta una fuerza gravitacional de magnitud mg, donde g es la aceleración en caída libre a esa elevación:

$$g = \frac{GM_E}{r^2} = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2} \tag{13.6}$$

En esta expresión, M_E es la masa de la Tierra y R_E es su radio. En consecuencia, el peso del cuerpo decrece cuando se aleja de la superficie terrestre.

Materiał chroniony prawem autorskim

Las leyes de Kepler del movimiento planetario expresan que

1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en un foco.
2. El radio vector trazado desde el Sol a un planeta barre áreas iguales en intervalos iguales.
3. El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

La tercera ley de Kepler se puede expresar como

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right)a^3 \tag{13.8}$$

donde M_S es la masa del Sol y a es el semieje mayor. Para una órbita circular, a puede ser sustituida en la ecuación 13.8 por el radio r. La mayor parte de los planetas tienen órbitas casi circulares alrededor del Sol.

El **campo gravitacional** en un punto en el espacio se define como la fuerza gravitacional experimentada por cualquier partícula de prueba situada en ese punto dividida entre la masa de la partícula de prueba:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} \tag{13.9}$$

La fuerza gravitacional es conservativa, y por lo tanto una función de energía potencial se puede definir como un sistema de dos cuerpos que interactúan en forma gravitacional. La **energía potencial gravitacional** asociada con dos partículas separadas por una distancia r es

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r} \tag{13.14}$$

donde U se toma como cero cuando $r \to \infty$. La energía potencial total para un sistema de partículas es la suma de las energías para todos los pares de partículas, con cada par representado por el término de la forma dada por la ecuación 13.14.

Si un sistema aislado está formado por un cuerpo de masa m que se mueve con una rapidez v en la cercanía de un cuerpo muy grande de masa M, la energía total E del sistema es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \tag{13.16}$$

La energía total es una constante del movimiento. Si el cuerpo se mueve en una órbita elíptica de semieje mayor a alrededor del cuerpo muy grande y si $M \gg m$, la energía total del sistema es

$$E = -\frac{GMm}{2a} \tag{13.19}$$

Para una órbita circular, esta misma ecuación aplica con $a = r$. La energía total es negativa para cualquier sistema enlazado.

La **rapidez de escape** para un cuerpo lanzado desde la superficie de un planeta de masa M y radio R es

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{13.23}$$

PREGUNTAS

1. Si la fuerza gravitacional sobre un cuerpo es directamente proporcional a su masa, ¿por qué los cuerpos de masas grandes caen con mayor aceleración que los pequeños?

2. La fuerza gravitacional ejercida por el Sol sobre una persona es hacia abajo en la Tierra por la noche, y hacia arriba en el cielo durante el día. Si la persona tuviera una báscula de baño suficien-

Materiał chroniony prawem autorskim

17. El cometa Halley (figura P13.17) se aproxima al Sol a una distancia de 0.570 UA, y su periodo orbital es de 75.6 años (UA es el sím-

21. Suponga que la gravedad del Sol desapareciera. Los planetas se saldrían de sus órbitas casi circulares y se alejarían en línea recta

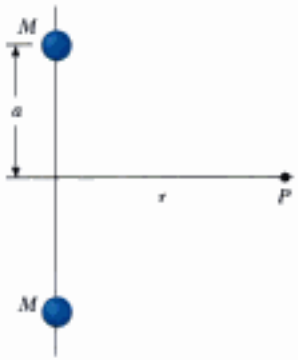


Figura P13.25

Sección 13.6 Energía potencial gravitacional

Suponga que $U = 0$ en $r = \infty$.

26. Un satélite de la Tierra tiene una masa de 100 kg y está a una altitud de 2.00×10^6 m. (a). ¿Cuál es la energía potencial del sistema formado por el satélite y la Tierra? (b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre el satélite. (c) **¿Qué pasaría si?** ¿Qué fuerza ejerce el satélite sobre la Tierra?

27. ¿Cuánta energía se necesita para mover un cuerpo de 1 000 kg de la superficie de la Tierra a una altitud del doble del radio de la Tierra?

28. En la superficie de la Tierra, un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba a una rapidez de 10.0 km/s. ¿A qué altura subirá? No haga caso de la resistencia del aire ni de la rotación de la Tierra.

29. Después que nuestro Sol agote su combustible nuclear, su destino final puede ser colapsarse a un estado de *enana blanca*, en la que tiene aproximadamente la misma masa que tiene ahora, pero un radio igual al radio de la Tierra. Calcule (a) el promedio de densidad de la enana blanca, (b) la aceleración en caída libre, y (c) la energía potencial gravitacional de un cuerpo de 1.00 kg en su superficie.

30. ¿Cuánto trabajo es realizado por el campo gravitacional de la Luna cuando un meteoro de 1 000 kg entra desde el espacio exterior y hace impacto sobre la superficie de la Luna?

31. Un sistema está formado por tres partículas, cada una de masa 5.00 g, situadas en las esquinas de un triángulo equilátero con lados de 30.0 cm. (a) Calcule la energía potencial del sistema. (b) Si las partículas se sueltan simultáneamente, ¿dónde chocarán?

32. Un cuerpo se suelta desde el reposo a una altitud h sobre la superficie de la Tierra. (a) Demuestre que su rapidez a una distancia r del centro de la Tierra, donde $R_E \leq r \leq R_E + h$, está dada por

$$v = \sqrt{2GM_E\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_E + h}\right)}$$

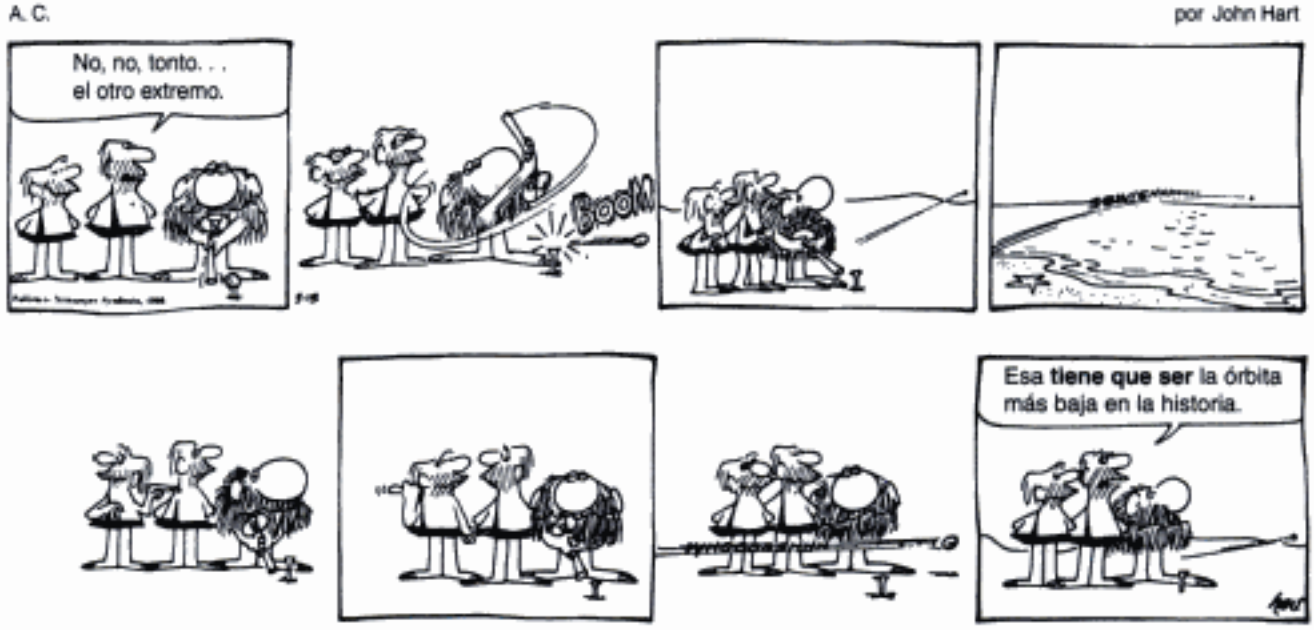
(b) Suponga que la altitud desde donde se soltó es 500 km. Evalúe la integral

$$\Delta t = \int_i^f dt = \int_i^f -\frac{dr}{v}$$

para hallar el tiempo de caída cuando el cuerpo se mueve del punto donde fue soltado a la superficie de la Tierra. El signo negativo aparece porque el cuerpo se mueve en sentido contrario a la dirección radial, de modo que su rapidez es $v = -dr/dt$. Evalúe numéricamente la integral.

Sección 13.7 Consideraciones de energía en el movimiento planetario y de satélites

33. Una sonda espacial es disparada como proyectil desde la superficie de la Tierra con una rapidez inicial de 2.00×10^4 m/s. ¿Cuál será su rapidez cuando está muy lejos de la Tierra? Haga caso omiso de la fricción y de la rotación de la Tierra.



Con permiso de John Hart y Creators Syndicate, Inc.

Figura P13.35

Materiał chroniony prawem autorskim

34. (a) ¿Cuál es la rapidez mínima, con respecto al Sol, necesaria para que una nave espacial escape del sistema solar si inicia en la órbita de la Tierra? (b) *Voyager I* alcanzó una rapidez máxima de 125 000 km/h en su camino para fotografiar Júpiter. ¿Más allá de qué distancia del Sol es esta rapidez suficiente para escapar del sistema solar?

35. Un "satélite de copa de árbol" (figura P13.35) se mueve en órbita circular apenas sobre la superficie de un planeta, que se supone no ofrece resistencia del aire. Demuestre que su rapidez orbital v y la rapidez de escape desde el planeta están relacionadas por la expresión

$$v_{esc} = \sqrt{2}\, v.$$

36. Un satélite de 500 kg está en órbita circular a una altitud de 500 km sobre la superficie de la Tierra. Debido a la fricción del aire, el satélite finalmente cae a la superficie de la Tierra, donde choca con el suelo a una rapidez de 2.00 km/s. ¿Cuánta energía se transformó en energía interna por medio de fricción?

37. Un satélite de masa 200 kg se coloca en órbita terrestre a una altura de 200 km sobre la superficie. (a) Con una órbita circular, ¿cuánto tarda el satélite para completar una órbita? (b) ¿Cuál es la rapidez del satélite? (c) ¿Cuál es la mínima energía de entrada necesaria para poner este satélite en órbita? Desprecie la resistencia del aire pero incluya el efecto de la rotación diaria del planeta.

38. Un satélite de masa m, originalmente sobre la superficie de la Tierra, se coloca en órbita terrestre a una altitud h. (a) Con una órbita circular, ¿cuánto tarda el satélite para completar una órbita? (b) ¿Cuál es la rapidez del satélite? (c) ¿Cuál es la mínima energía de entrada necesaria para poner este satélite en órbita? No haga caso de la resistencia del aire, pero incluya el efecto de la rotación diaria del planeta. ¿En qué lugar de la superficie de la Tierra y en qué dirección debe ser lanzado el satélite para reducir al mínimo la inversión necesaria de energía? Represente la masa y radio de la Tierra como M_E y R_E.

39. Un satélite de 1 000 kg gira en órbita alrededor de la Tierra a una altitud constante de 100 km. ¿Cuánta energía debe ser agregada al sistema para mover el satélite a una órbita circular con altitud de 200 km?

40. El planeta Urano tiene una masa de unas 14 veces la masa de la Tierra, y su radio es igual a alrededor de 3.7 radios de la Tierra. (a) Al hacer proporciones con los correspondientes valores de la Tierra, encuentre la aceleración en caída libre en la parte superior de las nubes de Urano. (b) Haciendo caso omiso de la rotación del planeta, encuentre la mínima rapidez de escape de Urano.

41. Determine la rapidez de escape para un cohete en el lado lejano de Ganímedes, la más grande de las lunas de Júpiter (figura P13.41). El radio de Ganímedes es 2.64×10^6 m, y su masa es 1.495×10^{23} kg. La masa de Júpiter es 1.90×10^{27} kg, y la distancia entre Júpiter y Ganímedes es 1.071×10^9 m. Asegúrese de incluir el efecto gravitacional debido a Júpiter, pero puede pasar por alto el movimiento de Júpiter y Ganímedes cuando giran alrededor de su centro de masa.

Figura P13.41

42. En la obra "La Luna es una áspera patrona" de Robert Heinlein, los colonos de la Luna amenazan con lanzar piedras a la Tierra si no les dan la independencia (o por lo menos una representación). Si se supone que un cañón sobre rieles podría lanzar una piedra de masa m al doble de la rapidez de escape lunar, calcule la rapidez de la piedra cuando entre a la atmósfera de la Tierra. (Por *rapidez de escape lunar* queremos decir la rapidez necesaria para alejarse infinitamente de la Luna estacionaria sola en el universo. El problema 61 del capítulo 8, del volumen II describe un cañón sobre rieles.)

43. Un objeto es disparado verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra (de radio R_E) con una rapidez inicial v_i que es comparable pero no menor que la rapidez de escape v_{esc}. (a) Demuestre que el cuerpo alcanza una altitud máxima h dada por

$$h = \frac{R_E v_i^2}{v_{esc}^2 - v_i^2}$$

(b) Un vehículo espacial es lanzado verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una rapidez inicial de 8.76 km/s, que es menor a la rapidez de escape de 11.2 km/s. ¿Qué altura máxima alcanza? (c) Un meteorito cae hacia la Tierra. Está esencialmente en reposo con respecto a la Tierra cuando está a una altura de 2.51×10^7 m. ¿Con qué rapidez golpea el meteorito a la Tierra? (d) **¿Qué pasaría si?** Suponga que una pelota de béisbol es lanzada verticalmente hacia arriba, con una rapidez inicial que es muy pequeña en comparación con la rapidez de escape. Demuestre que la ecuación de la parte (a) es consistente con la ecuación 4.13.

44. Deduzca una expresión para el trabajo necesario para mover un satélite terrestre de masa m, desde una órbita circular de radio $2R_E$ a una de radio $3R_E$.

45. Un cometa de masa 1.20×10^{10} kg se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. Su distancia desde el Sol varía entre 0.500 UA y 50.0 UA. (a) ¿Cuál es la excentricidad de su órbita? (b) ¿Cuál es su periodo? (c) En el afelio, ¿cuál es la energía potencial del sistema formado por el cometa y el Sol? *Nota:* 1 UA = una unidad astronómica = la distancia promedio del Sol a la Tierra = 1.496×10^{11} m.

46. Un satélite se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r. (a) ¿Cuál es la rapidez v_0 del satélite? De pronto, una explosión parte al satélite en dos masas, m y $4m$. Inmediatamente después de la explosión, la parte más pequeña de masa m queda estacionaria con respecto a la Tierra y cae directa hacia la Tierra. (b) ¿Cuál es la rapidez v_i de la pieza más grande inmediatamente después de la explosión? (c) Debido al aumento de su rapidez, esta pieza más grande ahora se mueve en una nueva órbita elíptica. Encuentre su distancia lejos del centro de la Tierra cuando llegue al otro extremo de la elipse.

Problemas adicionales

47. La nave espacial del observatorio solar y heliosférico (SOHO) tiene una órbita especial, seleccionada para que su vista del Sol nunca sea eclipsada y siempre esté cerca de la Tierra suficiente-

Material chroniony prawem autorskim

69. Dos estrellas de masas M y m, separadas por una distancia d, giran en órbitas circulares alrededor de su centro de masa (figura P13.69). Demuestre que cada estrella tiene un periodo dado por

$$T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G(M + m)}$$

Prosiga como se indica: Aplique la segunda ley de Newton a cada estrella. Nótese que la condición centro de masa exige que $Mr_2 = mr_1$, donde $r_1 + r_2 = d$.

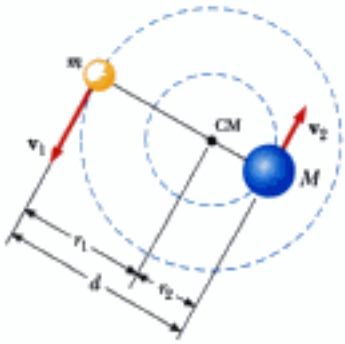


Figura P13.69

70. (a). Un cuerpo de 5.00 kg se suelta a 1.20×10^7 m del centro de la Tierra. ¿Con qué aceleración se mueve con respecto a la Tierra? (b) **¿Qué pasaría si?** Un cuerpo de 2.00×10^{24} kg se suelta a 1.20×10^7 m del centro de la Tierra. ¿Con qué aceleración se mueve con respecto a la Tierra? Suponga que los cuerpos se comportan como pares de partículas, aisladas del resto del universo.

71. La aceleración de un cuerpo que se mueve en el campo gravitacional de la Tierra es

$$\mathbf{a} = -\frac{GM_E\mathbf{r}}{r^3}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición dirigido desde el centro de la Tierra hacia el cuerpo. Si se escoge el origen en el centro de la Tierra, y se supone que el cuerpo pequeño se mueve en el plano xy, encontramos que los componentes rectangulares (cartesianos) de su aceleración son

$$a_x = -\frac{GM_E x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \qquad a_y = -\frac{GM_E y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Utilice computadora para establecer y realizar un pronóstico numérico del movimiento del cuerpo, según el método de Euler. Suponga que la posición inicial del cuerpo es $x = 0$ y $y = 2R_E$, donde R_E es el radio de la Tierra. Dé al cuerpo una velocidad inicial de 5 000 m/s en la dirección x. El incremento de tiempo debe hacerse tan pequeño como sea práctico. Intente 5 s. Grafique las coordenadas x e y del cuerpo a medida que transcurre el tiempo. ¿Este objeto choca con la Tierra? Varíe la velocidad inicial hasta que encuentre una órbita circular.

Respuestas a las *preguntas rápidas*

13.1 (d) La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre la Luna, proporciona una fuerza neta que produce la aceleración centrípeta de la Luna.

13.2 (e) La fuerza gravitacional sigue un comportamiento de inverso del cuadrado, de modo que duplicar la distancia hace que la fuerza sea de sólo un cuarto

13.3 (c) Un cuerpo en órbita está simplemente cayendo cuando se mueve alrededor de la Tierra. La aceleración del cuerpo es la debida a la gravedad. Como el cuerpo fue lanzado desde una montaña muy alta, el valor para g es ligeramente menor que el de la superficie.

13.4 (a) La tercera ley de Kepler (ecuación 13.8), que se aplica a todos los planetas, nos dice que el periodo de un planeta es proporcional a $a^{3/2}$. Como Plutón está más alejado del Sol de lo que está la Tierra, tiene un periodo más largo. El campo gravitacional del Sol es mucho más débil en Plutón de lo que es en la Tierra. En consecuencia, este planeta experimenta una aceleración centrípeta mucho menor que la Tierra, y tiene un periodo respectivamente más largo.

13.5 (a) De la tercera ley de Kepler y el periodo dado, se puede calcular el eje mayor del asteroide. Se encuentra que es de 1.2×10^{11} m. Como esto es menor que la distancia entre la Tierra y el Sol, no hay posibilidad de que el asteroide choque con la Tierra.

13.6 (b) Por conservación de la cantidad de movimiento angular, $mv_p r_p = mv_a r_a$, por lo que $v_p = (r_a/r_p)v_a = (4D/D)v_a = 4v_a$.

13.7 (a) Perihelio. Debido a la conservación de la cantidad de movimiento angular, la rapidez del cometa es máxima en su posición más cercana al Sol. (b) Afelio. La energía potencial del sistema formado por el cometa y el Sol es máxima cuando el cometa está en su máxima distancia del Sol. (c) Perihelio. La energía cinética es máxima en el punto en el que la rapidez del cometa es máxima. (d) Todos los puntos. La energía total del sistema es la misma, sin importar en qué lugar se encuentre el cometa en su órbita.

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 14

Mecánica de fluidos

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

14.1 Presión

14.2 Variación de la presión con la profundidad

14.3 Mediciones de presión

14.4 Empujes hidrostáticos o fuerza boyante y el principio de Arquímedes

14.5 Dinámica de fluidos

14.6 Ecuación de Bernoulli

14.7 Otras aplicaciones de dinámica de fluidos

▲ *Estos globos de aire caliente flotan porque están llenos con aire a alta temperatura y están rodeados de aire más denso que está a temperatura más baja. En este capítulo exploraremos el empuje hidrostático que sostiene estos globos y otros cuerpos flotantes (Richard Megna/Fundamental Photographs)*

Materiał chroniony prawem autorskim

Normalmente la materia se clasifica en uno de tres estados: sólido, líquido o gaseoso. De nuestra experiencia diaria, sabemos que un sólido tiene un volumen una y forma definidos. Un ladrillo mantiene siempre su conocida forma y tamaño. También sabemos que un líquido tiene volumen definido, pero no forma definida. Por último, sabemos que un gas no confinado no tiene forma ni volumen definidos. Estas descripciones nos ayudan a visualizar los estados de la materia, pero son un tanto artificiales. Por ejemplo, normalmente el asfalto y los productos plásticos son sólidos, pero en periodos largos de tiempo, tienen tendencia a fluir como líquidos. Del mismo modo, casi todas las sustancias pueden ser sólidas, o líquidas, o un gas (o una combinación de cualquiera de éstos), dependiendo de la temperatura y presión. En general, el tiempo que tarda una sustancia en particular para cambiar su forma en respuesta a una fuerza externa, determina si tratamos la sustancia como un sólido, un líquido o un gas.

Un **fluido** es un conjunto de moléculas que están dispuestas al azar y se mantienen juntas por medio de débiles fuerzas de cohesión, así como por fuerzas ejercidas por las paredes de un recipiente. Líquidos y gases son fluidos.

En nuestro tratamiento de la mecánica de fluidos, no necesitamos aprender más principios físicos para explicar efectos como el empuje hidrostático que actúa sobre un cuerpo sumergido y la fuerza ascensional que actúa sobre el ala de un avión. Primero, consideramos la mecánica de un fluido en reposo, es decir, *estática de los fluidos*. A continuación tratamos la mecánica de fluidos en movimiento, esto es, *dinámica de los fluidos*. Podemos describir un fluido en movimiento al usar un modelo que está basado en ciertas suposiciones de simplificación.

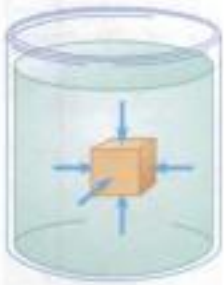


Figura 14.1 En cualquier punto en la superficie de un cuerpo sumergido, la fuerza ejercida por el fluido es perpendicular a la superficie del cuerpo. La fuerza ejercida por el fluido sobre las paredes del recipiente es perpendicular a las paredes en todos los puntos.

14.1 Presión

Los fluidos no sostienen esfuerzos cortantes ni esfuerzos, por lo que el único esfuerzo que puede ser ejercido sobre un cuerpo sumergido en un fluido estático es el que tiende a comprimir el cuerpo desde todos los lados. En otras palabras, la fuerza ejercida por un fluido estático sobre un objeto es siempre perpendicular a las superficies del objeto, como se muestra en la figura 14.1.

La presión en un fluido se puede medir con el aparato que se ve en la figura 14.2. Este aparato consta de un cilindro al vacío que encierra un émbolo ligero conectado a un resorte. Cuando el aparato se sumerge en un fluido, éste presiona sobre la parte superior del émbolo y comprime el resorte hasta que la fuerza hacia dentro ejercida por el fluido queda balanceada por la fuerza hacia fuera ejercida por el resorte. La presión del fluido se puede medir directamente si el resorte se calibra de antemano. Si F es la magnitud de la fuerza ejercida sobre el émbolo y A es el área superficial del émbolo, entonces la **presión** P del fluido en el nivel al cual el aparato se haya sumergido se define como la razón F/A:

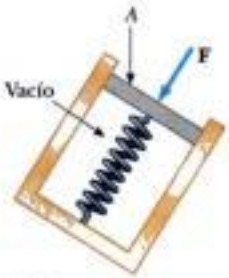


Figura 14.2 Aparato sencillo para medir la presión ejercida por un fluido.

$$P \equiv \frac{F}{A} \tag{14.1}$$

Definición de presión

Nótese que la presión es una cantidad escalar porque es proporcional a la magnitud de la fuerza sobre el émbolo.

Si la presión varía sobre un área, podemos evaluar la fuerza infinitesimal dF sobre cualquier elemento superficial de área dA como

Materiał chroniony prawem autorskim

Earl Young/Getty Images

Las raquetas impiden que una persona se hunda en nieve blanda, porque en una superficie grande extienden la fuerza hacia abajo ejercida sobre la nieve, reduciendo así la presión sobre la superficie de nieve.

¡ADVERTENCIA!

14.1 Fuerza y presión

Las ecuaciones 14.1 y 14.2 hacen una clara distinción entre fuerza y presión. Otra importante distinción es que la *fuerza es un vector*, y la *presión es un escalar*. No hay dirección asociada con la presión, pero la dirección de la fuerza asociada con la presión es perpendicular a la superficie de interés.

$$dF = P\,dA \tag{14.2}$$

donde P es la presión en la ubicación del área dA. La presión ejercida por un fluido varía con la profundidad. Por lo tanto, para calcular la fuerza total ejercida sobre una pared vertical plana de un recipiente, debemos integrar la ecuación 14.2 sobre el área superficial de la pared.

Debido a que la presión es fuerza por unidad de área, tiene unidades de Newtons por metro cuadrado (N/m^2) en el sistema SI. Otro nombre para la unidad de presión del SI es el **pascal** (Pa):

$$1\ \text{Pa} \equiv 1\ \text{N/m}^2 \tag{14.3}$$

Pregunta rápida 14.1 Supongamos que usted está de pie directamente detrás de una persona que retrocede y accidentalmente lo pisa con el tacón de un zapato. ¿Estaría usted mejor si esa persona fuera (a) un enorme jugador profesional de baloncesto que usa zapatos tenis (b) una mujer pequeña que usa zapatos de tacón alto?

Ejemplo 14.1 La cama de agua

El colchón de una cama de agua mide 2.00 m de largo por 2.00 m de ancho y 30.0 cm de altura.

(A) Encuentre el peso del agua del colch6ón.

Solución La densidad del agua dulce es 1 000 kg/m^3 (véase la tabla 14.1 en la página 423), y el volumen de agua que llena la cama es $V = (2.00\ \text{m})(2.00\ \text{m})(0.300\ \text{m}) = 1.20\ \text{m}^3$. En consecuencia, con el uso de la ecuación 1.1, la masa del agua de la cama es

$$M = \rho V = (1\,000\ \text{kg/m}^3)(1.20\ \text{m}^3) = 1.20 \times 10^3\ \text{kg}$$

y su peso es

$$Mg = (1.20 \times 10^3\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = \mathbf{1.18 \times 10^4\ N}$$

Esto es alrededor de 2 650 libras (una cama normal pesa unas 300 libras). Como esta carga es tan grande, es mejor que estas camas de agua se coloquen en el sótano o en un piso sólido y bien cimentado.

(B) Encuentre la presión ejercida por el agua sobre el piso cuando la cama apoya en su posición normal. Suponga que toda la superficie inferior de la cama hace contacto con el piso.

Solución Cuando la cama está en su posición normal, el área de contacto con el piso es 4.00 m^2; por lo tanto, de la ecuación 14.1 encontramos que

$$P = \frac{1.18 \times 10^4\ \text{N}}{4.00\ \text{m}^2} = \mathbf{2.95 \times 10^3\ Pa}$$

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si la cama de agua es sustituida por una cama ordinaria de 300 libras sostenida por cuatro patas? Cada pata tiene un área de sección transversal circular de 2.00 cm de radio. ¿Qué presión ejerce este cama en el piso?

Respuesta El peso de la cama se distribuye sobre cuatro secciones transversales circulares de la parte inferior de las patas. En consecuencia, la presión es

$$P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{4(\pi r^2)} = \frac{300\ \text{lb}}{4\pi(0.0200\ \text{m})^2}\left(\frac{1\ \text{N}}{0.225\ \text{lb}}\right)$$

$$= 2.65 \times 10^5\ \text{Pa}$$

Ésta es casi 100 veces mayor que la presión debida a la cama de agua, porque el peso de la cama ordinaria, aun cuando es mucho menor que el peso de la cama de agua, se aplica sobre el área muy pequeña de las cuatro patas. La alta presión sobre el piso en las patas de una cama ordinaria podría hacer una marca en pisos de madera o dañar en forma permanente el pelo de alfombras. En contraste, una cama de agua requiere un piso fuerte para que soporte el peso muy grande.

Materiał chroniony prawem autorskim

Tabla 14.1

Densidades de algunas sustancias comunes a condiciones estándares temperatura (0°C) y presión (atmosférica)

Sustancia	ρ(kg/m^3)	Sustancia	ρ(kg/m^3)
Aire	1.29	Hielo	0.917×10^3
Aluminio	2.70×10^3	Hierro	7.86×10^3
Benzeno	0.879×10^3	Plomo	11.3×10^3
Cobre	8.92×10^3	Mercurio	13.6×10^3
Alcohol etílico	0.806×10^3	Roble	0.710×10^3
Agua dulce	1.00×10^3	Oxígeno	1.43
Glicerina	1.26×10^3	Pino	0.373×10^3
Oro	19.3×10^3	Platino	21.4×10^3
Helio	1.79×10^{-1}	Agua de mar	1.03×10^3
Hidrógeno	8.99×10^{-2}	Plata	10.5×10^3

14.2 Variación de la presión con la profundidad

Como bien lo saben los buceadores, la presión del agua aumenta con la profundidad. Del mismo modo, la presión atmosférica disminuye con la altitud creciente; por esta razón, las naves que vuelen a grandes alturas deben tener cabinas presurizadas.

A continuación demostramos la forma en que la presión en un líquido aumenta con la profundidad. Como lo describe la ecuación 1.1, la *densidad* de una sustancia se define como su masa por unidad de volumen; la tabla 14.1 es una lista de densidades de varias sustancias. Estos valores varían ligeramente con la temperatura, porque de ésta depende el volumen de una sustancia (como se demuestra en el capítulo 19). Bajo condiciones estándares (a 0°C y presión atmosférica), las densidades de gases son alrededor de 1/1 000 de las densidades de sólidos y líquidos. Esta diferencia en densidades implica que el promedio de espaciamiento molecular en un gas bajo estas condiciones es alrededor de diez veces mayor que en un sólido o líquido.

Ahora considere un líquido de densidad ρ en reposo, como se muestra en la figura 14.3. Suponemos que ρ es uniforme en todo el líquido; esto significa que el líquido es incompresible. Seleccionemos una muestra del líquido contenido dentro de un cilindro imaginario de área A de sección transversal que se extiende de la profundidad d a la profundidad $d + h$. El líquido externo a nuestra muestra ejerce fuerzas en todos los puntos sobre la superficie de la muestra, perpendicular a la superficie. La presión ejercida por el líquido sobre la cara del fondo de la muestra es P, y la presión en la cara superior es P_0. Por lo tanto, la fuerza hacia arriba ejercida por el fluido exterior sobre el fondo del cilindro tiene una magnitud PA, y la fuerza hacia abajo ejercida sobre la parte superior tiene una magnitud P_0A. La masa de líquido del cilindro es $M = \rho V = \rho Ah$; en consecuencia, el peso del líquido en el cilindro es $Mg = \rho Ahg$. Como el cilindro está en equilibrio, la fuerza neta que actúa sobre él debe ser cero. Si se escoge hacia arriba como la dirección y positiva, vemos que

$$\sum \mathbf{F} = PA\hat{\mathbf{j}} - P_0A\hat{\mathbf{j}} - M\mathbf{g}\hat{\mathbf{j}} = 0$$

o bien;

$$PA - P_0A - \rho Ahg = 0$$
$$PA - P_0A = \rho Ahg$$

$$P = P_0 + \rho gh \qquad (14.4)$$

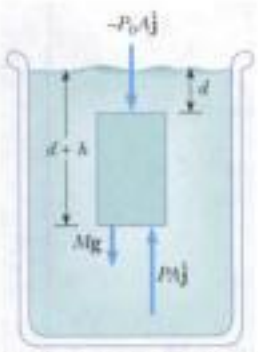


Figura 14.3 Una porción de fluido (región más oscura) en un volum en más grande de fluido está separado. La fuerza neta ejercida sobre la porción de fluido debe ser cero, porque está en equilibrio.

Variación de presión con la profundidad

Esto es, **la presión P a una profundidad h abajo de un punto del líquido al cual la presión es P_0 es mayor en una cantidad ρgh.** Si el líquido está abierto a la atmósfera y P_0 es la presión en la superficie del líquido, entonces P_0 es la presión atmosférica. En nuestros

Materiał chroniony prawem autorskim

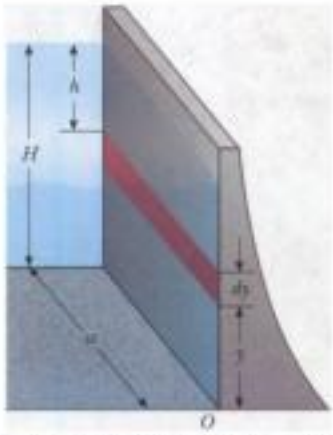


Figura 14.5 (Ejemplo 14.4) Como la presión varía con la profundidad, la fuerza total ejercida sobre una presa debe obtenerse de la expresión $F = \int P dA$, donde dA es el área de la franja roja.

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si nos piden hallar esta fuerza sin usar cálculo? ¿Cómo podríamos determinar este valor?

Respuesta Sabemos de la ecuación 14.4 que la presión varía linealmente con la profundidad. Por lo tanto, el promedio de presión debida al agua sobre la cara de la presa es el promedio de la presión en la parte superior y la presión en el fondo:

$$P_{\text{prom}} = \frac{P_{\text{sup}} + P_{\text{fondo}}}{2} = \frac{0 + \rho g H}{2} = \tfrac{1}{2}\rho g H$$

Ahora, la fuerza total es igual al promedio de presión por el área de la cara de la presa:

$$F = P_{\text{prom}} A = (\tfrac{1}{2}\rho g H)(Hw) = \tfrac{1}{2}\rho g w H^2$$

que es el mismo resultado que obtuvimos usando cálculo.

14.3 Mediciones de presión

Durante el reporte del clima en un programa informativo de televisión, con frecuencia se indica la *presión barométrica*. Ésta es la presión actual de la atmósfera, que varía en un pequeño margen a partir del valor estándar proporcionado antes. ¿Cómo se mide esta presión?

Un instrumento que se emplea para medir la presión atmosférica es el barómetro común, inventado por el Evangelista Torricelli (1608-1647). Un tubo largo cerrado en un extremo se llena con mercurio y luego se invierte en un vaso de mercurio (figura 14.6a). El extremo cerrado del tubo está casi al vacío, de modo que la presión en la parte superior de la columna de mercurio se puede tomar como cero. En la figura 14.6a, la presión en el punto A, debida a la columna de mercurio, debe ser igual a la presión en el punto B, debida a la atmósfera. Si éste no fuera el caso, habría una fuerza neta que movería al mercurio de un punto al otro hasta que se establece un equilibrio. Por lo tanto, se deduce que $P_0 = \rho_{\text{Hg}} g h$, donde ρ_{Hg} es la densidad del mercurio y h es la altura de la columna de mercurio. Cuando varía la presión atmosférica, varía la altura de la columna de mercurio, de modo que la altura se puede calibrar para medir la presión atmosférica. Determinemos la altura de una columna de mercurio para una atmósfera de presión, $P_0 = 1$ atm $= 1.013 \times 10^5$ Pa:

$$P_0 = \rho_{\text{Hg}} g h \longrightarrow h = \frac{P_0}{\rho_{\text{Hg}} g} = \frac{1.013 \times 10^5 \text{ Pa}}{(13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2)} = 0.760 \text{ m}$$

Con base en un cálculo como éste, una atmósfera de presión se define como la presión equivalente de una columna de mercurio que mide exactamente 0.760 0 m de altura a 0°C.

Un aparato para medir la presión de un gas contenido en un recipiente es el manómetro de tubo abierto que se ilustra en la figura 14.6b. Un extremo de un tubo en forma de U que contiene un líquido está abierto a la atmósfera, y el otro extremo se conecta a un sistema de presión P desconocida. Las presiones en los puntos A y B deben ser iguales (de otro modo, la porción curvada en A es la presión desconocida del gas. Por lo tanto, al igualar la presión desconocida P con la presión en el punto B, vemos que $P = P_0 + \rho g h$. La diferencia en presión $P - P_0$ es igual a $\rho g h$. La presión P se denomina **presión absoluta,** mientras que la diferencia $P - P_0$ se llama **presión manométrica.** Por ejemplo, la presión que medimos en la llanta de una bicicleta es presión manométrica.

Figura 14.6 Dos aparatos para medir presión: (a) barómetro de mercurio y (b) manómetro de tubo abierto.

Materiał chroniony prawem autorskim

Esta ecuación nos dice que **la fracción del volumen de un objeto flotante que está abajo de la superficie del líquido es igual a la razón entre la densidad del objeto y la del líquido.**

Bajo condiciones normales, el peso de un pez es ligeramente mayor que el empuje hidrostático debido al agua. Se deduce que el pez se hundiría si no tuviera algún mecanismo para ajustar el empuje hidrostático. El pez logra esto al regular internamente el tamaño de su vejiga natatoria llena de aire para aumentar su volumen y la magnitud del empuje hidrostático que actúa sobre él. De este modo, los peces pueden nadar a diferentes profundidades.

Figura activa 14.10 Un cuerpo que flota en la superficie de un líquido experimenta dos fuerzas, la fuerza gravitacional $\mathbf{F}_g$ y el empuje hidrostático **B**. Como el cuerpo flota en equilibrio, $B = F_g$.

En el vínculo* Active Figures *en* http://www.pse6.com, *usted podrá cambiar las densidades del cuerpo y el líquido.

Pregunta rápida 14.5 Una manzana se mantiene completamente sumergida apenas abajo de la superficie en un recipiente con agua. La manzana se empuja a un punto más profundo en el agua. En comparación con la fuerza necesaria para mantener la manzana apenas abajo de la superficie, la fuerza necesaria para mantenerla en un punto más profundo es (a) mayor (b) igual (c) menor (d) imposible de determinar.

Pregunta rápida 14.6 Un vaso de agua contiene un solo cubo de hielo flotante (figura 14.11). Cuando el hielo se derrite, ¿el nivel del agua (a) sube (b) baja (c) permanece igual?

Figura 14.11 (Pregunta rápida 14.6) Un cubo de hielo flota en la superficie del agua. ¿Qué le pasa al nivel del agua cuando el cubo de hielo se derrite?

Pregunta rápida 14.7 Un barco naufraga en mitad del océano y uno de los pasajeros flota en una balsa. La carga en la balsa incluye un arcón de tesoro lleno de oro que encontró antes de hundirse el barco, y la balsa apenas se mantiene a flote. Para mantenerla flotando lo más alto que sea posible en el agua, el pasajero ¿debe (a) dejar el arcón del tesoro en lo alto de la balsa (b) asegurar el arcón del tesoro por el lado de abajo de la balsa (c) colgar el arcón del tesoro en el agua con una cuerda atada a la balsa? (Suponga que lanzar el arcón del tesoro por la borda no es una opción que el pasajero desea considerar).

Ejemplo 14.5 ¡Eureka!

Supuestamente alguien pidió a Arquímedes determinar si una corona hecha para el rey era de oro puro. La leyenda dice que él resolvió el problema al pesar la corona primero en aire y luego en agua, como se ve en la figura 14.12. Suponga que la báscula indicó 7.84 N en aire y 6.84 N en agua. ¿Qué le dijo Arquímedes al rey?

Solución La figura 14.12 nos ayuda a conceptualizar el problema. Por nuestro conocimiento del empuje hidrostático, sabemos que la lectura de la báscula será menor en la figura 14.12b que en la figura 14.12a. La lectura de la báscula es una medida de una de las fuerzas que actúan en la corona, y reconocemos que la corona está estacionaria. Por lo tanto, podemos clasificar éste como un problema de equilibrio. Para analizar el problema, nótese que cuando la corona está suspendida en el aire, la báscula indica su peso verdadero $T_1 = F_g$ (despreciando la fuerza ascensional del aire). Cuando se sumerge en agua, el empuje hidrostático **B** reduce la lectura de la báscula a un peso *aparente* de $T_2 = F_g - B$. Como la corona está en equilibrio, la fuerza neta sobre ella es cero. Cuando la corona está en agua,

$$\sum F = B + T_2 - F_g = 0$$

de modo que

$$B = F_g - T_2 = 7.84\ \text{N} - 6.84\ \text{N} = 1.00\ \text{N}$$

Como este empuje hidrostático es igual en magnitud al peso del agua desalojada, tenemos $\rho_w g V_w = 1.00$ N, donde V_w es el volumen del agua desalojada y ρ_w es su densidad. También, el volumen de la corona V_c es igual al volumen del agua desalo-

Materiał chroniony prawem autorskim

(a) (b)

Figura 14.12 (Ejemplo 14.5) (a) Cuando la corona está suspendida en el aire, en la escala se puede leer su peso real porque $T_1 = F_g$ (la fuerza ascencional del aire es despreciable). (b) Cuando la corona se sumerge en agua, el empuje hidrostático cambia la lectura de la escala a un valor menor $T_2 = F_g - B$.

jada, porque la corona está completamente sumergida. Por lo tanto,

$$V_c = V_w = \frac{1.00\ \text{N}}{\rho_w g} = \frac{1.00\ \text{N}}{(1\,000\ \text{kg/m}^3)(9.80\ \text{m/s}^2)}$$
$$= 1.02 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$$

Finalmente, la densidad de la corona es

$$\rho_c = \frac{m_c}{V_c} = \frac{m_c g}{V_c g} = \frac{7.84\ \text{N}}{(1.02 \times 10^{-4}\ \text{m}^3)(9.80\ \text{m/s}^2)}$$
$$= 7.84 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$$

Para finalizar el problema, de la Tabla 14.1 vemos que la densidad del oro es 19.3×10^3 kg/m^3. En consecuencia, Arquímedes debió decir al rey que lo habían engañado, porque la corona, o estaba hueca, o no era de oro puro.

¿Qué pasaría si? Suponga que la corona tenía el mismo peso, pero era de oro puro y no estaba hueco. ¿Cuál sería la lectura de la báscula cuando la corona se sumergió en agua?

Respuesta Primero hallamos el volumen de la corona de oro sólido:

$$V_c = \frac{m_c}{\rho_c} = \frac{m_c g}{\rho_c g} = \frac{7.84\ \text{N}}{(19.3 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(9.80\ \text{m/s}^2)}$$
$$= 4.15 \times 10^{-5}\ \text{m}^3$$

Ahora, el empuje hidrostático sobre la corona será

$$B = \rho_w g V_w = \rho_w g V_c$$
$$= (1.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(9.80\ \text{m/s}^2)(4.15 \times 10^{-5}\ \text{m}^3)$$
$$= 0.406\ \text{N}$$

y la tensión en la cuerda que cuelga de la báscula es

$$T_2 = F_g - B = 7.84\ \text{N} - 0.406\ \text{N} = 7.43\ \text{N}$$

Ejemplo 14.6 Una sorpresa para el Titanic

Un témpano flotante en agua de mar, como se ve en la figura 14.13a, es sumamente peligroso, porque la mayor parte del hielo está bajo la superficie. Este hielo oculto puede dañar un barco que está todavía a una considerable distancia del hielo visible. ¿Qué parte del témpano está abajo del nivel del agua?

Solución Este problema corresponde al Caso 2. El peso del témpano es $F_g = \rho_i V_i g$, donde $\rho_i = 917$ kg/m^3 y V_i es el volumen de todo el témpano. La magnitud del empuje hidrostático hacia arriba es igual al peso del agua desalojada: $B = \rho_w V_w g$, donde V_w, el volumen del agua desalojada, es igual al volumen del hielo bajo el agua (la región sombreada de la figura 14.13b) y ρ_w es la densidad del agua de mar, $\rho_w = 1\,030$ kg/m^3. Como $\rho_i V_i g = \rho_w V_w g$, la fracción de hielo bajo la superficie del agua es

$$f = \frac{V_w}{V_i} = \frac{\rho_i}{\rho_w} = \frac{917\ \text{kg/m}^3}{1\,030\ \text{kg/m}^3} = \mathbf{0.890} \quad \text{u} \quad \mathbf{89.0\%}$$

(a) (b)

Figura 14.13 (Ejemplo 14.6) (a) Casi todo el volumen de este témpano está bajo el agua. (b) Un barco puede ser dañado cuando no se encuentre cerca del hielo visible.

Materiał chroniony prawem autorskim

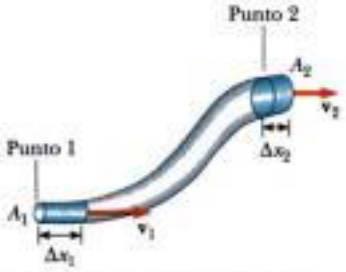


Figura 14.17 Fluido que se mueve con flujo estable en un tubo de área de sección transversal variable. El volumen de fluido que circula por el área A_1 en un intervalo Δt debe ser igual al volumen que circula por el área A_2 en el mismo intervalo. Por lo tanto, $A_1 v_1 = A_2 v_2$.

en la figura 14.16. Un conjunto de líneas de flujo como las de la figura 14.16 forman un *tubo de flujo*. Nótese que partículas de fluido no pueden fluir hacia dentro o hacia fuera de los lados de este tubo; si pudieran, entonces las líneas de flujo se cruzarían unas con otras.

Considere un fluido ideal que circula por un tubo de medida no uniforme, como se ilustra en la figura 14.17. Las partículas del fluido se mueven a lo largo de líneas de flujo en flujo estable. En un intervalo Δt, el fluido en el extremo inferior del tubo se mueve una distancia $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$. Si A_1 es el área de la sección transversal en esta región, entonces la masa de fluido contenido en la región sombreada izquierda de la figura 14.17 es $m_1 = \rho A_1 \Delta x_1 = \rho A_1 v_1 \Delta t$, donde ρ es la densidad (no cambiante) del fluido ideal. De igual modo, el fluido que se mueve por el extremo superior del tubo en el intervalo Δt tiene una masa $m_2 = \rho A_2 v_2 \Delta t$. Sin embargo, como el fluido es incompresible y el flujo es estable, la masa que cruza A_1 en un intervalo Δt debe ser igual a la masa que cruza A_2 en el mismo intervalo. Esto es, $m_1 = m_2$, o $\rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2$; esto significa que

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{constante} \tag{14.7}$$

Esta expresión se denomina **ecuación de continuidad para fluidos.** Expresa que

el producto del área y la rapidez del fluido en todos los puntos a lo largo de un tubo, es constante para un fluido incompresible.

La ecuación 14.7 nos dice que la rapidez es alta donde el tubo es estrechado (A pequeña) y baja cuando el tubo es ancho (A grande). El producto Av, que tiene las dimensiones de volumen por unidad de tiempo, se denomina *gasto volumétrico* o *caudal*. La condición Av = constante es equivalente al enunciado de que el volumen del fluido que entra por un extremo de un tubo en un intervalo dado es igual al volumen que sale por el otro extremo del tubo en el mismo intervalo, si no hay fugas.

Se demuestra la ecuación de continuidad cada vez que regamos el jardín con el pulgar puesto en el extremo de una manguera de jardín, como se ve en la figura 14.18. Al bloquear parcialmente la abertura con el pulgar, se reduce el área de sección transversal por donde pasa el agua. Como resultado de esto, la rapidez del agua aumenta cuando sale por la manguera, y se puede regar a una distancia mayor.

Pregunta rápida 14.8 Se unen dos popotes por sus extremos para hacer uno más largo sin fugas. Un popote tiene radio de 3 mm y el otro de 5 mm. Si se bebe un líquido a través de la combinación de popotes, en cuál de ellos tendrá mayor velocidad el líquido: (a) el que está mas cerca de la boca, (b) el de radio de 3 mm, (c) el de radio de 5 mm, (d) la velocidad es la misma en ambos.

George Semple

Figura 14.18 La rapidez del agua de riego del extremo de una manguera de jardín, aumenta cuando con el pulgar reduce la abertura.

Materiał chroniony prawem autorskim

aumenta, la presión disminuye. Este *efecto Bernoulli* explica la experiencia con el camión en la carretera con que iniciamos esta sección. Cuando pasa aire entre un auto y el camión, debe pasar por un canal relativamente estrechado. Según la ecuación de continuidad, la rapidez del aire es más alta. De acuerdo con el efecto Bernoulli, esta rapidez más alta del aire ejerce menor presión sobre el auto que el aire más lento en el otro lado del auto. Por lo tanto, hay una fuerza neta que empuja al auto hacia el camión.

Pregunta rápida 14.9 Una persona observa dos globos de helio que flotan uno junto al otro en los extremos de cuerdas aseguradas a una mesa. Las caras de los globos que están una frente a la otra están separadas por 1-2 centímetros. La persona sopla por el pequeño espacio entre los globos. ¿Qué ocurre a los globos? (a) Se mueven uno hacia el otro. (b) Se alejan uno del otro. (c) No se afectan.

Ejemplo 14.9 El tubo Venturi

El tubo horizontal constreñido que se ilustra en la figura 14.20, conocido como *tubo Venturi*, se puede usar para medir la rapidez de flujo de un fluido incompresible. Determine la rapidez de flujo en el punto 2 si se conoce la diferencia de presión $P_1 - P_2$.

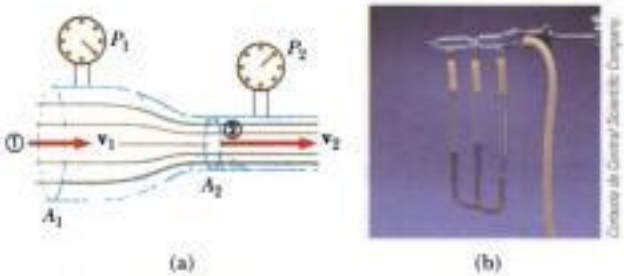


Figura 14.20 (Ejemplo 14.9) (a) La presión P_1 es mayor que la presión P_2 porque $v_1 < v_2$. Este aparato se puede usar para medir la rapidez de flujo de un fluido. (b) Tubo Venturi en la parte superior de la fotografía. El nivel más alto de fluido de la columna del centro muestra que la presión en la parte superior de la columna, que es la región constreñida del tubo Venturi, es más baja.

Solución Como el tubo es horizontal, $y_1 = y_2$, y la aplicación de la ecuación 14.8 a los puntos 1 y 2 da

$$(1) \qquad P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

De la ecuación de continuidad, $A_1 v_1 = A_2 v_2$, encontramos que

$$(2) \qquad v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

La sustitución de esta expresión en la ecuación (1) da

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2^2 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_2 = A_1\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

Podemos usar este resultado y la ecuación de continuidad para obtener una expresión para v_1. Como $A_2 < A_1$, la ecuación (2) muestra que $v_2 > v_1$. Este resultado, junto con la ecuación (1), indica que $P_1 > P_2$. En otras palabras, la presión se reduce en la parte constreñida del tubo.

Ejemplo 14.10 Ley de Torricelli

Un tanque cerrado que contiene un líquido de densidad ρ, tiene un agujero en un lado a una distancia y_1 del fondo del tanque (figura 14.21). El agujero está abierto a la atmósfera, y su diámetro es mucho menor que el diámetro del tanque. El aire arriba del líquido se mantiene a una presión P. Determine la rapidez del líquido cuando sale por el agujero cuando el nivel del líquido está a una distancia h arriba del agujero.

Solución Como $A_2 >> A_1$, el líquido está aproximadamente en reposo en la parte superior del tanque, donde la presión es P. Si se aplica la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2, y se observa que en el agujero P_1 es igual a la presión atmosférica P_0, encontramos que

$$P_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P + \rho g y_2$$

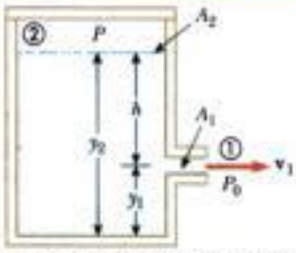


Figura 14.21 (Ejemplo 14.10) Un líquido sale de un agujero de un tanque con rapidez v_1.

Pero $y_2 - y_1 = h$; por lo tanto, esta expresión se reduce a

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P - P_0)}{\rho} + 2gh}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

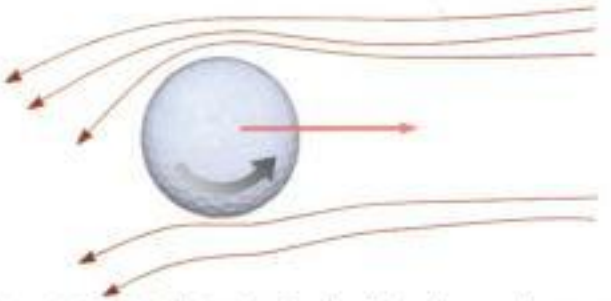


Figura 14.23 Debido a la desviación de aire, la pelota de golf que gira experimenta una fuerza de sustentación que le permite desplazarse mucho más lejos de lo que lo haría si no girara.

ce debida al efecto de fricción en el movimiento de traslación de la pelota. Por la misma razón, el forro de una pelota de béisbol ayuda a que ésta "agarre" el aire que pasa junto a ella y ayuda a desviarla cuando se lanza una "curva".

Varios dispositivos operan por medio de los diferenciales de presión que resultan de diferencias en la rapidez de un fluido. Por ejemplo, una corriente de aire que pase sobre un extremo de un tubo abierto, el otro extremo el cual está inmerso en un líquido, reduce la presión arriba del tubo, como se ve en la figura 14.24. Esta reducción en presión hace que el líquido suba hacia el chorro de aire. El líquido se dispersa luego en un fino rocío de gotitas. Se puede reconocer el atomizador que se usa en botellas de perfume y rociadores de pintura.

Figura 14.24 Un chorro de aire que pase sobre un tubo sumergido en un líquido, hace que el líquido suba por el tubo.

RESUMEN

La **presión** P en un fluido es la fuerza por unidad de área ejercida por el fluido sobre una superficie:

$$P = \frac{F}{A} \tag{14.1}$$

En el sistema SI, la presión tiene unidades de newtons por metro cuadrado (N/m^2), y 1 N/m^2 = 1 **pascal** (Pa).

La presión en un fluido en reposo varía con la profundidad h del fluido según la expresión

$$P = P_0 + \rho g h \tag{14.4}$$

donde P_0 es la presión en $h = 0$ y ρ es la densidad del fluido, que se supone uniforme.

La **ley de Pascal** indica que cuando se aplica presión a un fluido encerrado, la presión se transmite sin disminución en todo punto del fluido y en todo punto sobre las paredes del recipiente.

Cuando un cuerpo está parcial o totalmente sumergido en un fluido, el fluido ejerce sobre el cuerpo una fuerza hacia arriba llamada **empuje hidrostático.** Según el **principio de Arquímedes,** la magnitud del empuje hidrostático es igual al peso del fluido desalojado por el cuerpo:

$$B = \rho_{\text{fluido}} g V \tag{14.5}$$

Es posible entender varios aspectos de la dinámica de un fluido si se supone que el fluido es no viscoso e incompresible, y que el movimiento del fluido es un flujo estable sin rotación.

Dos importantes conceptos respecto al flujo de un fluido ideal que pasa por un tubo de dimensiones no uniformes, son como sigue:

1. El caudal (flujo de volumen) que pasa por un tubo es constante; esto es equivalente a decir que el producto del área A de sección transversal y la rapidez v en cualquier punto es una constante. Este resultado se expresa en la **ecuación de continuidad de fluidos:**

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{constante} \tag{14.7}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

2. La suma de la presión, energía cinética por unidad de volumen, y la energía potencial gravitacional por unidad de volumen tiene el mismo valor en todos los puntos a lo largo de una línea de flujo. Este resultado se resume en la **ecuación de Bernoulli:**

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante} \tag{14.9}$$

PREGUNTAS

1. Dos vasos para beber, que tienen iguales alturas pero diferentes formas y diferentes áreas de sección transversal, se llenan de agua hasta el mismo nivel. Según la expresión $P = P_0 + \rho g h$, la presión es igual en el fondo de ambos vasos. En vista de esto, ¿por qué un vaso pesa más que el otro?

2. La figura Q14.2 muestra vistas aéreas de dos presas, vistas directamente desde arriba. Ambas presas son igualmente anchas (la dimensión vertical en el diagrama) e igualmente altas (entrando en la página en el diagrama). La presa de la izquierda contiene un lago muy grande, en tanto que la presa de la derecha contiene un estrecho río. ¿Cuál presa tiene que construirse más fuerte?

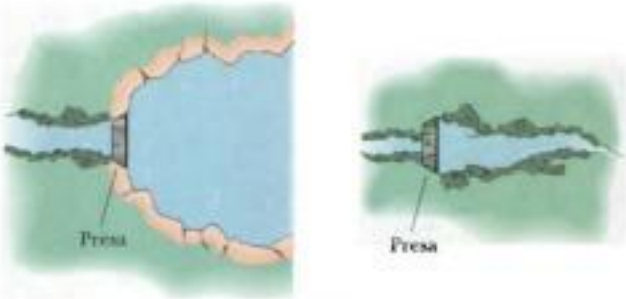


Figura Q14.2

3. Algunos estudiantes de física conectan un tubo largo, hecho de un fuerte caucho, a la abertura de una botella de agua caliente. Dejando la botella de agua caliente en el piso, levantan el otro extremo del tubo al techo de un edificio de varios pisos. Los estudiantes que están en lo alto del edificio vacían agua en el tubo. Los estudiantes que están abajo observan que la botella se llena de agua. En el techo, los estudiantes se sorprenden de ver que el tubo nunca parece llenarse, continúan vaciando más y más agua por el tubo. En el suelo, la botella de agua caliente se hincha como un globo y revienta, mojando a los estudiantes. Explique estas observaciones.

4. Si la parte superior de la cabeza de una persona tiene un área superficial de 100 cm², ¿cuál es el peso del aire que está sobre su cabeza?

5. Un globo lleno de helio sube hasta que su densidad se iguala con la del aire circundante. Si un submarino sellado empieza a hundirse, ¿bajará hasta el fondo del océano o se detendrá cuando su densidad sea igual que la del agua circundante?

6. Un pez descansa en el fondo de una cubeta de agua cuando ésta se pesa en una báscula. Cuando el pez empieza a nadar, ¿cambia la lectura de la báscula?

7. ¿Un barco navegará más alto en agua en un lago interior o en el océano? ¿Por qué?

8. Suponga que un barco averiado puede apenas mantenerse a flote en el océano. Es remolcado hacia la orilla en un río, con rumbo a un muelle seco para reparaciones. Cuando es remolcado río arriba, se hunde. ¿Por qué?

9. El plomo tiene una densidad mayor a la del hierro, y ambos son más densos que el agua. ¿El empuje hidrostático sobre un objeto de plomo es mayor, menor o igual al empuje hidrostático sobre un objeto de hierro del mismo volumen?

10. El abastecimiento de agua para una ciudad a veces es proporcionado desde estanques construidos en terrenos altos. El agua baja desde el estanque, por medio de tubos, y entra a una casa cuando se abre la llave del agua. ¿Por qué sale más rápido de una llave del primer piso de un edificio que en un departamento de un piso más alto?

11. Sube humo en una chimenea con más rapidez cuando sopla una brisa. Utilice el efecto Bernoulli para explicar este fenómeno.

12. Si la corriente de aire de un secador de pelo se dirige a una pelota de ping-pong, la pelota se elevará. Explique.

13. Cuando los saltadores de esquí están en el aire (figura Q14.13), ¿por qué doblan sus cuerpos hacia delante y mantienen las manos unidas a los costados?

Figura Q14.13

14. Cuando un cuerpo se sumerge en un líquido en reposo, ¿por qué es igual a cero la fuerza neta sobre el objeto en la dirección horizontal?

15. Explique por qué una botella sellada parcialmente llena de líquido puede flotar en un recipiente del mismo líquido.

16. ¿Cuando es mayor el empuje hidrostático en un nadador, después de exhalar o después de inhalar?

17. Una barcaza transporta una carga de grava en un río. Se aproxima a un puente bajo y el capitán se da cuenta que la parte superior del montón de grava no va a pasar bajo el puente. El capitán ordena a la tripulación rápidamente descargar con palas la grava del montón y lanzarla por la borda. ¿Es ésta una buena decisión?

Materiał chroniony prawem autorskim

18. Una persona en un bote que flota en un pequeño estanque lanza un ancla por la borda. El nivel del estanque, ¿sube, baja o sigue igual?

19. Un plato metálico vacío de jabón apenas flota en agua. Una barra de jabón Ivory (Marfil) flota en agua. Cuando el jabón se pega al plato de jabón, la combinación se hunde. Explique por qué.

20. Una pieza de madera porosa sin pintar flota en un recipiente parcialmente lleno de agua. Si el recipiente se sella y presuriza arriba de la presión atmosférica, la madera ¿sube, baja o sigue en el mismo nivel?

21. Una placa plana está inmersa en un líquido en reposo. ¿Para qué orientación de la placa es uniforme la presión en su superficie plana?

22. Como la presión atmosférica es alrededor de 10^5 N/m^2 y el área del pecho de una persona es de unos 0.13 m^2, la fuerza de la atmósfera en el pecho de uno es de unos 13 000 N. En vista de esta enorme fuerza, ¿por qué no se destruyen nuestros cuerpos?

23. ¿Cómo se determina la densidad de una piedra de forma irregular?

24. ¿Por qué los pilotos de aviones prefieren despegar con viento en contra?

25. Si una persona suelta una pelota cuando está en un elevador que cae libremente, la pelota permanece frente a la persona en lugar de caer al piso, debido a que tanto la pelota como el elevador y la persona experimentan la misma aceleración **g** hacia abajo. ¿Qué pasa si la persona repite este experimento con un globo lleno de helio? (Esto es una trampa.)

26. Dos barcos idénticos salen al océano. Uno está cargado con espuma de estireno y el otro está vacío. ¿Cuál barco está más sumergido?

27. Una pequeña pieza de acero está unida a un bloque de madera. Cuando la madera se coloca en una tina de agua con el acero en la parte superior, la mitad del bloque está sumergida. Si el bloque se invierte de modo que el acero se encuentre bajo el agua, la cantidad sumergida del bloque ¿aumenta, disminuye o sigue igual? ¿Qué pasa al nivel del agua de la tina cuando el bloque se invierte?

28. Los perros de las praderas (figura Q14.28) ventilan sus guaridas al construir un montículo alrededor de una entrada, que está abierta a una corriente de aire cuando sopla viento desde cualquier dirección. Una segunda entrada al nivel del suelo está abierta al aire casi en calma. ¿Cómo es que esta construcción crea un flujo de aire por la guarida?

Pamela Zilly/The Image Bank

Figura Q14.28

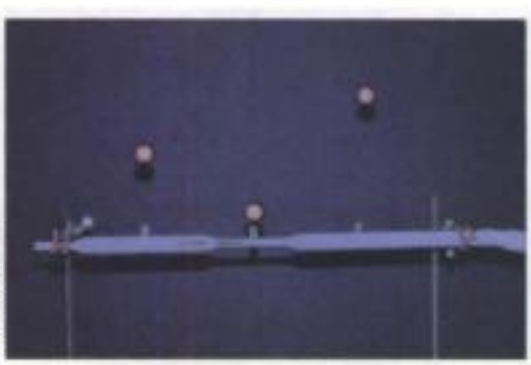
29. Una lata sin abrir de refresco de cola de dieta flota cuando se pone en un tanque de agua, mientras que una lata de refresco de cola regular de la misma marca se hunde en el tanque. ¿Qué se supone que podría explicar este comportamiento?

30. La figura Q14.30 muestra un cilindro de vidrio que contiene cuatro líquidos de densidades diferentes. De arriba hacia abajo, los líquidos son petróleo (anaranjado), agua (amarillo), agua salada (verde) y mercurio (plateado). El cilindro también contiene, de arriba abajo, una pelota de ping-pong, una pieza de madera, un huevo, y una esfera de acero. (a) ¿Cuál de estos líquidos tiene la densidad más baja, y cuál la más alta? (b) ¿Qué se puede concluir acerca de la densidad de cada objeto?

Henry Leap and Jim Lehman

Figura Q14.30

31. En la figura Q14.31, una corriente de aire se mueve de derecha a izquierda por un tubo que está constreñido hacia la mitad. Tres pelotas de ping-pong se levitan en equilibrio sobre las columnas verticales por las que escapa aire. (a) ¿Por qué está más alta la pelota de la derecha que la del medio? (b) ¿Por qué está más abajo la pelota de la izquierda que la de la derecha, aun cuando el tubo horizontal tiene las mismas dimensiones en estos dos puntos?



Henry Leap y Jim Lehman

Figura Q14.31

Materiał chroniony prawem autorskim

32. Usted es un pasajero en una nave espacial. Para su supervivencia y comodidad, el interior contiene aire igual que el de la superficie de la Tierra. La nave viaja con su impulso en una región vacía del espacio. Esto es, existe un vacío casi perfecto inmediatamente fuera de la pared. De pronto, un meteorito hace un agujero, del tamaño de una moneda grande, justo en la pared que está junto al asiento de usted. ¿Qué pasará? ¿Hay algo que deba o no deba hacer por esto?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, difícil = solución guiada con sugerencias disponibles en http://www.pse6.com

= use computadora para resolver el problema = problemas numéricos y simbólicos por pares

Sección 14.1 Presión

1. Calcule la masa de una esfera de hierro sólido que tiene un diámetro de 3.00 cm.

2. Encuentre el orden de magnitud de la densidad del núcleo de un átomo. ¿Qué sugiere este resultado con respecto a la estructura de la materia? Modele un núcleo como protones y neutrones apretados unos con otros. Cada uno tiene una masa de 1.67×10^{-27} kg y radio del orden de 10^{-15} m.

3. Una mujer de 50.0 kg se balancea en un tacón de un par de zapatos de tacón alto. Si el tacón es circular y tiene un radio de 0.500 cm, ¿qué presión ejerce ella sobre el piso?

4. Las cuatro llantas de un automóvil se inflan a una presión manométrica de 200 kPa. Cada llanta tiene un área de 0.024 0 m^2 en contacto con el piso. Determine el peso del automóvil.

5. ¿Cuál es la masa total de la atmósfera de la Tierra? (El radio de la Tierra es 6.37×10^6 m, y la presión atmosférica en la superficie es 1.013×10^5 N/m^2.)

Sección 14.2 Variación de presión con la profundidad

6. (a) Calcule la presión absoluta a una profundidad oceánica de 1 000 m. Suponga que la densidad del agua de mar es 1 024 kg/m^3 y que el aire de arriba ejerce una presión de 101.3 kPa. (b) A esta profundidad, ¿qué fuerza debe ejercer el marco alrededor de la ventana circular de un submarino, que mide 30.0 cm, para contrabalancear la fuerza ejercida por el agua?

7. El resorte del manómetro de presión que se ilustra en la figura 14.2 tiene una constante de fuerza de 1 000 N/m, y el émbolo tiene un diámetro de 2.00 cm. Cuando el manómetro se introduce en agua, ¿qué cambio en profundidad hace que el émbolo se mueva 0.500 cm?

8. El émbolo pequeño de un elevador hidráulico tiene un área de sección transversal de 3.00 cm^2; el de su émbolo grande, de 200 cm^2 (figura 14.4). ¿Qué fuerza debe aplicarse al émbolo pequeño para que el elevador levante una carga de 15.0 kN? (En talleres de servicio, esta fuerza suele aplicarse por medio de aire comprimido.)

9. ¿Cuál debe ser el área de contacto entre una copa de succión (completamente al vacío) y un techo si la copa debe soportar el peso de un estudiante de 80.0 kg?

10. (a) Una aspiradora muy potente tiene una manguera de 2.86 cm de diámetro. Sin boquilla en la manguera, ¿cuál es el peso del ladrillo más pesado que la aspiradora puede levantar? (figura P14.10a) (b) **¿Qué pasaría si?** Un pulpo muy poderoso utiliza una ventosa de 2.86 cm de diámetro en cada una de las dos valvas de una ostra, en un intento por separar las dos conchas (figura 14.10b). Encuentre la máxima fuerza que el pulpo puede ejercer en agua salda a 32.3 m de profundidad. *Atención:* Una verificación experimental puede ser interesante, pero no deje caer un ladrillo en su pie. No sobrecaliente el motor de una aspiradora. No moleste a un pulpo.

11. Para el sótano de una casa nueva, se hace un agujero en el suelo, con lados verticales de 2.40 m de profundidad. Se construye un muro de cimentación de concreto en los 9.60 m de ancho de la

(a) (b)

Figura P14.10

Materiał chroniony prawem autorskim

no para presión atmosférica normal? ¿Esperaría usted que el vacío arriba de la columna es tan bueno como el de mercurio?

18. Se vacía mercurio en un tubo en forma de U como en la figura P14.18a. El brazo izquierdo del tubo tiene una sección transversal A_1 de 10.00 cm^2 y el brazo derecho tiene una sección transversal A_2 de 5.00 cms^2. Cien gramos de agua se vierten entonces en el brazo derecho como en la figura P14.18b. (a) Determine la longitud de la columna de agua en el brazo derecho del tubo U. (b) Dado que la densidad del mercurio es 13.6 g/cm^3, ¿qué distancia h sube el mercurio en el brazo izquierdo?

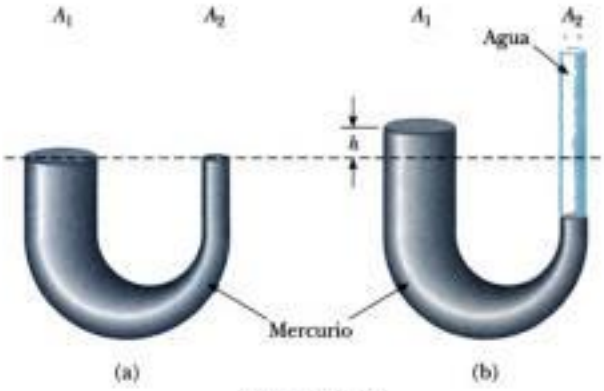


Figura P14.18

19. La presión atmosférica normal es 1.013×10^5 Pa. La aproximación de una tormenta hace que la altura de un barómetro de mercurio baje 20.0 mm desde la altura normal. ¿Cuál es la presión atmosférica? (La densidad del mercurio es 13.59 g/cm^3.)

20. Un tubo U de área de sección transversal uniforme, abierto a la atmósfera, está parcialmente lleno de mercurio. Se vierte agua entonces en ambos brazos. Si la configuración de equilibrio del tubo es como se muestra en la figura P14.20, con $h_2 = 1.00$ cm, determine el valor de h_1.

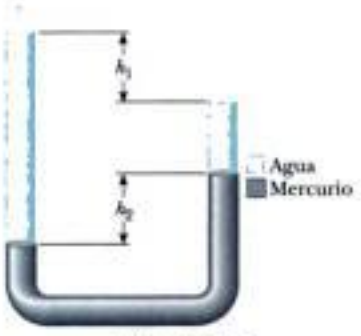


Figura P14.20

21. El cerebro y la médula espinal en humanos están inmersos en el fluido cerebroespinal. El fluido es normalmente continuo entre las cavidades craneal y espinal, ejerciendo una presión de 100 a 200 mm de H_2O sobre la presión atmosférica prevaleciente. En medicina, es frecuente medir presiones en unidades de milímetros de H_2O porque los líquidos del cuerpo, incluyendo el líquido cerebroespinal, por lo general tienen la misma densidad que el agua. La presión del líquido cerebroespinal se puede medir por medio de un *manómetro espinal*, como se ilustra en la figura P14.21. Se inserta un tubo hueco en la columna vertebral y se observa la altura a la que sube el líquido. Si éste sube a una altura de 160 mm, escribimos su presión manométrica como 160 mm H_2O. (a) Exprese esta presión en pascales, en atmósferas y en milímetros de mercurio. (b) A veces es necesario determinar si la víctima de un accidente ha sufrido la fractura de una vértebra que bloquea el flujo del líquido cerebroespinal en la columna vertebral. En otros casos, un médico puede sospechar la presencia que un tumor u otro crecimiento anormal bloquee la columna vertebral e inhibe el flujo del líquido cerebroespinal. Estas afecciones se pueden investigar por medio de la *prueba Queckenstedt*. En este procedimiento, se comprimen las venas del cuello del paciente, para hacer que suba la presión sanguínea en el cerebro. El aumento en presión en los vasos sanguíneos se transmite al líquido cerebroespinal. ¿Cuál sería el efecto normal en la altura del líquido en el manómetro espinal? (c) Suponga que comprimir las venas no tiene efecto en el nivel del líquido. ¿Qué podría explicar esto?

Figura P14.21

Sección 14.4 Empujes hidrostáticos o fuerza boyante y el principio de Arquímedes

22. (a) Un globo de peso ligero se llena con 400 m^3 de helio. A 0°C, ¿cuál es la masa de la carga útil que el globo puede levantar? **¿Qué pasaría si?** En la tabla 14.1 observe que la densidad del hidrógeno es casi la mitad de la densidad del helio. ¿Qué carga puede levantar el globo si se llena de hidrógeno?

23. Una pelota de ping-pong tiene un diámetro de 3.80 cm y una densidad promedio de 0.084 0 g/cm^3. ¿Qué fuerza se requiere para mantenerla completamente sumergida bajo el agua?

24. Una placa de espuma de estireno tiene grosor h y densidad ρ_s. Cuando un nadador de masa m está descansando sobre ella, la placa flota en agua dulce con su parte superior al mismo nivel que la superficie del agua. Encuentre el área de la placa.

25. Una pieza de aluminio con masa de 1.00 kg y densidad 2 700 kg/m^3 se cuelga de una cuerda y luego se sumerge por completo en un recipiente de agua (figura P14.25). Calcule la tensión de la cuerda (a) antes y (b) después de sumergir el metal.

Materiał chroniony prawem autorskim

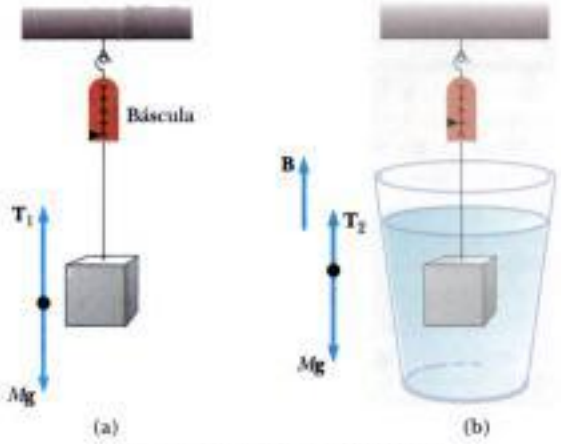


Figura P14.25 Problemas 25 y 27.

26. El peso de un bloque rectangular de material de baja densidad es de 15.0 N. Con una cuerda delgada, el centro de la cara horizontal inferior del bloque está amarrado al fondo de un vaso de precipitados parcialmente lleno de agua. Cuando está sumergido un 25.0% del volumen del bloque, la tensión de la cuerda es 10.0 N. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el bloque, mostrando todas las fuerzas que actúen sobre él. (b) Encuentre el empuje hidrostático sobre el bloque. (c) A continuación se agrega petróleo de densidad 800 kg/m^3 al vaso, formando así una capa arriba del agua y que rodea al bloque. El petróleo ejerce fuerzas sobre cada una de las cuatro paredes del bloque que toca el petróleo. ¿Cuáles son las direcciones de estas fuerzas? (d) ¿Qué ocurre a la tensión de la cuerda cuando se agrega petróleo? (e) La cuerda se revienta cuando su tensión alcanza 60.0 N. En ese momento, el 25.0% del volumen del bloque está todavía bajo la línea del agua; qué parte adicional del volumen del bloque está abajo de la superficie superior del petróleo? (f) Después que se revienta la cuerda, el bloque llega a una nueva posición de equilibrio en el vaso. Ahora está en contacto sólo con el petróleo. ¿Qué fracción del volumen del bloque está sumergido?

27. Un bloque de 10.0 kg de metal que mide 12.0 cm × 10.0 cm × 10.0 cm se cuelga de una báscula y se sumerge en agua, como se ve en la figura P14.25b. La dimensión de 12.0 cm es vertical, y la parte superior del bloque está a 5.00 cm bajo la superficie del agua. (a) ¿Cuáles son las fuerzas que actúan en la parte superior y en la inferior del bloque? (Tome $P_0 = 1.013\,0 \times 10^5$ N/m^2.) (b) ¿Cuál es la lectura en la báscula de resorte? (c) Demuestre que el empuje hidrostático es igual a la diferencia entre las fuerzas de la parte superior y la inferior del bloque.

28. A un orden de magnitud, ¿cuántos globos de juguete llenos de helio se necesitan para levantar una persona? Como el helio es un recurso no renovable, desarrolle una respuesta teórica en lugar de una experimental. En su solución exprese qué cantidades físicas toma como datos y los valores que mida o estime para ellas.

29. Un cubo de madera que tiene aristas de 20.0 cm y densidad de 650 kg/m^3 flota en agua. (a) ¿Cuál es la distancia desde la superficie horizontal superior del cubo al nivel del agua? (b) ¿Cuánto peso de plomo tiene que ponerse sobre el cubo para que su parte superior quede justo al nivel del agua?

30. Una pelota esférica de aluminio de masa 1.26 kg contiene una cavidad esférica vacía que es concéntrica con la pelota. La pelota flota apenas en agua. Calcule (a) el radio exterior de la pelota y (b) el radio de la cavidad.

31. La determinación de la densidad de un fluido tiene muchas aplicaciones importantes. La batería de un auto contiene ácido sulfúrico, para el cual la densidad es una medida de la concentración. Para que la batería funcione correctamente, la densidad debe estar dentro de un margen especificado por el fabricante. Del mismo modo, la efectividad del anticongelante en el refrigerante del motor de un auto depende de la densidad de la mezcla (por lo general glicol etileno y agua). Cuando una persona dona sangre a un banco de sangre, su selección incluye la determinación de la densidad de la sangre, puesto que una densidad más alta se correlaciona con un contenido más alto de hemoglobina. Un *hidrómetro* es un instrumento que se usa para determinar la densidad de un líquido. Un de éstos se ve en la figura P14.31. El bulbo de una jeringa se oprime y suelta para que la atmósfera levante una muestra del líquido de interés hacia un tubo que contiene una varilla calibrada de densidad conocida. La varilla, de longitud L y densidad promedio ρ_0, flota parcialmente inmersa en el líquido de densidad ρ. Una longitud h de la varilla sobresale de la superficie del líquido. Demuestre que la densidad del líquido está dada por

$$\rho = \frac{\rho_0 L}{L - h}$$

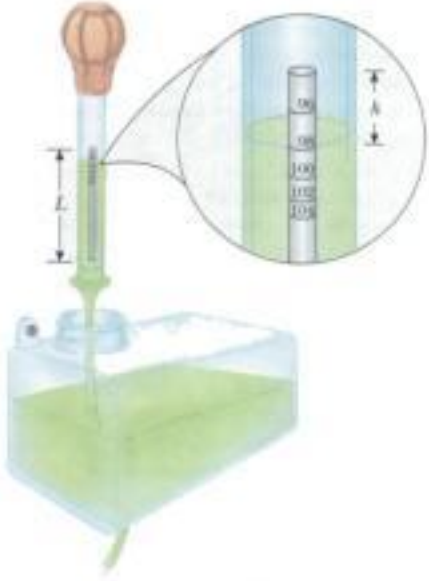


Figura P14.31 Problemas 31 y 32.

32. Consulte el problema 31 y la figura P14.31. Un hidrómetro ha de construirse con una varilla cilíndrica flotante. Nueve marcas fiduciarias se han de colocar a lo largo de la varilla para indicar densidades de 0.98 g/cm^3, 1.00 g/cm^3, 1.02 g/cm^3, 1.04 g/cm^3,..., 1.14 g/cm^3. La hilera de marcas debe empezar a 0.200 cm del extremo superior de la varilla y terminar a 1.80 cm del extremo superior. (a) ¿Cuál es la longitud requerida de la varilla? (b) ¿Cuál debe ser su densidad promedio? (c) ¿Deben las marcas estar igualmente espaciadas? Explique su respuesta.

33. ¿Cuántos metros cúbicos de helio se necesitan para levantar un globo con 400 kg de carga útil a una altura de 8 000 m? (Tome

Materiał chroniony prawem autorskim

que el agua debe ser bombeada si debe llegar a la población? (b) Si se bombean 4 500 m^3 por día, ¿cuál es la rapidez del agua en el tubo? (c) ¿Qué presión adicional es necesaria para entregar este caudal? *Nota:* Suponga que la aceleración en caída libre y densidad del aire son constante en este intervalo de elevaciones.

46. El géiser Old Faithful de Yellowstone Park (figura P14.46) brota a intervalos aproximados de una hora, y la altura de la columna de agua alcanza 40.0 m. (a) Modele el chorro ascendente como una serie de gotas separadas. Analice el movimiento en caída libre de una de las gotas para determinar la rapidez a la que el agua sale del suelo. (b) **¿Qué pasaría si?** Modele el chorro ascendente como un fluido ideal en flujo laminar. Use la ecuación de Bernoulli para determinar la rapidez del agua cuando sale al nivel del suelo. (c) ¿Cuál es la presión (arriba de la atmosférica) en la cámara subterránea caliente si su profundidad es de 175 m? Se puede suponer que la cámara es grande en comparación con la salida del géiser.

Figura P14.46

47. Se puede usar un tubo Venturi como medidor de fluidos (véase la figura 14.20). Si la diferencia en presión es $P_1 - P_2 = 21.0$ kPa, encuentre el caudal en metros cúbicos por segundo, dado que el radio del tubo de salida es 1.00 cm, el radio del tubo de entrada es 2.00 cm, y el fluido es gasolina ($\rho = 700$ kg/m^3).

Sección 14.7 Otras aplicaciones de dinámica de fluidos

48. Un avión tiene una masa de 1.60×10^4 kg, y cada ala tiene un área de 40.0 m^2. Durante un vuelo a nivel, la presión en la superficie inferior del ala es 7.00×10^4 Pa. Determine la presión en la superficie superior del ala.

49. Se puede usar un tubo Pitot para determinar la velocidad del flujo de aire al medir la diferencia entre la presión total y la presión estática (figura P14.49). Si el fluido en el tubo es mercurio, de densidad $\rho_{Hg} = 13\,600$ kg/m^3 y $\Delta h = 5.00$ cm, encuentre la rapidez del flujo de aire. (Suponga que el aire está en calma en el punto A y tome $\rho_{aire} = 1.25$ kg/m^3.)

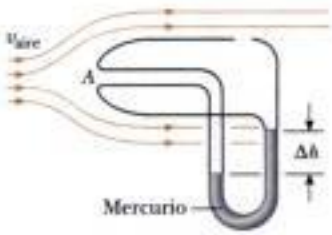


Figura P14.49

50. Un avión vuela a su velocidad de crucero a una altitud de 10 km. La presión fuera del avión es 0.287 atm; dentro del compartimiento de pasajeros, la presión es 1.00 atm y la temperatura es 20°C. Se presenta una pequeña fuga en uno de los sellos de ventanilla en el compartimiento de pasajeros. Modele el aire como un fluido ideal para hallar la rapidez del chorro de aire que salga por la fuga.

51. Se utiliza un sifón para drenar agua de un tanque, como se ilustra en la figura P14.51. El sifón tiene un diámetro uniforme. Suponga un flujo estable sin fricción. (a) Si la distancia $h = 1.00$ m, encuentre la rapidez de salida en el extremo del sifón. (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es la limitación de la altura de la parte alta del sifón sobre la superficie del agua? (Para que el flujo de líquido sea continuo, la presión no debe ser menor a la presión de vapor del líquido.)

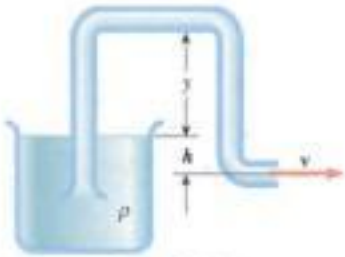


Figura P14.51

52. El efecto Bernoulli puede tener consecuencias importantes para el diseño de edificios. Por ejemplo, puede soplar viento alrededor de un edificio a una rapidez sorprendentemente alta, lo cual crea baja presión. La presión atmosférica más alta en aire en calma dentro de edificios puede hacer que se abran ventanas. Como originalmente se construyó, en el edificio John Hancock en Boston se abrieron ventanas, que cayeron a muchos pisos a la banqueta. (a) Suponga que sopla un viento horizontal en flujo laminar con una rapidez de 11.2 m/s fuera de un vidrio grande con dimensiones 4.00×1.50 m. Suponga que la densidad del aire es uniforme a 1.30 kg/m^3. El aire dentro del edificio está a presión atmosférica. ¿Cuál es la fuerza total ejercida por el aire sobre el vidrio de la ventana? (b) **¿Qué pasaría si?** Si en las cercanías se construye un segundo rascacielos, la rapidez del aire puede ser especialmente alta cuando pasa el viento por la angosta separación entre los edificios. Resuelva la parte (a) de nuevo si la rapidez del viento es 22.4 m/s, el doble de rápido.

53. Una jeringa hipodérmica contiene una medicina con la densidad del agua (figura P14.53). El barril de la jeringa tiene un área de sección transversal $A = 2.50 \times 10^{-5}$ m^2, y la aguja tiene un área de sección transversal $a = 1.00 \times 10^{-8}$ m^2. En ausencia de una fuerza en el émbolo, la presión en todos los puntos es 1 atm. Una fuerza **F** de magnitud 2.00 N actúa sobre el émbolo, haciendo que la medicina salga horizontalmente de la aguja. Determine la rapidez con que la medicina sale de la punta de la aguja.

Figura P14.53

Materiał chroniony prawem autorskim

Problemas adicionales

54. La figura P14.54 muestra un tanque de agua con una válvula en el fondo. Si esta válvula se abre, ¿cuál es la altura máxima alcanzada por el chorro de agua que salga del lado derecho del tanque? Suponga que $h = 10.0$ m, $L = 2.00$ m, y $\theta = 30.0°$ y que el área de sección transversal en A es muy grande en comparación con la que hay en B.

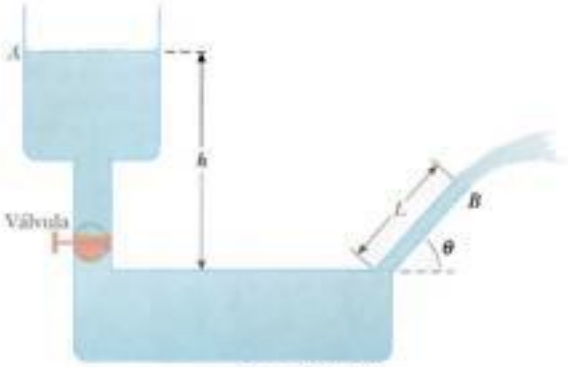


Figura P14.54

55. Un globo lleno de helio está amarrado a una cuerda uniforme de 2.00 m de largo y 0.050 0 kg. El globo es esférico con un radio de 0.400 m. Cuando se suelta, se levanta una longitud h de cuerda y luego permanece en equilibrio, como en la figura P14.55. Determine el valor de h. El envolvente del globo tiene una masa de 0.250 kg.

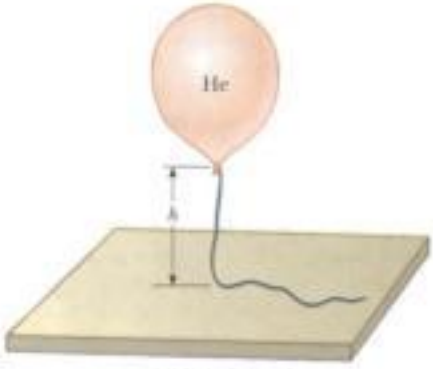


Figura P14.55

56. Se hace salir agua de un extintor por medio de la presión de aire, como se ve en la figura P14.56. ¿Cuánta presión manométrica de aire del tanque (arriba de la atmosférica) se necesita para que el chorro de agua tenga una rapidez de 30.0 m/s, cuando el nivel de agua del tanque esté a 0.500 m abajo de la boquilla?

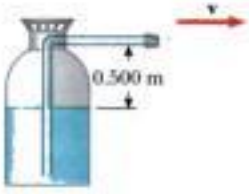


Figura P14.56

57. El verdadero peso de un cuerpo se puede medir en un vacío, donde no hay empujes hidrostáticos. Un cuerpo de volumen V se pesa en aire en una balanza con el uso de pesas de densidad ρ. Si la densidad del aire es ρ_{aire} y la balance indica F_g', demuestre que el verdadero peso F_g es

$$F_g = F_g' + \left(V - \frac{F_g'}{\rho g}\right)\rho_{aire}\, g$$

58. Una boya de madera tiene un diámetro de 1.20 cm. Flota en agua con 0.400 cm de su diámetro sobre el agua (figura P14.58). Determine la densidad de la boya.

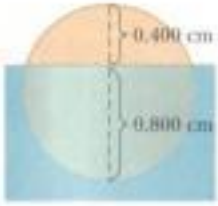


Figura P14.58

59. Un resorte ligero de constante $k = 90.0$ N/m está unido verticalmente a una mesa (figura P14.59a). Un globo de 2.00 g se llena de helio (densidad = 0.180 kg/m^3) a un volumen de 5.00 m^3 y luego se conecta al resorte, haciendo que éste se estire como se ve en la figura P14.59b. Determine la distancia L de estiramiento cuando el globo está en equilibrio.

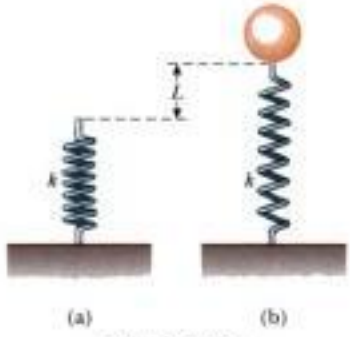


Figura P14.59

60. Evangelista Torricelli fue el primero en darse cuenta que vivimos en el fondo de un océano de aire. Correctamente supuso que la presión de nuestra atmósfera es atribuible al peso del aire. La densidad del aire a 0°C en la superficie de la Tierra es 1.29 kg/m^3. La densidad disminuye con una altitud creciente (a medida que se enrarece). Por otra parte, si suponemos que la densidad es constante a 1.29 kg/m^3 hasta cierta altitud h, y cero arriba de esta altitud, entonces h representaría la profundidad del océano de aire. Utilicemos este modelo para determinar el valor de h que dé una presión de 1.00 atm en la superficie de la

Material chroniony prawem autorskim

Tierra. ¿Se elevaría la cima del Monte Everest por sobre la superficie de esa atmósfera?

Problema de repaso. Con referencia a la figura 14.5, demuestre que el par de torsión total ejercido por el agua detrás de la presa, alrededor de un eje horizontal que pasa por O, es $\frac{1}{6}\rho g w H^3$. Demuestre que la línea efectiva de acción de la fuerza total ejercida por el agua está a una distancia $\frac{1}{3}H$ arriba de O.

62. Hacia 1657, Otto von Guericke, inventor de la bomba de aire, hizo el vacío a una esfera formada por dos semiesferas de bronce. Dos equipos de ocho caballos cada uno pudieron separar las dos semiesferas sólo después de varios intentos, y "con gran dificultad", con el resultante sonido parecido a un disparo de cañón (figura P14.62). (a) Demuestre que la fuerza F necesaria para separar las semiesferas al vacío es $\pi R^2(P_0 - P)$, donde R es el radio de las semiesferas y P es la presión de su interior, que es mucho menor a P_0. (b) Determine la fuerza si $P = 0.100P_0$ y $R = 0.300$ m.

The Granger Collection

Figura P14.62 El grabado en color, que data de 1672, ilustra la demostración de Otto von Guericke de la fuerza debida a la presión de aire hecha en presencia del emperador Fernando VIII en 1657.

Un vaso de precipitados de 1.00 kg que contiene 2.00 kg de petróleo (densidad = 916.0 kg/m^3) se apoya en una báscula. Un bloque de 2.00 kg de hierro está colgado de una báscula de resorte y completamente sumergido en el petróleo, como se ve en la figura P14.63. Determine las lecturas de equilibrio de ambas básculas.

Un vaso de precipitados de masa m_{vaso} que contiene petróleo de masa $m_{petróleo}$ (densidad = $\rho_{petróleo}$) se apoya en una báscula. Un bloque de hierro de masa m_{hierro} cuelga de una báscula de resorte y completamente sumergido en el petróleo, como se ve en la figura P14.63. Determine las lecturas de equilibrio de ambas básculas.

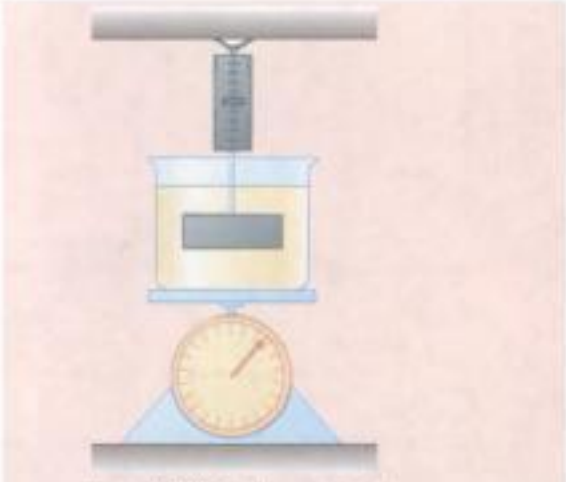


Figura P14.63 Problemas 63 y 64.

En 1983, los Estados Unidos empezaron a acuñar la moneda de un centavo de zinc recubierto de cobre, en lugar de cobre puro. La masa de un centavo antiguo es 3.083 g, en tanto que la del nuevo centavo es 2.517g. Calcule el porcentaje de zinc (por volumen) en el nuevo centavo. La densidad del cobre es 8.960 g/cm^3. Las monedas nuevas y antiguas tienen el mismo volumen.

Una capa esférica delgada de masa 4.00 kg y diámetro 0.200 m se llena con helio (densidad = 0.180 kg/m^3). A continuación se suelta desde el reposo sobre el fondo de una piscina de agua que tiene 4.00 m de profundidad. (a) Despreciando efectos de fricción, demuestre que la capa sube con aceleración constante y determine el valor de esa aceleración. (b) ¿Cuánto tiempo tardará para que la parte superior de la capa llegue a la superficie del agua?

Problema de Repaso. Un disco uniforme de masa 10.0 kg y radio 0.250 m gira a 300 rev/minuto en un eje de baja fricción. Debe detenerse en 1.00 minuto por una pastilla de freno que hace contacto con el disco a una distancia promedio de 0.220 m del eje. El coeficiente de fricción entre la pastilla y el disco es 0.500. Un émbolo en un cilindro de 5.00 cm de diámetro presiona la pastilla contra el disco. Encuentre la presión necesaria para el líquido de frenos en el cilindro.

Demuestre que la variación de presión atmosférica con la altitud está dada por $P = P_0 e^{-\alpha y}$, donde $\alpha = \rho_0 g/P_0$, P_0 es la presión atmosférica en algún nivel de referencia $y = 0$, y ρ_0 es la densidad atmosférica a este nivel. Suponga que la reducción en presión atmosférica sobre un cambio infinitesimal en altitud (de modo que la densidad es aproximadamente uniforme) está dada por $dP = -\rho g\, dy$, y que la densidad del aire es proporcional a la presión.

Un fluido incompresible y no viscoso está inicialmente en reposo en la parte vertical del tubo que se muestra en la figura P14.69a, donde $L = 2.00$ m. Cuando se abre la válvula, el fluido entra en la sección horizontal del tubo. ¿Cuál es la rapidez del fluido cuando todo él está en la sección horizontal, como se ve en la figura P14.69b? Suponga que el área de sección transversal de todo el tubo es constante.

Materiał chroniony prawem autorskim

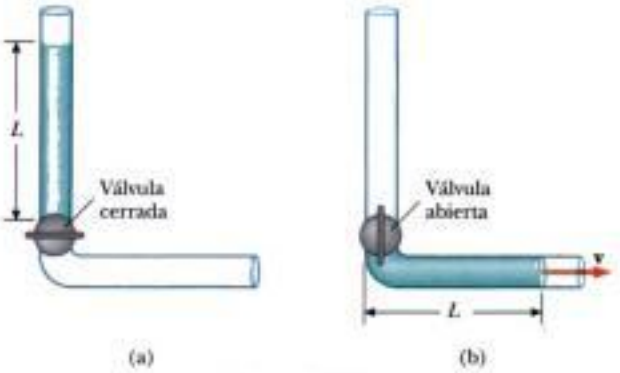


Figura P14.69

70. Un cubo de hielo cuyas aristas miden 20.0 mm flota en un vaso de agua fría con una de sus caras paralela a la superficie del agua. (a) ¿A qué distancia bajo la superficie del agua está la cara inferior del bloque? (b) Con todo cuidado se vierte alcohol etílico frío sobre la superficie del agua para formar una capa de 5.00 mm de espesor sobre el agua. El alcohol no se mezcla con el agua. Cuando el cubo de hielo alcanza de nuevo su equilibrio hidrostático, ¿cuál será la distancia desde la parte superior del agua a la cara inferior del bloque? (c) Se vierte más alcohol etílico frío sobre la superficie del agua hasta que la superficie superior del alcohol coincide con la superficie superior del cubo de hielo (en equilibrio hidrostático). ¿De qué espesor es la capa necesaria de alcohol etílico?

71. Un tubo en forma de U abierto en ambos extremos se llena parcialmente de agua (figura P14.71a). Se vacía petróleo con densidad de 750 kg/m^3 en el brazo derecho y forma una columna de L = 5.00 cm de alto (figura P14.71b). (a) Determine la diferencia h en las alturas de las dos superficies de líquido. (b) El brazo derecho se protege entonces de cualquier movimiento de aire cuando se sopla aire en la parte superior del brazo izquierdo hasta que las superficies de los dos líquidos están a la misma altura (figura P14.71c). Determine la rapidez del aire que se sopla por el brazo izquierdo. Tome la densidad del aire como 1.29 kg/m^3.

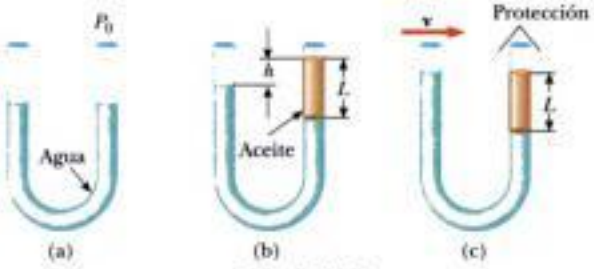


Figura P14.71

72. El abastecimiento de agua de un edificio se alimenta por un tubo principal de 6.00 cm de diámetro. Una llave de 2.00 cm de diámetro, colocada a 2.00 m sobre el tubo principal, se observa que llena un recipiente de 25.0 L en 30.0 s. (a) ¿Cuál es la rapidez a la que el agua sale de la llave? (b) ¿Cuál es la presión manométrica en el tubo principal de 6 cm? (Suponga que la llave es la única "fuga" en el edificio.)

73. El *termómetro de licor en agua*, inventado hacia 1654 en Florencia, Italia, está formado por un tubo de líquido (el licor) que contiene gran número de esferas de vidrio de masas ligeramente diferentes sumergidas (figura P14.73). A temperaturas suficientemente bajas, todas las esferas flotan, pero cuando sube la temperatura, las esferas se hunden una tras hora. El aparato es una tosca pero interesente herramienta para medir temperatura. Suponga que el tubo se llena con alcohol etílico, cuya densidad es 0.789 45 g/cm^3 a 20.0°C y disminuye a 0.780 97 g/cm^3 a 30.0°C. (a) Si una de las esferas tiene un radio de 1.000 cm y está en equilibrio a la mitad de la altura del tubo a 20.0°C, determine su masa. (b) Cuando la temperatura aumenta a 30.0°C, ¿qué masa debe tener una segunda esfera del mismo radio para estar en equilibrio en el punto medio de altura? (c) A 30.0°C la primera esfera ha bajado al fondo del tubo. ¿Qué fuerza hacia arriba ejerce el fondo del tubo sobre esta esfera?

Figura P14.73

74. Una mujer está drenando su pecera al descargar el agua en un drenaje, como se ve en la figura P14.74. El tanque rectangular tiene área A en su fondo y profundidad h. El drenaje está a una distancia d bajo la superficie del agua del tanque, donde $d >> h$. El área de sección transversal del tubo sifón es A'. Modele el agua cuando sale con fricción. (a) Demuestre que el intervalo necesario para vaciar el tanque está dado por

$$\Delta t = \frac{Ah}{A'\sqrt{2gd}}$$

(b) Evalúe el intervalo necesario para vaciar el tanque si es un cubo de 0.500 m en cada arista, si A' = 2.00 cm^2 y d = 10.0 m.

Materiał chroniony prawem autorskim

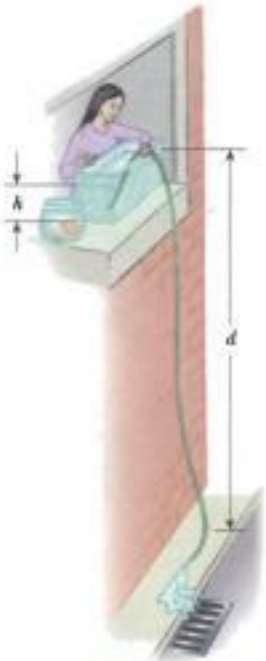


Figura P14.74

75. El casco de un bote experimental ha de elevarse sobre el agua por medio de un patín montado bajo su quilla, como se ve en la figura P14.75. El patín tiene forma semejante a la del ala de un avión. Su área proyectada sobre una superficie horizontal es A. Cuando el bote es remolcado a suficiente rapidez, el agua de densidad ρ se mueve en flujo laminar de modo que su rapidez promedio en la parte superior del patín es n veces mayor que su rapidez v_0 bajo el patín. (a) Despreciando el empuje hidrostático, demuestre que la fuerza de sustentación hacia arriba ejercida por el agua sobre el patín tiene una magnitud dada por

$$F \approx \tfrac{1}{2}(n^2 - 1)\rho v_0^2 A$$

(b) El bote tiene masa M. Demuestre que la rapidez de despegue está dada por

$$v \approx \sqrt{\frac{2Mg}{(n^2 - 1)A\rho}}$$

(c) Suponga que un bote de 800 kg ha de despegar a 9.50 m/s. Evalúe el área A necesaria para el patín si su diseño cede a $n = 1.05$.

Figura P14.75

Respuestas a las *preguntas rápidas*

14.1 (a) Debido a que el peso del jugador de baloncesto está distribuido sobre un área superficial más grande de su zapato, la presión (F/A) que él aplica es relativamente pequeña. El menor peso de la mujer está distribuido en un área de sección transversal muy pequeña del tacón de punta, de modo que la presión es más alta.

14.2 (a) Debido a que ambos fluidos tienen la misma profundidad, el que tiene menor densidad (alcohol) ejercerá la menor presión.

14.3 (c) Todos los barómetros tendrán la misma presión en el fondo de la columna de líquido, la presión atmosférica. Por lo tanto, el barómetro con la columna más alta será el que tenga el líquido con densidad más baja.

14.4 (d) Debido a que no hay atmósfera en la Luna, no hay presión atmosférica para dar fuerza para subir el agua por el popote.

14.5 (b) Para un cuerpo totalmente sumergido, el empuje hidrostático no depende de la profundidad en un fluido incompresible.

14.6 (c) El cubo de hielo desplaza un volumen de agua que tiene un peso igual al del cubo de hielo. Cuando el cubo de hielo se derrite, se convierte en paquete de agua con el mismo peso y exactamente el volumen que fue desalojado antes por el cubo de hielo.

14.7 (b) o (c) En los tres casos, el peso del arcón del tesoro produce una fuerza hacia abajo sobre la balsa que la hace hundirse en el agua. En (b) y (c), sin embargo, el arcón del tesoro también desaloja agua, lo cual da un empuje hidrostático en la dirección hacia arriba, reduciendo así el efecto del peso del arcón.

14.8 (b) El líquido se mueve a la rapidez más alta en el popote con la menor área de sección transversal.

14.9 (a) El aire a alta velocidad entre los globos resulta en una baja presión en esta región. La presión más alta en las superficies exteriores de los globos los empujan el uno hacia el otro.

Calvin y Hobbes © 1992 Watterson. Reimpreso con permiso de Universal Press Syndicate. Todos los derechos reservados.

Materiał chroniony prawem autorskim

Materiał chroniony prawem autorskim

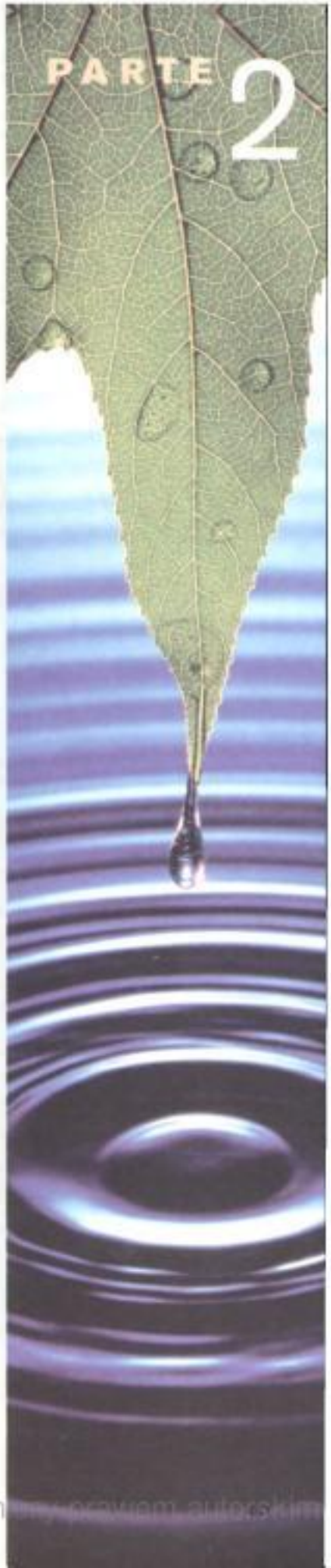
Oscilaciones y ondas mecánicas

PARTE 2

Iniciamos esta nueva parte del texto con el estudio de un tipo especial de movimiento llamado movimiento *periódico*. Éste es el movimiento *repetitivo* de un cuerpo en el cual éste continúa regresando a una posición dada después de un intervalo fijo. Entre los objetos conocidos que exhiben movimiento periódico se cuenta con los péndulos o una pelota de playa sobre las olas. A los movimientos de un objeto en uno y otro sentido se les llama *oscilaciones*. Concentraremos nuestra atención en un caso especial de movimiento periódico llamado *movimiento armónico simple*. Encontraremos que todos los movimientos periódicos se pueden modelar como combinaciones de movimientos armónicos. En consecuencia, el movimiento armónico simple forma un elemento básico para movimientos periódicos más complicados.

El movimiento armónico simple también es la base para que entendamos las *ondas mecánicas*. Las ondas de sonido, las ondas sísmicas, las ondas en cuerdas estiradas y otras se producen por alguna fuente de oscilación. Cuando una onda de sonido se desplaza en el aire, elementos del aire oscilan en un sentido y otro; cuando una onda en agua se desplaza en una charca, elementos del agua oscilan arriba y abajo, así como hacia adelante y hacia atrás. En general, cuando las ondas se mueven en cualquier medio, los elementos del medio se mueven en ciclos repetitivos. Por lo tanto, el movimiento de los elementos del medio tiene un fuerte parecido con el movimiento periódico de un péndulo o con el de un cuerpo unido a un resorte.

Para explicar muchos otros fenómenos de la naturaleza, debemos entender los conceptos de oscilaciones y ondas. Por ejemplo, aun cuando rascacielos y puentes parecen ser rígidos, en realidad oscilan, un dato que arquitectos e ingenieros que los diseñan y construyen deben tomar en cuenta. Para comprender cómo funcionan la radio y la televisión, debemos entender el origen y naturaleza de las ondas electromagnéticas y la forma en que se propagan por el espacio. Por último, gran parte de lo que han aprendido los científicos acerca de la estructura atómica ha provenido de información llevada por ondas. En consecuencia, primero debemos estudiar oscilaciones y ondas si queremos entender los conceptos y teorías de la física atómica. ■



◄ *Gotas de agua caen en un estanque desde una hoja. Las perturbaciones causadas por el agua que cae hacen que oscile la superficie del agua. Estas oscilaciones están asociadas con ondas que se alejan desde el punto en el que cae la gota. En la segunda parte de este texto exploraremos los principios relacionados con oscilaciones y ondas. (Don Bonsey/Getty Images)*

Materiał chron

Capítulo 15

Movimiento oscilatorio

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

15.1 Movimiento de un cuerpo unido a un resorte

15.2 Representación matemática del movimiento armónico simple

15.3 Energía del oscilador armónico simple

15.4 Comparación del movimiento armónico simple con el movimiento circular uniforme

15.5 El péndulo

15.6 Oscilaciones amortiguadas

15.7 Oscilaciones forzadas

▲ *En la Bahía de Fundy, en Nueva Escocia, Canadá, las mareas experimentan oscilaciones con amplitudes muy grandes, tanto que los botes terminan en el suelo seco durante parte del día. En este capítulo investigaremos la física del movimiento oscilatorio (www.comstock.com)*

Materiał chroniony prawem autorskim

El *movimiento periódico* es el movimiento de un cuerpo que se repite regularmente; el cuerpo regresa a una posición dada después de un intervalo fijo. Con un poco de razonamiento podemos identificar varios tipos de movimiento periódico en nuestra vida diaria. Un auto regresa a la calzada todas las tardes. Nosotros regresamos a la mesa todas las noches a cenar. Un candelabro con el que nos hemos topado se columpia en un sentido y en otro, regresando a la misma posición a un ritmo regular. La Tierra regresa cada año a la misma posición en su órbita alrededor del Sol, con lo cual resultan las variaciones entre las cuatro estaciones. La Luna regresa a la misma relación con la Tierra y el Sol, resultando en una Luna nueva aproximadamente una vez al mes.

Además de estos ejemplos diarios, numerosos sistemas exhiben movimiento periódico. Por ejemplo, las moléculas en un sólido oscilan alrededor de sus posiciones de equilibrio; ondas electromagnéticas, por ejemplo ondas de luz, radar y de radio están caracterizadas por vectores de campo eléctrico y magnético oscilantes; y en circuitos eléctricos de corriente alterna, voltaje, corriente y carga eléctrica varían periódicamente con el tiempo.

Una clase especial de movimiento periódico ocurre en sistemas mecánicos cuando la fuerza que actúa sobre un cuerpo es proporcional a la posición de ese cuerpo con respecto a alguna posición de equilibrio. Si esta fuerza está siempre dirigida hacia la posición de equilibrio, el movimiento se denomina *movimiento armónico simple*, que es el tema principal de este capítulo.

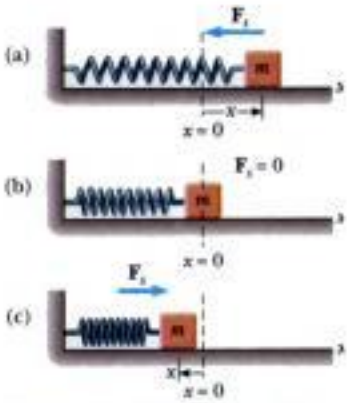


Figura activa 15.1 Bloque unido a un resorte que se mueve en una superficie sin fricción. (a) Cuando el bloque se desplaza a la derecha del equilibrio ($x > 0$), la fuerza ejercida por el resorte actúa a la izquierda. (b) Cuando el bloque está en su posición de equilibrio ($x = 0$), la fuerza ejercida por el resorte es cero. (c) Cuando el bloque se desplaza a la izquierda de equilibrio ($x < 0$), la fuerza ejercida por el resorte actúa a la derecha.

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, usted podrá seleccionar la constante de resorte, así como la posición inicial y velocidades del bloque, para ver el movimiento armónico simple resultante.

15.1 Movimiento de un cuerpo unido a un resorte

Como modelo para un movimiento armónico simple, considere un bloque de masa m unido al extremo de un resorte, con el bloque libre de moverse en una superficie horizontal sin fricción (figura 15.1). Cuando el resorte no está estirado ni comprimido, el bloque está en la posición llamada **posición de equilibrio** del sistema, que identificamos como $x = 0$. Sabemos por experiencia que este sistema oscila en un sentido y en otro si se saca de su posición de equilibrio.

Podemos entender cualitativamente el movimiento de la figura 15.1 si primero recordamos que cuando el bloque se desplaza a una posición x, el resorte ejerce sobre el bloque una fuerza que es proporcional a la posición y dada por la **ley de Hooke** (véase la sección 7.4):

Ley de Hooke

$$F_s = -kx \tag{15.1}$$

Ésta se llama **fuerza restauradora,** porque siempre está dirigida hacia la posición de equilibrio, y por lo tanto, *opuesta* al desplazamiento desde el equilibrio. Esto es, cuando el bloque se desplaza a la derecha de $x = 0$ en la figura 15.1, entonces la posición es positiva y la fuerza restauradora está dirigida a la izquierda. Cuando el bloque se desplaza a la izquierda de $x = 0$, entonces la posición es negativa y la fuerza restauradora está dirigida a la derecha.

Si se aplica la segunda ley de Newton $\Sigma F_x = ma_x$ al movimiento del bloque, en la ecuación 15.1 dando la fuerza neta en la dirección x, obtenemos

$$-kx = ma_x$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x \tag{15.2}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Lo que ahora requerimos es una solución matemática a la ecuación 15.5, es decir, una función $x(t)$ que satisfaga esta ecuación diferencial de segundo orden. Ésta es una representación matemática de la posición de la partícula como función del tiempo. Buscamos una función $x(t)$ cuya segunda derivada es igual que la función original con un signo negativo y multiplicada por ω^2. Las funciones trigonométricas seno y coseno exhiben este comportamiento, de modo que podemos construir una solución alrededor de una de éstas o de ambas. La siguiente función coseno es una solución de la ecuación diferencial:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{15.6}$$

Posición contra tiempo para un cuerpo en movimiento armónico simple

donde A, ω y ϕ son constantes. Para ver explícitamente que esta ecuación satisface la ecuación 15.5, nótese que

$$\frac{dx}{dt} = A\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \phi) = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \tag{15.7}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega A\frac{d}{dt}\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) \tag{15.8}$$

Si se comparan las ecuaciones 15.6 y 15.8, vemos que $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$ y se satisface la ecuación 15.5.

Los parámetros A, ω y ϕ son constantes del movimiento. Para dar significado físico a estas constantes, es conveniente formar una representación gráfica del movimiento al graficar x como una función de t, como en la figura 15.2a. Primero, nótese que A, llamada la **amplitud** del movimiento, es simplemente **el valor máximo de la posición de la partícula, ya sea en la dirección x positiva o negativa.** La constante ω se denomina **frecuencia angular,** y tiene unidades de rad/s.[1] Es una medida de lo rápidamente que ocurren las oscilaciones, es decir, cuanto más oscilaciones haya por unidad de tiempo, más alto es el valor de ω. De la ecuación 15.4, la frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{15.9}$$

El ángulo constante ϕ se denomina **constante de fase** (o ángulo inicial de fase) y, junto con la amplitud A, está determinado de manera única por la posición y velocidad de la partícula en $t = 0$. Si la partícula está en su máxima posición $x = A$ en $t = 0$, la constante de fase es $\phi = 0$ y la representación gráfica del movimiento se ilustra en la figura 15.2b. La cantidad $(\omega t + \phi)$ se llama **fase** del movimiento. Nótese que la función $x(t)$ es periódica, y su valor es igual cada vez que ωt aumente en 2π radianes.

Las ecuaciones 15.1, 15.5 y 15.6 forman la base de la representación matemática del movimiento armónico simple. Si analizamos una situación y encontramos que la fuerza sobre una partícula es de la forma matemática de la ecuación 15.1, sabemos que el movimiento será el de un oscilador armónico simple, y que la posición de la partícula está descrita por la ecuación 15.6. Si analizamos un sistema y encontramos que está descrito por una ecuación diferencial de la forma de la ecuación 15.5, el movimiento será el de un oscilador armónico simple. Si analizamos una situación y encontramos que la posición de una partícula está descrita por la ecuación 15.6, sabemos que la partícula está experimentando un movimiento armónico simple.

[1] Hemos visto numerosos ejemplos en capítulos anteriores en los que evaluamos una función trigonométrica de un ángulo. El argumento de una función trigonométrica, por ejemplo seno o coseno, *debe* ser un puro número El radián es un puro número, porque es una razón entre longitudes. Los ángulos en grados son puros números simplemente porque el grado es una "unidad" artificial, no está relacionada a mediciones de longitudes. La noción de requerir un puro número para una función trigonométrica es importante en la ecuación 15.6, donde el ángulo se expresa en términos de otras mediciones. Por lo tanto, ω *debe* ser expresada en rad/s (y no, por ejemplo, en revoluciones por segundo) si t se expresa en segundos. Además, otros tipos de funciones como son logaritmos y funciones exponenciales requieren argumentos que sean puros números.

¡ADVERTENCIA!

15.3 ¿Dónde está el triángulo?

La ecuación 15.6 incluye una función trigonométrica, una *función matemática* que se puede usar, ya sea que se refiera o no a un triángulo. En este caso, sucede que la función coseno tiene el comportamiento correcto para representar la posición de una partícula en movimiento armónico simple.

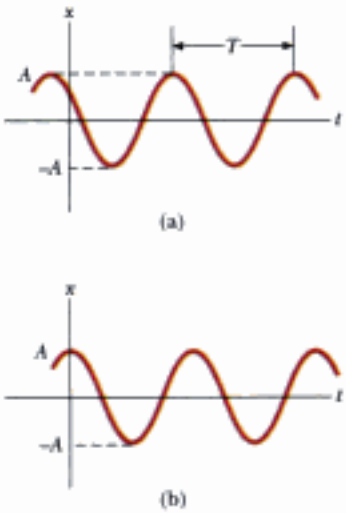


Figura activa 15.2 (a) Gráfica de x contra t para un cuerpo que experimenta movimiento armónico simple. La amplitud del movimiento es A, el periodo (página 456) es T, y la constante de fase es ϕ. (b) Gráfica de x contra t en el caso especial en el que $x = A$ en $t = 0$ y por lo tanto $\phi = 0$.

En el vínculo* Active Figures *en* http://www.pse6.com, *usted podrá ajustar la representación gráfica y ver en la figura 15.1 el movimiento armónico simple resultante del bloque.

Materiał chroniony prawem autorskim

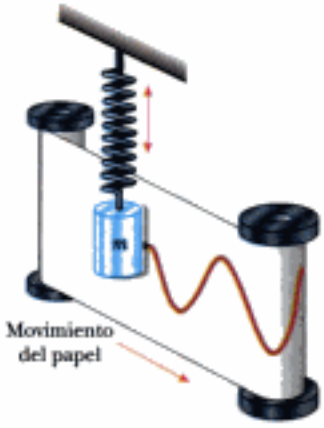


Figura 15.3 Aparato experimental para demostrar el movimiento armónico simple. Una pluma sujeta al cuerpo oscilante marca una forma senoidal sobre el papel de gráfica en movimiento.

En la figura 15.3 se ilustra una configuración experimental que exhibe movimiento armónico simple. Un cuerpo que oscila verticalmente en un resorte tiene unida una pluma al mismo. Al tiempo que el objeto está oscilando, se mueve perpendicularmente una hoja de papel en la dirección de movimiento del resorte, y la pluma marca la curva coseno de la ecuación 15.6.

Pregunta rápida 15.2 Considere una representación gráfica (figura 15.4) del movimiento armónico simple, como lo describe matemáticamente la ecuación 15.6. Cuando el cuerpo está en el punto Ⓐ de la gráfica, su (a) posición y velocidad son positivas (b) posición y velocidad son negativas (c) posición es positiva y su velocidad es cero (d) posición es negativa y su velocidad es cero (e) posición es positiva y su velocidad es negativa (f) posición es negativa y su velocidad es positiva.

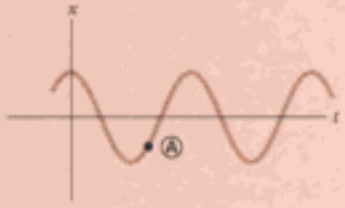


Figura 15.4 (Pregunta rápida 15.2) Gráfica x-t para un cuerpo que experimenta un movimiento armónico simple. En un tiempo particular, la posición del cuerpo está indicada por Ⓐ en la gráfica.

Pregunta rápida 15.3 La figura 15.5 muestra dos curvas que representan objetos que experimentan movimiento armónico simple. La descripción correcta de estos dos movimientos es que el movimiento armónico simple del cuerpo B es (a) de mayor frecuencia angular y mayor amplitud que la del cuerpo A (b) de mayor frecuencia angular y menor amplitud que la del cuerpo A (c) de menor frecuencia angular y mayor amplitud que la del cuerpo A (d) de menor frecuencia angular y menor amplitud que la del cuerpo A.

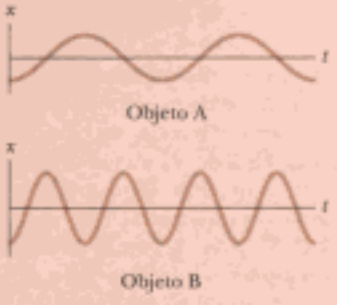


Figura 15.5 (Pregunta rápida 15.3) Dos gráficas $x-t$ para cuerpos que experimentan movimiento armónico simple. Las amplitudes y frecuencias son diferentes para los dos cuerpos.

Investiguemos más la descripción matemática del movimiento armónico simple. El **periodo** T del movimiento es el intervalo necesario para que la partícula recorra un ciclo completo de su movimiento (figura 15.2a). Esto es, los valores de x y v para la partícula en el tiempo t son iguales a los valores de x y v en el tiempo $t + T$. Podemos relacionar el periodo con la frecuencia angular si usamos el hecho de que la fase aumenta en 2π radianes en un intervalo de T:

$$[\omega(t + T) + \phi] - (\omega t + \phi) = 2\pi$$

Al simplificar esta expresión, vemos que $\omega T = 2\pi$, o sea

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{15.10}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

El inverso del periodo se denomina la **frecuencia** f del movimiento. Mientras que el periodo es el intervalo por oscilación, la frecuencia representa el **número de oscilaciones que la partícula experimenta por intervalo unitario:**

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{15.11}$$

Las unidades de f son ciclos por segundo, o **hertz** (Hz). Al reacomodar la ecuación 15.11 resulta

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{15.12}$$

¡ADVERTENCIA!

15.4 Dos clases de frecuencia

Identificamos dos clases de frecuencia para un oscilador armónico simple, es decir, f, llamada simplemente la *frecuencia*, se mide en hertz, y ω, la *frecuencia angular*, se mide en radianes por segundo. Asegúrese el lector de distinguir cuál frecuencia se analiza o pide en un problema dado. Las ecuaciones 15.11 y 15.12 muestran la relación entre las dos frecuencias.

Podemos usar las ecuaciones 15.9, 15.10 y 15.11 para expresar el periodo y frecuencia del movimiento para el sistema formado por la partícula y el resorte, en términos de las características m y k del sistema como

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{15.13}$$

Periodo

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{15.14}$$

Frecuencia

Esto es, el periodo y la frecuencia dependen *sólo* de la masa de la partícula y la constante de fuerza del resorte, y *no* de los parámetros del movimiento, como son A o ϕ. Como podríamos esperar, la frecuencia es mayor para un resorte más rígido (valor más grande de k) y disminuye con una creciente masa de la partícula.

Podemos obtener la velocidad y aceleración[2] de una partícula que experimente movimiento armónico simple a partir de las ecuaciones 15.7 y 15.8:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{15.15}$$

Velocidad de un cuerpo en movimiento armónico simple

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \tag{15.16}$$

Aceleración de un cuerpo en movimiento armónico simple

De la ecuación 15.15 vemos que, como las funciones seno y coseno oscilan entre ± 1, los valores extremos de la velocidad v son $\pm\omega A$. Del mismo modo, la ecuación 15.16 nos dice que los valores extremos de la aceleración a son $\pm\omega^2 A$. Por lo tanto, los valores *máximos* de las magnitudes de la velocidad y la aceleración son

Magnitudes máximas de rapidez y aceleración en movimiento armónico simple

$$v_{\text{máx}} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}\,A \tag{15.17}$$

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = \frac{k}{m}\,A \tag{15.18}$$

La figura 15.6a grafica posición contra tiempo para un valor arbitrario de la constante de fase. Las curvas asociadas de velocidad-tiempo y aceleración-tiempo se ilustran en las figuras 15.6b y 15.6c. Muestran que la fase de la velocidad difiere respecto de la fase de la posición en $\pi/2$, o 90°. Esto es, cuando x es máxima o mínima, la velocidad es cero. Análogamente,

[2] Debido a que el movimiento de un oscilador armónico simple tiene lugar en una dimensión, denotamos la velocidad como v y aceleración como a, con la dirección indicada por un signo positivo o negativo, como en el capítulo 2.

Materiał chroniony prawem autorskim

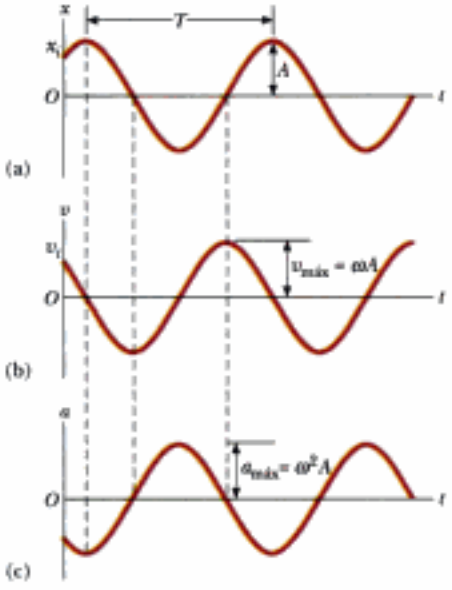


Figura 15.6 Representación gráfica del movimiento armónico simple. (a) Posición contra tiempo. (b) Velocidad contra tiempo. (c) Aceleración contra tiempo. Nótese que en cualquier tiempo especificado, la velocidad está 90° fuera de fase con la posición y la aceleración está 180° fuera de fase con la posición.

cuando x es cero, la rapidez es máxima. Además, nótese que la fase de la aceleración difiere con respecto a la fase de la posición en π radianes, o 180°. Por ejemplo, cuando x es máxima, a tiene una magnitud máxima en la dirección opuesta.

Pregunta rápida 15.4 Considere una representación gráfica (figura 15.4) del movimiento armónico simple, como matemáticamente se describe en la ecuación 15.6. Cuando el cuerpo está en la posición Ⓐ de la gráfica, su (a) velocidad y aceleración son positivas (b) velocidad y aceleración son negativas (c) velocidad es positiva y su aceleración es cero (d) velocidad es negativa y su aceleración es cero (e) velocidad es positiva y su aceleración es negativa (f) velocidad es negativa y su aceleración es positiva.

Pregunta rápida 15.5 Un cuerpo de masa m se cuelga de un resorte y se pone en oscilación. El periodo de la oscilación se mide y registra como T. El cuerpo de masa m se retira y sustituye con un cuerpo de masa $2m$. Cuando este cuerpo se pone en oscilación, el periodo del movimiento es (a) $2T$ (b) $\sqrt{2}T$ (c) T (d) $T/\sqrt{2}$ (e) $T/2$.

La ecuación 15.6 describe el movimiento armónico simple de una partícula en general. Veamos ahora la forma de evaluar las constantes del movimiento. La frecuencia angular ω se evalúa con el uso de la ecuación 15.9. Las constantes A y ϕ se evalúan a partir de las condiciones iniciales, es decir, el estado del oscilador en $t = 0$.

Suponga que iniciamos el movimiento al tirar de la partícula, desde el equilibrio, por una distancia A y soltarla desde el reposo en $t = 0$, como se ve en la figura 15.7. Debemos

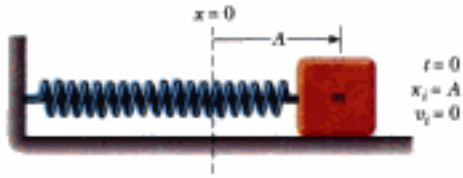


Figura activa 15.7 Un sistema bloque-resorte que empieza su movimiento desde el reposo con el bloque en $x = A$ en $t = 0$. En este caso, $\phi = 0$ y por lo tanto $x = A \cos \omega t$.

En el vínculo **Active Figures** *en* **http://www.pse6.com** *usted podrá comparar las oscilaciones de dos bloques, empezando desde posiciones iniciales diferentes, para ver que la frecuencia es independiente de la amplitud.*

Materiał chroniony prawem autorskim

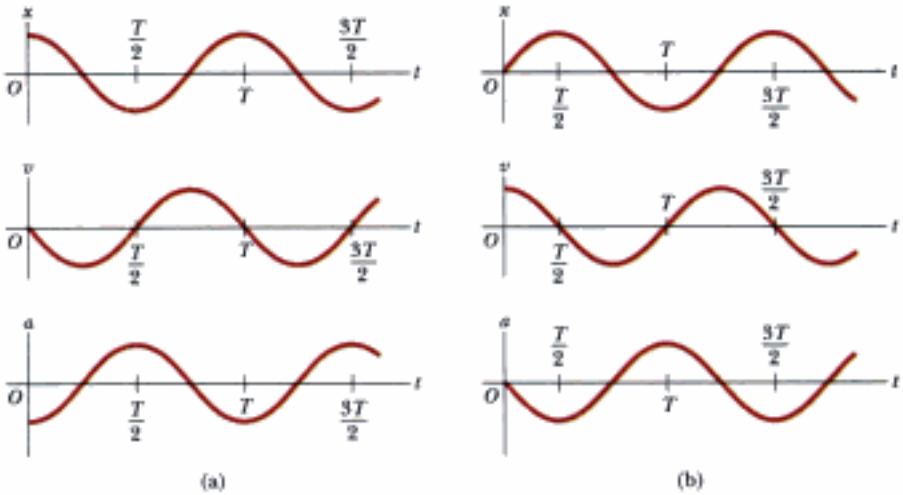


Figura 15.8 (a) Posición, velocidad y aceleración contra tiempo para un bloque que experimente movimiento armónico simple bajo las condiciones iniciales de que en $t = 0$, $x(0) = A$ y $v(0) = 0$. (b) Posición, velocidad y aceleración contra tiempo para un bloque que experimente movimiento armónico simple bajo las condiciones iniciales de que en $t = 0$, $x(0) = 0$ y $v(0) = v_i$.

entonces pedir que nuestras soluciones para $x(t)$ y $v(t)$ (ecuaciones 15.6 y 15.15) obedezcan las condiciones iniciales de que $x(0) = A$ y $v(0) = 0$:

$$x(0) = A\cos\phi = A$$
$$v(0) = -\omega A \operatorname{sen}\phi = 0$$

Estas condiciones se satisfacen si escogemos $\phi = 0$, dando $x = A\cos\omega t$ como nuestra solución. Para verificar esta solución, nótese que satisface la condición de que $x(0) = A$, porque $\cos 0 = 1$.

Posición, velocidad y aceleración contra tiempo se grafican en la figura 15.8a para este caso especial. La aceleración alcanza valores extremos de $\pm\omega^2 A$ cuando la posición tiene valores extremos de $\pm A$. Además, la velocidad tiene valores extremos de $\pm\omega A$, que ambos ocurren en $x = 0$. Por lo tanto, la solución cuantitativa está de acuerdo con nuestra descripción cualitativa de este sistema.

Consideremos otra posibilidad. Suponga que el sistema está oscilando y definimos $t = 0$ como el instante en que la partícula pasa por la posición no estirada del resorte mientras se mueve a la derecha (figura 15.9). En este caso, debemos pedir que nuestras soluciones para $x(t)$ y $v(t)$ obedezcan las condiciones iniciales de que $x(0) = 0$ y $v(0) = v_i$:

$$x(0) = A\cos\phi = 0$$
$$v(0) = -\omega A \operatorname{sen}\phi = v_i$$

La primera de estas condiciones nos dice que $\phi = \pm\pi/2$. Con estas opciones para ϕ, la segunda condición nos dice que $A = \pm v_i/\omega$. Debido a que la velocidad inicial es positiva y la amplitud debe ser positiva, debemos tener $\phi = -\pi/2$. Por lo tanto, la solución está dada por

$$x = \frac{v_i}{\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Las gráficas de posición, velocidad y aceleración contra tiempo para esta opción de $t = 0$, se muestran en la figura 15.8b. Nótese que estas curvas son las mismas que las de la figura 15.8a, pero desplazadas a la derecha un cuarto de ciclo. Esto se describe matemáticamente por la constante de fase $\phi = -\pi/2$, que es un cuarto de ciclo completo de 2π.

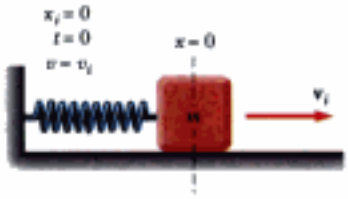


Figura activa 15.9 El sistema bloque-resorte está experimentando oscilación, y $t = 0$ se define el instante cuando el bloque pasa por la posición de equilibrio $x = 0$ y se mueve a la derecha con una rapidez v_i.

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, usted podrá comparar las oscilaciones de dos bloques con diferentes velocidades en $t = 0$, para ver que la frecuencia es independiente de la amplitud.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 15.1 Un cuerpo oscilante

Un cuerpo oscila con movimiento armónico simple a lo largo del eje x. Su posición varía con el tiempo según la ecuación

$$x = (4.00\ \text{m}) \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

donde t es en segundos y los ángulos del paréntesis son en radianes.

(A) Determine la amplitud, frecuencia y periodo del movimiento.

Solución Al comparar esta ecuación con la ecuación 15.6, $x = A \cos(\omega t + \phi)$, vemos que $A =$ **4.00 m** y

$\omega = \pi$ rad/s. Por lo tanto, $f = \omega/2\pi = \pi/2\pi$ **0.500 Hz**

y $T = 1/f =$ **2.00 s.**

(B) Calcule la velocidad y aceleración del cuerpo en cualquier tiempo t.

Solución Derivando x para hallar v, y v para hallar a, obtenemos

$$v = \frac{dx}{dt} = -(4.00\ \text{m/s})\ \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\frac{d}{dt}(\pi t)$$

$$= -(4.00\pi\ \text{m/s})\ \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -(4.00\pi\ \text{m/s}) \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\frac{d}{dt}(\pi t)$$

$$= -(4.00\pi^2\ \text{m/s}^2) \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

(C) Con el uso de los resultados de la parte (B), determine la posición, velocidad y aceleración del cuerpo en $t = 1.00$ s.

Solución Observando que los ángulos de las funciones trigonométricas están en radianes, obtenemos, en $t = 1.00$ s,

$$x = (4.00\ \text{m}) \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = (4.00\ \text{m}) \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= (4.00\ \text{m})(-0.707) = \mathbf{-2.83\ m}$$

$$v = -(4.00\pi\ \text{m/s})\ \text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= -(4.00\pi\ \text{m/s})(-0.707) = \mathbf{8.89\ m/s}$$

$$a = -(4.00\pi^2\ \text{m/s}^2) \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= -(4.00\pi^2\ \text{m/s}^2)(-0.707) = \mathbf{27.9\ m/s^2}$$

(D) Determine la máxima rapidez y máxima aceleración del cuerpo.

Solución En las expresiones generales para v y a encontradas en la parte (B), usamos el hecho de que los valores máximos de las funciones seno y coseno son la unidad. Por lo tanto, v varía entre $\pm 4.00\pi$ m/s y a varía entre $\pm 4.00\ \pi^2$ m/s^2. En consecuencia,

$$v_{\text{máx}} = 4.00\pi\ \text{m/s} = \mathbf{12.6\ m/s}$$

$$a_{\text{máx}} = 4.00\pi^2\ \text{m/s}^2 = \mathbf{39.5\ m/s^2}$$

Obtenemos los mismos resultados usando las relaciones $v_{\text{máx}} = \omega A$ y $a_{\text{máx}} = \omega^2 A$, donde $A = 4.00$ m y $\omega = \pi$ rad/s.

(E) Halle el desplazamiento del cuerpo entre $t = 0$ y $t = 1.00$ s.

Solución La posición en $t = 0$ es

$$x_i = (4.00\ \text{m}) \cos\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = (4.00\ \text{m})(0.707) = 2.83\ \text{m}$$

En la parte (C), encontramos que la posición en $t = 1.00$ s es -2.83 m; por lo tanto, el desplazamiento entre $t = 0$ y $t = 1.00$ s es

$$\Delta x = x_f - x_i = -2.83\ \text{m} - 2.83\ \text{m} = \mathbf{-5.66\ m}$$

Debido a que la velocidad del cuerpo cambia de signo durante el primer segundo, la magnitud de Δx no es la misma que la distancia recorrida en el primer segundo. (Para cuando termina el primer segundo, el cuerpo ha pasado por el punto $x = -2.83$ m una vez más, se ha movido a $x = -4.00$ m y ha regresado a $x = -2.83$ m.)

Ejemplo 15.2 ¡Cuidado con los baches!

Un auto con masa de 1 300 kg está hecho de modo que su bastidor está sostenido por cuatro resortes. Cada resorte tiene una constante de fuerza de 20 000 N/m. Si dos personas que viajan en el auto tienen masa combinada de 160 kg, encuentre la frecuencia de vibración del auto después que ha pasado sobre un bache del camino.

Solución Para conceptualizar este problema, pensemos en nuestras experiencias con automóviles. Cuando nos sentamos en un auto, éste se mueve hacia abajo una pequeña distancia, porque nuestro peso comprime más los resortes. Si empujamos hacia abajo sobre la defensa delantera y la soltamos, el frente del auto oscila un par de veces. Podemos modelar el auto como que está sostenido por un solo resorte y clasificamos éste como un problema de oscilación con base en nuestro modelo de un solo resorte. Para analizar el problema, primero necesitamos considerar la constante efectiva de resorte de los cuatro resortes combinados. Para una extensión x dada de los resortes, la fuerza combinada sobre el auto es la suma de las fuerzas desde los resortes individuales:

$$F_{\text{total}} = \sum(-kx) = -\left(\sum k\right)x$$

donde x se ha factorizado de la suma, porque es la misma para los cuatro resortes. Vemos que la constante efectiva de resorte

Materiał chroniony prawem autorskim

transforma continuamente entre energía potencial almacenada en el resorte y energía cinética del bloque.

La figura 15.11 ilustra la posición, velocidad, aceleración, energía cinética y energía potencial del sistema bloque-resorte para un periodo completo del movimiento. Casi todas las ideas analizadas hasta aquí, están incorporadas en esta importante figura. Estúdielas cuidadosamente.

Por último, podemos usar el principio de conservación de la energía para obtener la velocidad para una posición arbitraria al expresar la energía total en alguna posición arbitraria x como

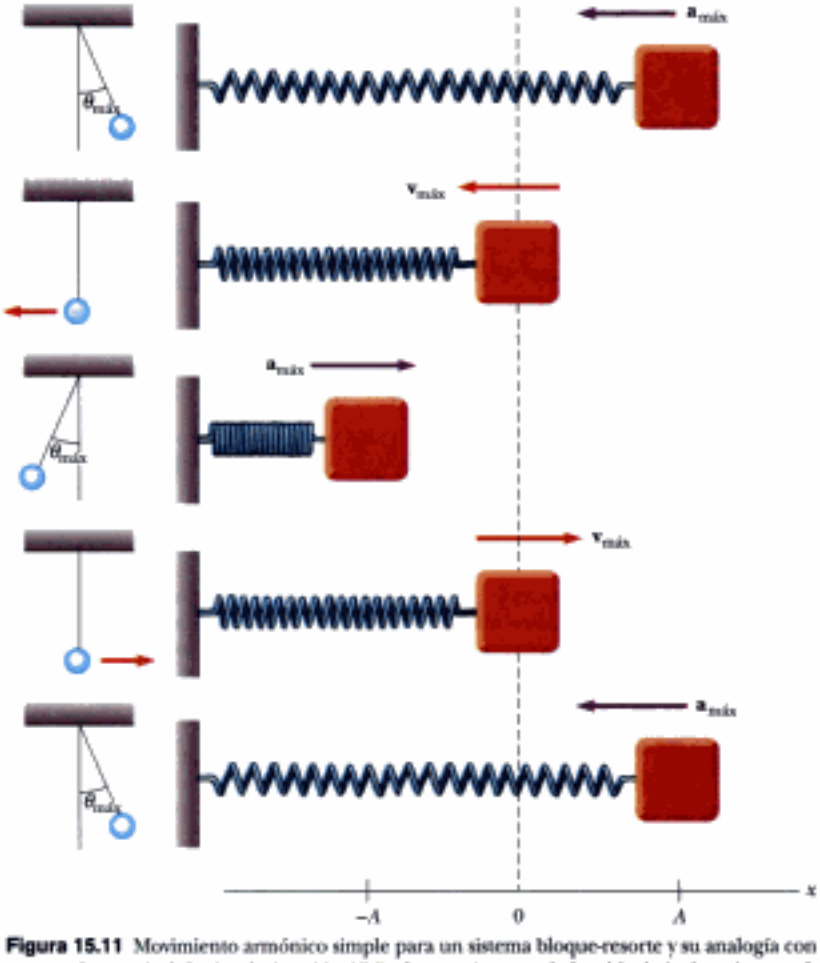
$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \qquad (15.22)$$

Velocidad como función de la posición para un oscilador armónico simple

Cuando verificamos la ecuación 15.22 para ver si está acorde con nuestros casos conocidos, encontramos que verifica el hecho de que la rapidez es máxima en $x = 0$ y es cero en los puntos de inflexión $x = \pm A$.

El estudiante se puede preguntar por qué estamos empleando tanto tiempo en estudiar osciladores armónicos simples. Lo hacemos porque son buenos modelos de una amplia variedad de fenómenos físicos. Por ejemplo, recordemos el potencial de Lennard-Jones estudiado en el ejemplo 8.11. Esta complicada función describe las fuerzas que mantienen juntos los átomos. La figura 15.12a muestra que para pequeños desplazamientos desde la posición de equilibrio, la curva de energía potencial para esta función se aproxima a una parábola, que representa la función de energía potencial para un oscilador armónico sim-



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$T/4$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$3T/4$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

Figura 15.11 Movimiento armónico simple para un sistema bloque-resorte y su analogía con el movimiento de un péndulo simple (sección 15.5). Los parámetros de la tabla de la derecha se refieren al sistema bloque-resorte, suponiendo que en $t = 0$, $x = A$, de modo que $x = A\cos\omega t$.

Materiał chroniony prawem autorskim

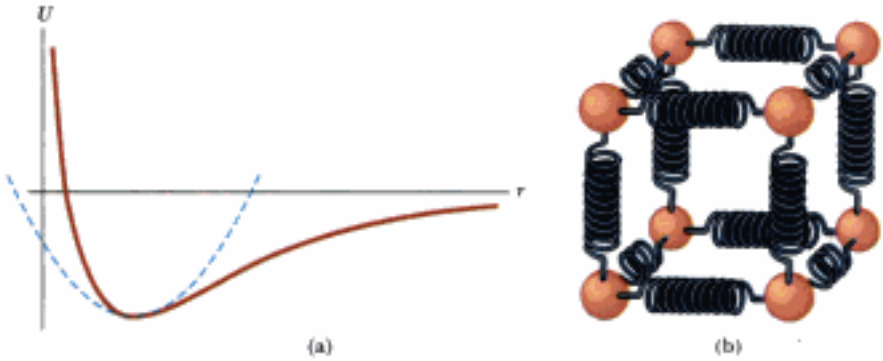


Figura 15.12 (a) Si los átomos de una molécula no se mueven demasiado lejos de sus posiciones de equilibrio, una gráfica de energía potencial contra distancia de separación entre átomos es semejante a la gráfica de energía potencial contra posición para un oscilador armónico simple (curva azul). (b) Las fuerzas entre átomos en un sólido se pueden modelar si imaginamos resortes entre átomos vecinos.

ple. Por lo tanto, podemos modelar las complejas fuerzas atómicas de enlace como que se deben a diminutos resortes, como se ve en la figura 15.12b.

Las ideas presentadas en este capítulo se aplican no sólo a sistemas de bloque-resorte y átomos, sino también a una amplia variedad de situaciones que incluyen cintas elásticas para saltos de altura (bungees), sintonía en estaciones de televisión y observar la luz emitida por un láser. El estudiante verá más ejemplos de osciladores armónicos simples cuando trabaje en este libro.

Ejemplo 15.4 Oscilaciones en una superficie horizontal

Un carro de 0.500 kg conectado a un resorte ligero para el cual la constante de fuerza es 20.0 N/m, oscila en una pista horizontal de aire y sin fricción.

(A) Calcule la energía total del sistema y la máxima rapidez del carro si la amplitud del movimiento es de 3.00 cm.

Solución Si usamos la ecuación 15.21, obtenemos

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}(20.0\ \text{N/m})(3.00 \times 10^{-2}\ \text{m})^2$$
$$= \mathbf{9.00 \times 10^{-3}\ J}$$

Cuando el carro está situado en $x = 0$, sabemos que $U = 0$ y $E = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2$; por lo tanto,

$$\tfrac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = 9.00 \times 10^{-3}\ \text{J}$$
$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2(9.00 \times 10^{-3}\ \text{J})}{0.500\ \text{kg}}} = \mathbf{0.190\ m/s}$$

(B) ¿Cuál es la velocidad del carro cuando la posición es 2.00 cm?

Solución Podemos aplicar la ecuación 15.22 directamente:

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{20.0\ \text{N/m}}{0.500\ \text{kg}}[(0.030\,0\ \text{m})^2 - (0.020\,0\ \text{m})^2]}$$
$$= \mathbf{\pm 0.141\ m/s}$$

Los signos positivos y negativos indican que el carro podría estar en movimiento ya sea a la derecha o a la izquierda en este instante.

(C) Calcule las energías cinética y potencial del sistema cuando la posición sea 2.00 cm.

Solución Si usamos el resultado de (B), encontramos que

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0.500\ \text{kg})(0.141\ \text{m/s})^2 = \mathbf{5.00 \times 10^{-3}\ J}$$

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(20.0\ \text{N/m})(0.020\,0\ \text{m})^2 = \mathbf{4.00 \times 10^{-3}\ J}$$

Nótese que $K + U = E$.

¿Qué pasaría si? **El movimiento del carro de este ejemplo podría haberse iniciado al soltar el carro desde el reposo en $x = 3.00$ cm. ¿Qué pasaría si el carro se soltara desde la misma posición, pero con una velocidad inicial de $v = -0.100$ m/s? ¿Cuáles son la nueva amplitud y máxima rapidez del carro?**

Respuesta Éste es el mismo tipo de pregunta que hicimos al final del ejemplo 15.3, pero aquí aplicamos un planteamiento de energía. Primero calculemos la energía total del sistema en $t = 0$, que está formado por energía cinética y energía potencial:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(0.500\ \text{kg})(-0.100\ \text{m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(20.0\ \text{N/m})(0.030\,0\ \text{m})^2$$
$$= 1.15 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

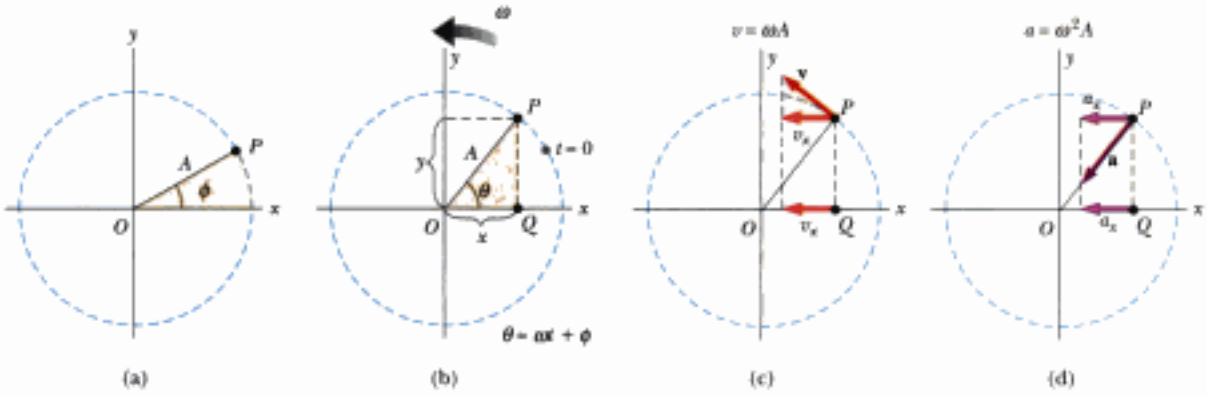


Figura 15.15 Relación entre el movimiento circular uniforme de un punto P y el movimiento armónico simple de un punto Q. Una partícula en P se mueve en un círculo de radio A con rapidez angular constante ω. (a) Círculo de referencia que muestra la posición en P en $t = 0$. (b) Las coordenadas x de los puntos P y Q son iguales y varían en el tiempo de acuerdo con la expresión $x = A\cos(\omega t + \phi)$. (c) El componente x de la velocidad de P es igual a la velocidad de Q. (d) El componente x de la aceleración de P es igual a la aceleración de Q.

Considere una partícula colocada en el punto P sobre la circunferencia de un círculo de radio A, como se ve en la figura 15.15a, con la línea OP formando un ángulo ϕ con el eje x en $t = 0$. A este círculo lo llamamos *círculo de referencia* para comparar movimiento armónico simple con movimiento circular uniforme, y tomamos la posición de P en $t = 0$ como nuestra posición de referencia. Si la partícula se mueve a lo largo del círculo con rapidez angular constante ω hasta que OP forma un ángulo θ con el eje x, como en la figura 15.15b, entonces en algún tiempo $t > 0$, el ángulo entre OP y el eje x es $\theta = \omega t + \phi$. Cuando la partícula se mueve a lo largo del círculo, la proyección de P sobre el eje x, marcada como punto Q, se mueve hacia delante y atrás a lo largo del eje x entre los límites $x = \pm A$.

Nótese que los puntos P y Q tienen siempre la misma coordenada x. Del triángulo recto OPQ, vemos que esta coordenada x es

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{15.23}$$

Esta expresión es la misma que la ecuación 15.6 y muestra que el punto Q se mueve con movimiento armónico simple a lo largo del eje x. Por lo tanto, concluimos que

el movimiento armónico simple a lo largo de una recta se puede representar por la proyección del movimiento circular uniforme a lo largo de un diámetro de un círculo de referencia.

Podemos hacer un argumento similar si observamos de la figura 15.15b que la proyección de P a lo largo del eje y también exhibe movimiento armónico simple. Por lo tanto, **el movimiento circular uniforme puede ser considerado como una combinación de dos movimientos armónicos simples, uno a lo largo del eje x y uno a lo largo del eje y, con los dos diferentes en fase por 90°.**

Esta interpretación geométrica muestra que el intervalo para una revolución completa del punto P sobre el círculo de referencia es igual al periodo de movimiento T para el movimiento armónico simple entre $x = \pm A$. Esto es, la rapidez angular ω de P es igual que la frecuencia angular ω del movimiento armónico simple a lo largo del eje x. (Ésta es la razón por la que usamos el mismo símbolo.) La constante de fase ϕ para movimiento armónico simple corresponde al ángulo inicial que OP forma con el eje x. El radio A del círculo de referencia es igual a la amplitud del movimiento armónico simple.

Debido a que la relación entre rapidez lineal y angular para el movimiento circular es $v = r\omega$ (véase la ecuación 10.10), la partícula que se mueve sobre el círculo de referencia de radio A tiene una velocidad de magnitud ωA. De la geometría de la figura 15.15c, vemos que el componente x de esta velocidad es $-\omega A\,\text{sen}(\omega t + \phi)$. Por definición, el punto Q tiene una velocidad dada por dx/dt. Al derivar la ecuación 15.23 con respecto al tiempo, encontramos que la velocidad de Q es igual que el componente x de la velocidad de P.

Materiał chroniony prawem autorskim

La aceleración de P sobre el círculo de referencia está dirigida radialmente hacia dentro, hacia O, y tiene una magnitud $v^2/A = \omega^2 A$. De la geometría de la figura 15.15d, vemos que el componente x de esta aceleración es $-\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$. Este valor es también la aceleración del punto Q proyectada a lo largo del eje x, como se puede verificar si se toma la segunda derivada de la ecuación 15.23.

Pregunta rápida 15.6 La figura 15.16 muestra la posición de un cuerpo en movimiento circular uniforme en $t = 0$. Una luz ilumina desde arriba y proyecta una sombra del cuerpo sobre una pantalla abajo del movimiento circular. Los valores correctos para la *amplitud* y *constante de fase* del movimiento armónico simple de la sombra son (a) 0.50 m y 0 (b) 1.00 m y 0 (c) 0.50 m y π (d) 1.00 m y π.

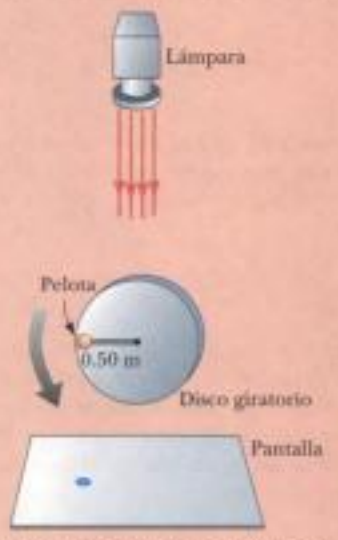


Figura 15.16 (Pregunta rápida 15.6) Un cuerpo se mueve en movimiento circular, proyectando una sombra sobre la pantalla abajo. Se muestra su posición en un instante del tiempo.

Ejemplo 15.5 Movimiento circular con rapidez angular constante

Una partícula gira en sentido contrario a las manecillas de un reloj en un círculo de radio 3.00 m con una rapidez angular constante de 8.00 rad/s. En $t = 0$, la partícula tiene una coordenada x de 2.00 m y se mueve a la derecha.

(A) Determine la coordenada x como función del tiempo.

Solución Como la amplitud del movimiento de la partícula es igual al radio del círculo y $\omega = 8.00$ rad/s, tenemos

$$x = A\cos(\omega t + \phi) = (3.00\text{ m})\cos(8.00t + \phi)$$

Podemos evaluar ϕ al usar la condición inicial que $x = 2.00$ m en $t = 0$:

$$2.00\text{ m} = (3.00\text{ m})\cos(0 + \phi)$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{2.00\text{ m}}{3.00\text{ m}}\right)$$

Si fuéramos a tomar nuestra respuesta como $\phi = 48.2° = 0.841$ rad, entonces la coordenada $x = (3.00\text{ m})\cos(8.00t + 0.841)$ sería decreciente en el tiempo $t = 0$ (esto es, moviéndose a la izquierda). Como nuestra partícula se mueve primero a la derecha, debemos escoger $\phi = -0.841$ rad. La coordenada x como función del tiempo es entonces

$$x = (3.00\text{ m})\cos(8.00t - 0.841)$$

Nótese que el ángulo ϕ de la función coseno debe ser en radianes.

(B) Hállense los componentes x de la velocidad y aceleración de la partícula en cualquier tiempo t.

Solución

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-3.00\text{ m})(8.00\text{ rad/s})\text{sen}(8.00t - 0.841)$$

$$= -(24.0\text{ m/s})\text{sen}(8.00t - 0.841)$$

$$a_x = \frac{dv}{dt} = (-24.0\text{ m/s})(8.00\text{ rad/s})\cos(8.00t - 0.841)$$

$$= -(192\text{ m/s}^2)\cos(8.00t - 0.841)$$

De estos resultados, concluimos que $v_{máx} = 24.0$ m/s y que $a_{máx} = 192$ m/s^2.

Materiał chroniony prawem autorskim

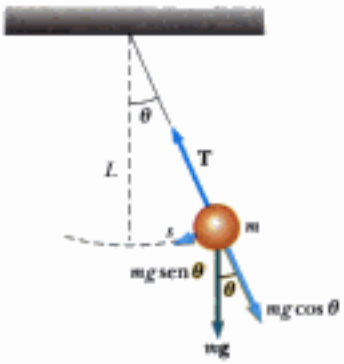


Figura activa 15.17 Cuando θ es pequeña, un péndulo simple oscila en movimiento armónico simple alrededor de la posición de equilibrio $\theta = 0$. La fuerza restauradora es $-mg \operatorname{sen} \theta$, el componente de la fuerza gravitacional tangente al arco.

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, usted podrá ajustar la masa de la pesa, la longitud de la cuerda y el ángulo inicial, para ver la oscilación resultante del péndulo.

15.5 El péndulo

El **péndulo simple** es otro sistema mecánico que exhibe movimiento periódico. Está formado por una pesa semejante a una partícula de masa m suspendida por una cuerda ligera de longitud L que está fija en el extremo superior, como se ve en la figura 15.17. El movimiento se presenta en el plano vertical y es accionado por la fuerza gravitacional. Demostraremos que, siempre que el ángulo θ sea pequeño (menor a unos 10°), el movimiento es muy cercano al del oscilador armónico simple.

Las fuerzas que actúan sobre la pesa son la fuerza **T** ejercida por la cuerda y la fuerza gravitacional $m\mathbf{g}$. El componente tangencial $mg \operatorname{sen} \theta$ de la fuerza gravitacional siempre actúa hacia $\theta = 0$, opuesto al desplazamiento de la pesa desde la posición más baja. Por lo tanto, el componente tangencial es una fuerza restauradora, y podemos aplicar la segunda ley de Newton para el movimiento en la dirección tangencial:

$$F_t = -mg \operatorname{sen} \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

donde s es la posición de la pesa medida a lo largo del arco y el signo negativo indica que la fuerza tangencial actúa hacia la posición de equilibrio (vertical). Como $s = L\theta$ (ecuación 10.1a) y L es constante, esta ecuación se reduce a

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta$$

Considerando θ como la posición, comparemos esta ecuación con la ecuación 15.3, ¿tiene la misma forma matemática? El lado derecho es proporcional a sen θ más que a θ; en consecuencia, no esperaríamos movimiento armónico simple porque esta expresión no es de la forma de la ecuación 15.3. No obstante, si suponemos que θ es *pequeño*, podemos usar la aproximación sen $\theta \approx 0$; por lo tanto, en esta aproximación, la ecuación de movimiento para el péndulo simple se convierte en

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta \qquad \text{(para pequeños valores de } \theta\text{)} \tag{15.24}$$

Ahora tenemos una expresión que tiene la misma forma que la ecuación 15.3, y concluimos que el movimiento para pequeñas amplitudes de oscilación es un movimiento armónico simple. Por lo tanto, la función θ se puede escribir como $\theta = \theta_{\text{máx}} \cos(\omega t + \phi)$, donde $\theta_{\text{máx}}$ es la *máxima posición angular* y la frecuencia angular ω es

Frecuencia angular para un péndulo simple

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{15.25}$$

El periodo del movimiento es

Periodo de un péndulo simple

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{15.26}$$

En otras palabras, **el periodo y la frecuencia de un péndulo simple dependen sólo de la longitud de la cuerda y la aceleración debida a la gravedad.** Como el periodo es independiente de la masa, concluimos que todos los péndulos simples que sean de igual longitud y se encuentren en el mismo lugar (para que g sea constante) oscilan con el mismo periodo. La analogía entre el movimiento de un péndulo simple y el de un sistema bloque-resorte se ilustra en la figura 15.11.

El péndulo simple se puede usar como cronómetro porque su periodo depende sólo de su longitud y del valor local de g. También es un cómodo aparato para hacer mediciones precisas de la aceleración en caída libre. Estas mediciones son importantes porque las variaciones de g en valores locales pueden dar información sobre la existencia de petróleo y de otros valiosos recursos subterráneos.

¡ADVERTENCIA!

15.5 Movimiento armónico simple no verdadero

Recuerde que el péndulo *no* exhibe verdadero movimiento armónico simple para *cualquier* ángulo. Si el ángulo es menor a unos 10°, el movimiento es cercano al armónico simple y se puede *modelar* como éste.

Materiał chroniony prawem autorskim

El periodo es

Periodo de un péndulo simple

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{15.28}$$

Se puede usar este resultado para medir el momento de inercia de un cuerpo rígido plano. Si se conoce la ubicación del centro de masa, y por lo tanto el valor de d, el momento de inercia se puede obtener al medir el periodo. Por último, nótese que la ecuación 15.28 se reduce al periodo de un péndulo simple (ecuación 15.26) cuando $I = md^2$, es decir, cuando toda la masa está concentrada en el centro de masa.

Ejemplo 15.7 Una varilla oscilante

Una varilla uniforme de masa M y longitud L, hace pivote alrededor de un extremo y oscila en un plano vertical (figura 15.19). Encuentre el periodo de oscilación si la amplitud del movimiento es pequeña.

Solución En el capítulo 10 encontramos que el momento de inercia de una varilla uniforme alrededor de un eje que pasa por un extremo es $\frac{1}{3}ML^2$. La distancia d del pivote al centro de masa es $L/2$. Sustituyendo estas cantidades en la ecuación 15.28 resulta

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg(L/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Comentario En uno de los aterrizajes en la Luna, un astronauta que caminaba en la superficie lunar tenía un cinturón que colgaba de su traje espacial, y el cinturón oscilaba como péndulo físico. Un científico en la Tierra observó este movimiento en televisión y lo utilizó para estimar la aceleración en caída libre en la Luna. ¿Cómo hizo este cálculo el científico?

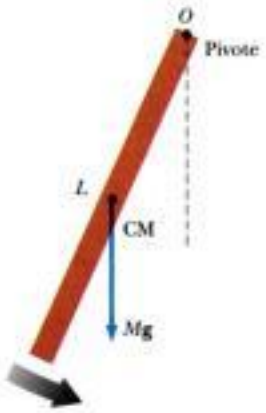


Figura 15.19 Una varilla rígida que oscila alrededor de un pivote que pasa por un extremo es un péndulo físico con $d = L/2$, de la tabla 10.2, $I = \frac{1}{3}ML^2$.

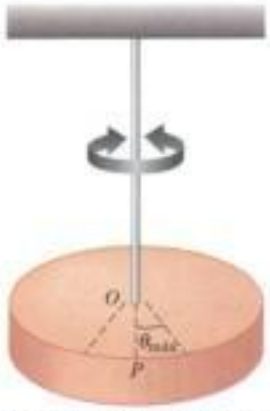


Figura 15.20 Un péndulo de torsión está formado por un cuerpo rígido suspendido por un alambre unido a un soporte rígido. El cuerpo oscila alrededor de la línea OP con una amplitud $\theta_{máx}$.

Péndulo de torsión

La figura 15.20 muestra un cuerpo rígido suspendido por un alambre unido a un soporte fijo. Cuando el cuerpo se tuerce un ángulo θ, el alambre torcido ejerce sobre el cuerpo un par de torsión restaurador que es proporcional a la posición angular. Esto es,

$$\tau = -\kappa\theta$$

donde κ se llama *constante de torsión* del alambre de soporte. El valor de κ se puede obtener al aplicar un par de torsión conocido para torcer el alambre un ángulo θ que se pueda medir. Si se aplica la segunda ley de Newton para movimiento rotacional, encontramos

$$\tau = -\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta \tag{15.29}$$

De nuevo, ésta es la ecuación de movimiento para un oscilador armónico simple, con $\omega = \sqrt{\kappa/I}$ y un periodo

Periodo de un péndulo de torsión

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \tag{15.30}$$

Este sistema se denomina *péndulo torsión*. No hay restricción de ángulo pequeño en esta situación mientras no se exceda el límite elástico del alambre.

Materiał chroniony prawem autorskim

15.6 Oscilaciones amortiguadas

Los movimientos oscilatorios que hemos considerado hasta este punto, han sido para sistemas ideales, es decir, sistemas que oscilan indefinidamente bajo la acción de sólo una fuerza, una fuerza restauradora lineal. En muchos sistemas reales, fuerzas no conservativas, por ejemplo la fricción, retardan el movimiento. En consecuencia, la energía mecánica del sistema disminuye en tiempo y se puede decir que el movimiento es *amortiguado*. La figura 15.21 describe uno de estos sistemas: un cuerpo unido a un resorte y sumergido en un líquido viscoso.

Figura 15.21 Un ejemplo de un oscilador amortiguado es un cuerpo unido a un resorte y sumergido en un líquido viscoso.

Un tipo común de fuerza retardadora es el que se estudia en la sección 6.4, donde la fuerza es proporcional a la rapidez del cuerpo en movimiento y actúa en la dirección contraria al movimiento. Esta fuerza retardadora se observa a veces cuando un cuerpo se mueve en el aire, por ejemplo. Como la fuerza retardadora se puede expresar como $\mathbf{R} = -b\mathbf{v}$ (donde b es una constante llamada *coeficiente de amortiguamiento*) y la fuerza restauradora del sistema es $-kx$, podemos escribir la segunda ley de Newton como

$$\sum F_x = -kx - bv_x = ma_x$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{15.31}$$

La solución de esta ecuación requiere de matemáticas que puedan no ser familiares al estudiante; aquí simplemente la expresamos sin prueba. Cuando la fuerza retardadora es pequeña en comparación con la máxima fuerza restauradora, es decir, cuando b es pequeño, la solución a la ecuación 15.31 es

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi) \tag{15.32}$$

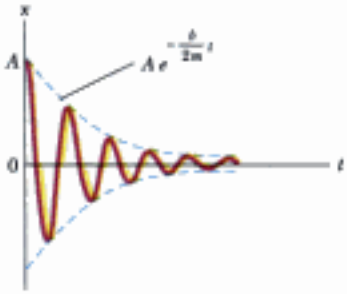


Figura activa 15.22 Gráfica de posición contra tiempo para un oscilador amortiguado. Note la reducción en amplitud con el tiempo.

donde la frecuencia angular de oscilación es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \tag{15.33}$$

Este resultado se puede verificar al sustituir la ecuación 15.32 en la 15.31.

La figura 15.22 muestra la posición como función del tiempo para un cuerpo que oscila en presencia de una fuerza retardadora. Vemos que **cuando la fuerza retardadora es pequeña, se preserva el carácter oscilatorio del movimiento, pero disminuye la amplitud con el tiempo, con el resultado de que el movimiento cesa finalmente.** Cualquier sistema que se comporte de esta manera, se conoce como **oscilador amortiguado.** Las líneas interrumpidas azules de la figura 15.22, que definen la *envolvente* de la curva oscilatoria, representan el factor exponencial de la ecuación 15.32. Esta envolvente muestra que **la amplitud decrece exponencialmente con el tiempo.** Para el movimiento con una constante de resorte y masa del objeto dadas, las oscilaciones se amortiguan más rápidamente cuando el valor máximo de la fuerza retardadora se aproxima al valor máximo de la fuerza restauradora.

En el vínculo* Active Figures *en* http://www.pse6.com, *usted podrá ajustar la constante de resorte, la masa del objeto y la constante de amortiguamiento, para ver la oscilación amortiguada del objeto.

Es conveniente expresar la frecuencia angular (ecuación 15.33) de un oscilador amortiguado en la forma

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ representa la frecuencia angular en ausencia de una fuerza retardadora (el oscilador no amortiguado) y se llama frecuencia natural del sistema.

Cuando la magnitud de la máxima fuerza retardadora $R_{máx} = bv_{máx} < kA$, se dice que el sistema está **subamortiguado.** El movimiento resultante está representado por la curva azul en la figura 15.23. Cuando aumenta el valor de b, la amplitud de las oscilaciones se reduce cada vez más rápidamente. Cuando b alcanza un valor crítico b_c tal que $b_c/2m = \omega_0$, el sistema no oscila y se dice que está **críticamente amortiguado.** En este caso el sistema, una vez soltado desde el reposo en alguna posición que no sea de equilibrio, se aproxima a la posición de equilibrio, pero no pasa por ella. La gráfica de posición contra tiempo para este caso es la curva roja de la figura 15.23.

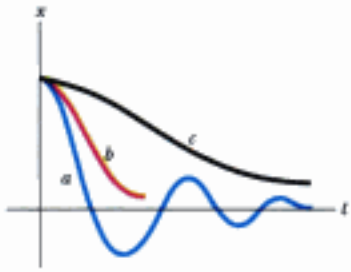


Figura 15.23 Gráficas de posición contra tiempo para (a) un oscilador no subamortiguado, (b) un oscilador críticamente amortiguado, y (c) un oscilador sobreamortiguado.

Materiał chroniony prawem autorskim

de la fuerza de excitación es variable, mientras que la frecuencia natural ω_0 del oscilador es-

8. Un sistema formado por un bloque y un resorte experimenta movimiento armónico simple con amplitud A. ¿Cambia la energía total si la masa se duplica pero la amplitud no se cambia? ¿Las energías cinética y potencial dependen de la masa? Explique.

9. Las ecuaciones que aparecen en la tabla 2.2 dan la posición como función del tiempo, la velocidad como función del tiempo, y la velocidad como función de la posición para un cuerpo que se mueve en línea recta con aceleración constante. La cantidad v_{xi} aparece en cada ecuación. Cualquiera de estas ecuaciones, ¿aplica a un cuerpo que se mueve en línea recta con movimiento armónico simple? Usando un formato similar, haga una tabla de ecuaciones que describan un movimiento armónico simple. Incluya ecuaciones que den aceleración como función del tiempo y aceleración como función de la posición. Exprese las ecuaciones en forma tal que apliquen igualmente a un sistema de un bloque, a un péndulo y a otros sistemas vibratorios. ¿Qué cantidad aparece en cada ecuación?

10. ¿Qué ocurre al periodo de un péndulo simple si se duplica la longitud del péndulo? ¿Qué le pasa al periodo si se duplica la masa de la pesa suspendida?

11. Un péndulo simple se suspende del techo de un elevador estacionario y se determina el periodo. Describa los cambios, si los hay, del periodo cuando el elevador (a) acelera hacia arriba, (b) acelera hacia abajo, y (c) se mueve con velocidad constante.

12. Imagine que un péndulo cuelga del techo de un auto. Cuando el auto baja por inercia por una colina descendente, ¿es vertical la posición de equilibrio del péndulo? El periodo de oscilación ¿difiere del que hay en un auto estacionario?

13. Un péndulo simple experimenta movimiento armónico simple cuando θ es pequeño. ¿Es periódico el movimiento cuando θ es grande? ¿Cómo cambia el periodo de movimiento cuando θ aumenta?

14. Si un reloj antiguo se atrasa, ¿cómo podríamos ajustar la longitud del péndulo para corregir el tiempo?

15. ¿Existen oscilaciones amortiguadas para cualquier valor de b y k? Explique.

16. ¿Es posible tener oscilaciones amortiguadas cuando un sistema está en resonancia? Explique.

17. A resonancia, ¿a qué es igual la constante de fase ϕ en la ecuación 15.35? (*Sugerencia:* Compare esta ecuación con la expresión para la fuerza de excitación, que debe estar en fase con la velocidad a resonancia.)

18. Una persona está de pie en un trampolín y salta para ponerse en oscilación. Encuentra una respuesta máxima, en términos de la amplitud de oscilación del extremo del trampolín, cuando salta a una frecuencia f. Ahora se mueve a la parte media del trampolín y repite el experimento. La frecuencia de resonancia para oscilaciones forzadas en este punto, ¿es más alta, más baja o igual a f? ¿Por qué?

19. Algunos paracaídas tienen agujeros para permitir que el aire circule suavemente por el paracaídas. Sin los agujeros, cuando el paracaídas baja al suelo, el aire bajo el paracaídas sale a veces por los bordes del paracaídas en forma alterna y periódica de un lado y luego del otro. ¿Por qué podría causar un problema este movimiento periódico del aire?

20. Una persona observa un árbol pequeño, sin notar brisa alguna, y casi todas las hojas del árbol no se mueven. Sin embargo, una hoja se mueve agitadamente de un lado al otro. Después de esperar un poco, la persona ve que la hoja deja de moverse y luego otra hoja se mueve más que todas las otras. Explique qué podría causar el movimiento grande de una hoja en particular.

21. Una pesa de péndulo es una esfera llena de agua. ¿Qué pasaría a la frecuencia de vibración de este péndulo si hubiera un agujero en la esfera que permitiera que el agua se fugara lentamente?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, difícil = solución guiada con sugerencias disponibles en http://www.pse6.com

= use computadora para resolver el problema = problemas numéricos y simbólicos por pares

Nota: Desprecie la masa de todo resorte, excepto en los problemas 66 y 68.

Sección 15.1 Movimiento de un cuerpo unido a un resorte

Los problemas 15, 16, 19, 23, 56 y 62 del capítulo 7 también se pueden asignar con esta sección.

1. Una pelota lanzada desde una altura de 4.00 m hace una colisión perfectamente elástica con el suelo. Si se supone que no se pierde energía mecánica debido a la resistencia del aire, (a) demuestre que el movimiento resultante es periódico y (b) determine el periodo del movimiento. (c) ¿Es armónico simple este movimiento? Explique.

Sección 15.2 Representación matemática del movimiento armónico simple

2. En un motor, un émbolo oscila con movimiento armónico simple de modo que su posición varía según la expresión

$$x = (5.00\text{ cm})\cos(2t + \pi/6)$$

donde x es en centímetros y t es en segundos. En $t = 0$, encuentre (a) la posición del émbolo, (b) su velocidad y (c) su aceleración. (d) Encuentre el periodo y amplitud del movimiento.

3. La posición de una partícula está dada por la expresión $x = (4.00\text{ m})\cos(3.00\pi t + \pi)$, donde x es en metros y t es en segundos. Determine (a) la frecuencia y periodo del movimiento, (b) la amplitud del movimiento, (c) la constante de fase y (d) la posición de la partícula en $t = 0.250$ s.

Materiał chroniony prawem autorskim

4. (a) Un resorte colgante se estira 35.0 cm cuando un objeto de 450 g de masa se cuelga de él en reposo. En esta situación, definimos su posición como $x = 0$. El objeto se jala hacia abajo otros 18.0 cm y se suelta desde el reposo para oscilar sin fricción. ¿Cuál es la posición x en un tiempo 84.4 s después? (b) **¿Qué pasaría si?** Un resorte colgante se estira 35.5 cm cuando un objeto de 440 g de masa se cuelga de él en reposo. Definimos esta nueva posición como $x = 0$. Este objeto también se jala hacia abajo otros 18.0 cm y se suelta desde el reposo para oscilar sin fricción. Encuentre su posición 84.4 s después. (c) ¿Por qué las respuestas a (a) y (b) son diferentes por un porcentaje tan grande cuando los datos son tan semejantes? Esta circunstancia, ¿deja ver una dificultad fundamental para calcular el futuro? (d) Encuentre la distancia recorrida por el objeto en vibración en la parte (a). (e) Encuentre la distancia recorrida por el objeto en la parte (b).

5. Una partícula que se mueve a lo largo del eje x en movimiento armónico simple inicia desde su posición de equilibrio, el origen, en $t = 0$ y se mueve a la derecha. La amplitud de su movimiento es 2.00 cm, y la frecuencia es 1.50 Hz. (a) Demuestre que la posición de la partícula está dada por

$$x = (2.00\text{ cm})\operatorname{sen}(3.00\pi t)$$

Determine (b) la máxima rapidez y el primer tiempo ($t > 0$) en el que la partícula tiene esta rapidez, (c) la máxima aceleración y el primer tiempo ($t > 0$) en el que la partícula tiene esta aceleración y (d) la distancia total recorrida entre $t = 0$ y $t = 1.00$ s.

6. La posición, velocidad y aceleración iniciales de un cuerpo que se mueve en movimiento armónico simple son x_i, v_i y a_i, la frecuencia angular de oscilación es ω. (a) Demuestre que la posición y velocidad del objeto para todo tiempo se puede escribir como

$$x(t) = x_i \cos \omega t + \left(\frac{v_i}{\omega}\right) \operatorname{sen} \omega t$$

$$v(t) = -x_i\omega \operatorname{sen} \omega t + v_i \cos \omega t$$

(b) Si la amplitud del movimiento es A, demuestre que

$$v^2 - ax = v_i^2 - a_i x_i = \omega^2 A^2$$

7. Un oscilador armónico simple tarda 12.0 s para experimentar cinco vibraciones completas. Hállese (a) el periodo de su movimiento, (b) la frecuencia en hertz y (c) la frecuencia angular en radianes por segundo.

8. Un detector de vibraciones, empleado para probar una lavadora de ropa, está formado por un cubo de aluminio de 1.50 cm por lado montado en un extremo de una tira de un resorte de acero (como una hoja de serrucho) que se encuentra en un plano vertical. La masa de la tira es pequeña en comparación con la del cubo, pero la longitud de la tira es grande en comparación con el tamaño del cubo. El otro extremo de la tira está sujeto al bastidor de la máquina lavadora, que no está operando. Se requiere una fuerza horizontal de 1.43 N aplicada al cubo para mantenerla 2.75 cm alejada de su posición de equilibrio. Si se suelta el cubo, ¿cuál es su frecuencia de oscilación?

9. Un objeto de 7.00 kg cuelga del extremo inferior de un resorte vertical sujeto a una viga elevada. El objeto se pone en oscilaciones verticales que tienen un periodo de 2.60 s. Encuentre la constante de fuerza del resorte.

10. Un émbolo de un motor de gasolina está en movimiento armónico simple. Si los extremos de su posición con respecto a su punto central son ± 5.00 cm, encuentre la máxima velocidad y aceleración del émbolo cuando el motor está funcionando a razón de 3 600 rpm.

11. Un objeto de 0.500 kg unido a un resorte de constante de fuerza de 8.00 N/m vibra en movimiento armónico simple con una amplitud de 10.0 cm. Calcule (a) el máximo valor de su rapidez y aceleración, (b) la rapidez y aceleración cuando el objeto esté 6.00 cm de la posición de equilibrio y (c) el intervalo necesario para que el objeto se mueva de $x = 0$ a $x = 8.00$ cm.

12. Un deslizador de 1.00 kg unido a un resorte de constante de fuerza 25.0 N/m oscila sobre una vía horizontal de aire sin fricción. En $t = 0$, el deslizador se suelta desde el reposo en $x = -3.00$ cm. (Esto es, el resorte se comprime 3.00 cm.) Encuentre (a) el periodo de su movimiento, (b) los valores máximos de su rapidez y aceleración y (c) la posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo.

13. Un cuerpo de 1.00 kg está unido a un resorte horizontal. El resorte está inicialmente estirado 0.100 m, y el cuerpo se suelta desde el reposo ahí. Continúa moviéndose sin fricción. El siguiente tiempo en que la rapidez del cuerpo es cero, es 0.500 s después. ¿Cuál es la máxima rapidez del cuerpo?

14. Una partícula que cuelga de un resorte oscila con una frecuencia angular ω. El resorte está suspendido del techo de un carro de elevador y cuelga sin movimiento (con respecto al carro del elevador) cuando el carro desciende a una rapidez constante v. Entonces el carro se detiene de pronto. (a) ¿Con qué amplitud oscila la partícula? (b) ¿Cuál es la ecuación de movimiento para la partícula? (Seleccione la dirección hacia arriba como la positiva.)

Sección 15.3 Energía del oscilador armónico simple

15. Un bloque de masa desconocida está unido a un resorte de constante de resorte de 6.50 N/m y experimenta un movimiento armónico simple con una amplitud de 10.0 cm. Cuando el bloque está a la mitad entre su posición de equilibrio y el punto extremo, su rapidez medida es 30.0 cm/s. Calcule (a) la masa del bloque, (b) el periodo del movimiento y (c) la aceleración máxima del bloque.

16. Un bloque de 200 g está unido a un resorte horizontal y ejecuta movimiento armónico simple con un periodo de 0.250 s. Si la energía total del sistema es 2.00 J, encuentre (a) la constante de fuerza del resorte y (b) la amplitud del movimiento.

17. Un automóvil que tiene una masa de 1 000 kg se estrella en un muro de ladrillo en una prueba de seguridad. La defensa se comporta como un resorte de constante de fuerza 5.00×10^6 N/m y se comprime 3.16 cm cuando el auto llega al reposo. ¿Cuál era la rapidez del auto antes del impacto, suponiendo que no se pierde energía mecánica durante el impacto con el muro?

18. Un sistema bloque-resorte oscila con una amplitud de 3.50 cm. Si la constante de resorte es 250 N/m y la masa del bloque es 0.500 kg, determine (a) la energía mecánica del sistema, (b) la rapidez máxima del bloque, y (c) la máxima aceleración.

19. Un cuerpo de 50.0 g conectado a un resorte de constante de fuerza 35.0 N/m oscila sobre una superficie horizontal sin fricción, con una amplitud de 4.00 cm. Hállese (a) la energía total del sistema y (b) la rapidez del cuerpo cuando la posición es 1.00 cm.

Materiał chroniony prawem autorskim

Encuentre (c) la energía cinética y (d) la energía potencial cuando la posición es 3.00 cm.

20. Un objeto de 2.00 kg se une a un resorte y se coloca sobre una superficie lisa horizontal. Se necesita una fuerza horizontal de 20.0 N para mantener el objeto en reposo cuando es jalado 0.200 m desde su posición de equilibrio (el origen del eje x). El objeto se suelta ahora desde el reposo con una posición inicial de $x_i = 0.200$ m, y subsecuentemente experimenta oscilaciones armónicas simples. Encuentre (a) la constante de fuerza del resorte, (b) la frecuencia de las oscilaciones, y (c) la máxima rapidez del objeto. ¿Dónde ocurre esta máxima rapidez? (d) Encuentre la máxima aceleración del objeto. ¿Dónde ocurre? (e) Encuentre la energía total del sistema oscilatorio. Encuentre (f) la rapidez y (g) la aceleración del objeto cuando su posición sea igual a un tercio del valor máximo.

21. La amplitud de un sistema que se mueve en movimiento armónico simple se duplica. Determine el cambio en (a) la energía total, (b) la máxima rapidez, (c) la máxima aceleración, y (d) el periodo.

22. Una saltadora de cinta elástica (bungee), de 65.0 kg, salta de un puente con una cinta elástica bungee atada a ella y al puente (figura P15.22). La sección no estirada de la cinta es de 11.0 m. Ella llega al fondo de su movimiento a 36.0 m abajo del puente antes de regresar. Su movimiento se puede descomponer en una caída libre de 11.0 m y una sección de 25.0 m de oscilación armónica simple. (a) ¿Durante qué intervalo está ella en caída libre? (b) Use el principio de conservación de la energía para hallar la constante de resorte de la cinta elástica (bungee). (c) ¿Cuál es la ubicación del punto de equilibrio donde la fuerza elástica equilibra la fuerza gravitacional de la saltadora? Nótese que este punto se toma como el origen en nuestra descripción matemática de oscilación armónica simple. (d) ¿Cuál es la frecuencia angular de la oscilación? (e) ¿Qué intervalo se requiere para que la cinta se estire 25.0 m? (f) ¿Cuál es el intervalo total para toda la caída de 36.0 m?

Figura P15.22 Problemas 22 y 58.

23. Una partícula ejecuta un movimiento armónico simple con una amplitud de 3.00 cm. ¿En qué posición es igual su rapidez a la mitad de su rapidez máxima?

24. Un carrito de juguete unido a un resorte de constante 3.24 N/m vibra con una posición dada por $x = (5.00\text{ cm})\ \cos(3.60t\text{ rad/s})$. (a) Durante el primer ciclo, para $0 < t < 1.75$ s, ¿exactamente cuándo está cambiando la energía potencial del sistema con más rapidez en energía cinética? (b) ¿Cuál es el máximo ritmo de transformación de energía?

Sección 15.4 Comparación del movimiento armónico simple con el movimiento circular uniforme

25. Cuando viaja detrás de un auto que corre a 3.00 m/s, una persona observa que uno de los neumáticos del auto tiene una protuberancia semiesférica en su borde, como se ve en la figura P15.25. (a) Explique por qué la protuberancia, desde su punto de vista detrás del auto, ejecuta movimiento armónico simple. (b) Si los radios de los neumáticos del auto son de 0.300 m, ¿cuál es el periodo de oscilación de la protuberancia?

Figura P15.25

26. Considere el motor simplificado de un émbolo de la figura P15.26. Si la rueda gira con rapidez angular constante, explique por qué la biela oscila en movimiento armónico simple.

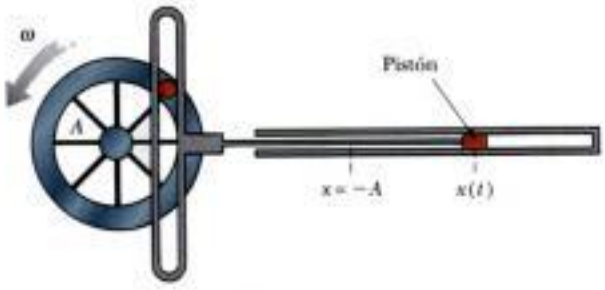


Figura P15.26

Sección 15.5 El péndulo

El problema 60 del capítulo 1 también se puede asignar con esta sección.

Materiał chroniony prawem autorskim

27. Un hombre entra a una torre elevada, ya que necesita conocer su altura. Él observa que un péndulo largo se extiende desde el techo casi hasta al piso y que su periodo es 12.0 s. (a) ¿Cuál es la altura de la torre? (b) **¿Qué pasaría si?** Si este péndulo se lleva a la Luna, donde la aceleración en caída libre es de 1.67 m/s^2, ¿cuál es ahí el periodo?

28. Un "péndulo de segundos" es el que pasa por su posición de equilibrio una vez cada segundo. (El periodo del péndulo es precisamente 2 s.) La longitud de un péndulo de segundos es 0.992 7 m en Tokio, Japón y 0.994 2 m en Cambridge, Inglaterra. ¿Cuál es la razón entre las aceleraciones en caída libre en estos dos lugares?

29. Un bastidor rígido de acero sobre un crucero de calle sostiene semáforos estándar, cada uno de los cuales está unido con bisagra para colgar inmediatamente abajo del bastidor. Una corriente de viento hace que un semáforo oscile en un plano vertical. Encuentre el orden de magnitud de su periodo. Exprese las cantidades que tome como datos y sus valores.

30. La posición angular de un péndulo está representada por la ecuación $\theta = (0.320 \text{ rad})\cos \omega t$, donde θ es en radianes y $\omega = 4.43$ rad/s. Determine el periodo y longitud del péndulo.

31. Un péndulo simple tiene una masa de 0.250 kg y una longitud de 1.00 m. Es desplazado un ángulo de 15.0° y luego se suelta. ¿Cuáles son (a) la máxima rapidez (b) la máxima aceleración angular y (c) la máxima fuerza restauradora? **¿Qué pasaría si?** Resuelva este problema con el uso del modelo de movimiento armónico simple para el movimiento del péndulo, y luego resuélvalo en forma más precisa usando principios más generales.

32. **Problema de repaso.** Un péndulo simple mide 5.00 m de largo. (a) ¿Cuál es el periodo para pequeñas oscilaciones para este péndulo si está situado en un elevador que acelera hacia arriba a 5.00 m/s^2? (b) ¿Cuál es su periodo si el elevador está acelerando hacia abajo a 5.00 m/s^2? (c) ¿Cuál es el periodo de este péndulo si se coloca en un camión que está acelerando horizontalmente a 5.00 m/s^2?

33. Una partícula de masa m de desliza sin fricción dentro de un tazón semiesférico de radio R. Demuestre que, si inicia desde el reposo con un pequeño desplazamiento desde el equilibrio, la partícula se mueve en movimiento armónico simple con una frecuencia igual a la de un péndulo simple de longitud R. Esto es, $\omega = \sqrt{g/R}$.

34. Un pequeño objeto se une al extremo de un resorte para formar un péndulo simple. El periodo de su movimiento armónico se mide para pequeños desplazamientos angulares y tres longitudes, cada tiempo marcando el movimiento con un cronómetro para 50 oscilaciones. Para longitudes de 1.000 m, 0.750 m y 0.500 m, los tiempos totales de 99.8 s, 86.6 s y 71.1 s se midieron para 50 oscilaciones. (a) Determine el periodo del movimiento para cada longitud. (b) Determine el valor medio de g obtenido a partir de estas tres mediciones independientes, y compárelo con el valor aceptado. (c) Grafique T^2 contra L, y obtenga un valor para g a partir de la pendiente de su gráfica recta de mejor ajuste. Compare este valor con el obtenido en la parte (b).

35. Un péndulo físico en la forma de un cuerpo plano se mueve en movimiento armónico simple con una frecuencia de 0.450 Hz. Si el péndulo tiene una masa de 2.20 kg y el pivote está situado a 0.350 m del centro de masa, determine el momento de inercia para el péndulo alrededor del punto pivote.

36. Una varilla rígida muy ligera, con longitud de 0.500 m, se extiende recta de un extremo de una regla graduada. La regla está suspendida de un pivote en el extremo lejano de la varilla y se pone en oscilación. (a) Determine el periodo de oscilación. *Sugerencia:* Use el teorema de ejes paralelos de la sección 10.5. (b) ¿En qué porcentaje difiere el periodo con respecto del periodo de un péndulo simple de 1.00 m de largo?

37. Considere el péndulo físico de la figura 15.18. (a) Si su momento de inercia alrededor de un eje que pasa por su centro de masa y paralelo al eje que pasa por su punto de pivote es I_{CM}, demuestre que su periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM} + md^2}{mgd}}$$

donde d es la distancia entre el punto de pivote y el centro de masa. (b) Demuestre que el periodo tiene un valor mínimo cuando d satisface la igualdad $md^2 = I_{CM}$.

38. Un péndulo de torsión se forma al tomar una regla graduada de masa 2.00 kg, y unir un alambre a su centro. Con su extremo superior sujeto, el alambre vertical sostiene la regla cuando ésta gira en un plano horizontal. Si el periodo resultante es de 3.00 minutos, ¿cuál es la constante de torsión para el alambre?

39. La rueda de balance de un reloj (figura P15.39) tiene un periodo de oscilación de 0.250 s. La rueda está construido de modo que su masa de 20.0 g está concentrada alrededor de un anillo de 0.500 cm. ¿Cuáles son (a) el momento de inercia del anillo y (b) la constante de torsión del resorte unido?

George Semple

Figura P15.39

Materiał chroniony prawem autorskim

Sección 15.6 Oscilaciones amortiguadas

40. Demuestre que la rapidez de cambio de la energía mecánica para un oscilador amortiguado no excitado está dada por $dE/dt = -bv^2$ y por lo tanto es siempre negativa. Proceda como sigue: Derive la expresión para la energía mecánica de un oscilador, $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$, y use la ecuación 15.31.

41. Un péndulo con longitud de 1.00 m se suelta desde un ángulo inicial de 15.0°. Después de 1 000 s, su amplitud ha sido reducida por fricción a 5.50°. ¿Cuál es el valor de $b/2m$?

42. Demuestre que la ecuación 15.32 es una solución de la ecuación 15.31 siempre que $b^2 < 4mk$.

43. Un objeto de 10.6 kg oscila en el extremo de un resorte vertical que tiene una constante de resorte de 2.05×10^4 N/m. El efecto de resistencia del aire está representado por el coeficiente de amortiguamiento $b = 3.00$ N · s/m. (a) Calcule la frecuencia de la oscilación amortiguada. (b) ¿En qué porcentaje disminuye la amplitud de la oscilación en cada ciclo? (c) Encuentre el intervalo que transcurre mientras la energía del sistema cae a 5.00% de su valor inicial.

Sección 15.7 Oscilaciones forzadas

44. Con el frente de su pijama humedecido por su chupón, una bebita se divierte durante el día balbuceando y subiendo y bajando en su cuna. Su masa es de 12.5 kg y el colchón de la cuna se puede modelar como un resorte ligero con constante de fuerza 4.30 kN/m. (a) La bebé pronto aprende a subir y bajar con máxima amplitud y mínimo esfuerzo al doblar sus rodillas ¿a qué frecuencia? (b) Ella aprende a usar el colchón como trampolín, perdiendo contacto con él durante parte de cada ciclo, ¿cuándo su amplitud rebasa qué valor?

45. Un objeto de 2.00 kg unido a un resorte se mueve sin fricción y es impulsado por una fuerza externa dada por $F = (3.00\text{ N})\text{sen}(2\pi t)$. Si la constante de fuerza del resorte es 20.0 N/m, determine (a) el periodo y (b) la amplitud del movimiento.

46. Considerando un oscilador forzado no amortiguado ($b = 0$), demuestre que la ecuación 15.35 es una solución de la ecuación 15.34, con una amplitud dada por la ecuación 15.36.

47. Un peso de 40.0 N se cuelga de un resorte que tiene una constante de fuerza de 200 N/m. El sistema es no amortiguado y está sometido a una fuerza armónica de excitación de 10.0 Hz, resultando en una amplitud de movimiento forzado de 2.00 cm. Determine el valor máximo de la fuerza de excitación.

48. El amortiguamiento es insignificante para un cuerpo de 0.150 kg que cuelga de un resorte ligero de 6.30 N/m. Una fuerza senoidal con una amplitud de 1.70 N mueve al sistema. ¿A qué frecuencia es que la fuerza hará que el objeto vibre con una amplitud de 0.440 m?

49. El lector es un biólogo investigador. Lleva consigo un teléfono de emergencia a un buen restaurante y, con un botón, hace que vibre en lugar de emitir un pitido y lo pone en el saco de su traje. El brazo de su silla presiona la tela contra el cuerpo de usted en un lugar. Una tela de 8.21 cm cuelga libremente bajo ese lugar, con el teléfono en su parte más baja. Un trabajador necesita urgentemente instrucciones y lo llama desde su laboratorio. El movimiento del teléfono hace que la parte que cuelga de su saco se mueva hacia delante y atrás con una amplitud sorprendentemente grande. El mesero y otras personas cercanas lo notan de inmediato y quedan en silencio. La hija de usted empieza a hablar y dice, "Papá, mira, ¡tus cucarachas deben haberse salido otra vez! Encuentre la frecuencia a la que vibra su teléfono.

50. Cuatro personas, cada una con una masa de 72.4 kg, están en un auto con una masa de 1 130 kg. Se presenta un temblor de tierra. El conductor se las arregla para salir del camino y detenerse, porque las oscilaciones verticales de la superficie del suelo hacen que el auto suba y baje en sus resortes de la suspensión. Cuando la frecuencia del sacudimiento es 1.80 Hz, el auto exhibe una máxima amplitud de vibración. El temblor termina, y las cuatro personas salen del auto tan rápido como pueden. ¿Qué distancia es que la suspensión no dañada del auto levantó la carrocería cuando las personas salieron?

Problemas adicionales

51. Una pequeña pelota de masa M está unida al extremo de una varilla uniforme de igual masa M y longitud L que hace pivote en la parte superior (figura P15.51). (a) Determine las tensiones en la varilla en el punto de pivote y en el punto P cuando el sistema está estacionario. (b) Calcule el periodo de oscilación para pequeños desplazamientos desde el equilibrio, y determine este periodo para $L = 2.00$ m. (*Sugerencia:* Modele el objeto del extremo de la varilla como una partícula y use la ecuación 15.28.)

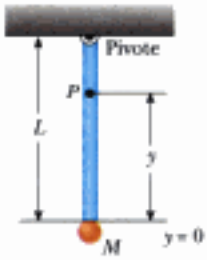


Figura P15.51

52. Un objeto de masa $m_1 = 9.00$ kg está en equilibrio cuando está conectado a un resorte ligero de constante $k = 100$ N/m que está sujeto a una pared, como se ve en la figura P15.52a. Un segundo objeto, $m_2 = 7.00$ kg, es empujado lentamente contra m_1, comprimiendo el resorte en una cantidad $A = 0.200$ m, (véase la figura P15.52b). El sistema se suelta entonces, y ambos objetos empiezan a moverse a la derecha sobre la superficie sin fricción. (a) Cuando m_1 llega al punto de equilibrio, m_2 pierde contacto con m_1 (véase la figura P15.5c) y se mueve a la derecha con rapidez v. Determine el valor de v. (b) ¿A qué distancia entre sí están los objetos cuando el resorte se estira por completo por primera vez (D en la figura P15.52d)? (*Sugerencia:* Primero determine el periodo de oscilación y la amplitud del sistema formado por m_1 y el resorte después que m_2 pierde contacto con m_1.)

Materiał chroniony prawem autorskim

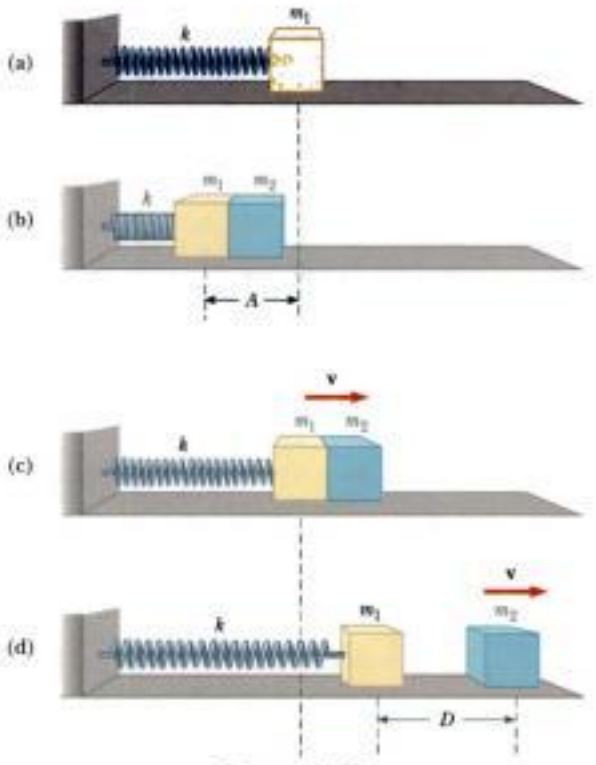


Figura P15.52

53. Un bloque grande P ejecuta un movimiento armónico simple horizontal cuando se desliza por una superficie sin fricción con una frecuencia $f = 1.50$ Hz. El bloque B descansa sobre el primero, como se ve en la figura P15.53, y el coeficiente de fricción estático entre los dos es $\mu_s = 0.600$. ¿Cuál es la máxima amplitud de oscilación que puede tener el sistema si el bloque B no debe resbalar?

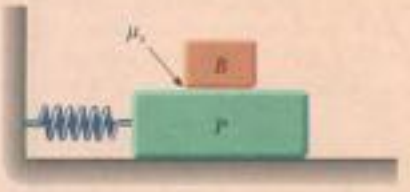


Figura P15.53 Problemas 53 y 54.

54. Un bloque grande P ejecuta un movimiento armónico simple horizontal cuando se desliza por una superficie sin fricción con una frecuencia f. El bloque B descansa sobre el primero, como se ve en la figura P15.53, y el coeficiente de fricción estático entre los dos es μ_s. ¿Cuál es la máxima amplitud de oscilación que puede tener el sistema si el bloque no debe resbalar?

55. La masa de la molécula de deuterio (D_2) es el doble de la molécula de hidrógeno (H_2). Si la frecuencia de vibración del H_2 es 1.30×10^{14} Hz, ¿cuál es la frecuencia de vibración del D_2? Suponga que la "constante de resorte" de fuerzas de atracción es igual para las dos moléculas.

56. Una esfera sólida (radio = R) rueda sin resbalar en un canal cilíndrico (radio = $5R$) como se ve en la figura P15.56. Demuestre que, para pequeños desplazamientos desde el equilibrio perpendicular a la longitud del canal, la esfera ejecuta un movimiento armónico simple con un periodo $T = 2\pi\sqrt{28R/5g}$.

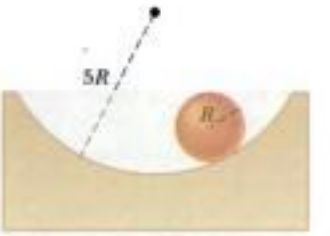


Figura P15.56

57. Un recipiente cúbico ligero de volumen a^3 se llena inicialmente con un líquido de densidad de masa ρ. El cubo está inicialmente sostenido por una cuerda ligera para formar un péndulo simple de longitud L_0, medida desde el centro de masa del recipiente lleno, donde $L_0 >> a$. Se permite que el líquido circule desde el fondo del recipiente a un ritmo constante (dM/dt). En cualquier tiempo t, el nivel del fluido del recipiente es h y la longitud del péndulo es L (medida con respecto al centro instantáneo de masa). (a) Trace el aparato y marque las dimensiones a, h, L_0 y L. (b) Encuentre la rapidez de cambio del periodo como función del tiempo t. (c) Encuentre el periodo como función del tiempo.

58. Después de una emocionante zambullida, los saltadores de cinta elástica (bungee) regresan libremente en la cinta durante muchos ciclos (figura P15.22). Después de los primeros ciclos, la cinta ya no se afloja. Un niño puede molestarse si calcula la masa de cada persona, usando una proporción que establecemos al resolver este problema: un objeto de masa m está oscilando libremente en un resorte vertical con un periodo T. Un objeto de masa desconocida m' en el mismo resorte oscila con un periodo T'. Determine (a) la constante de resorte y (b) la masa desconocida.

59. Un péndulo de longitud L y masa M tiene un resorte de constante de fuerza k conectado a él a una distancia h abajo de su punto de suspensión (figura P15.59). Encuentre la frecuencia de vibra-

Figura P15.59

Materiał chroniony prawem autorskim

ción del sistema para pequeños valores de la amplitud (θ pequeño). Suponga que la suspensión vertical de longitud L es rígida, pero no haga caso de su masa.

60. Una partícula con masa de 0.500 kg está unida a un resorte de constante de fuerza de 50.0 N/m. En el tiempo $t = 0$, la partícula tiene su máxima rapidez de 20.0 m/s y se mueve a la izquierda. (a) Determine la ecuación de movimiento de la partícula, especificando su posición como función del tiempo. (b) ¿En qué parte del movimiento es la energía potencial tres veces la energía cinética? (c) Encuentre la longitud de un péndulo simple con el mismo periodo. (d) Encuentre el mínimo intervalo necesario para que la partícula se mueva de $x = 0$ a $x = 1.00$ m.

61. Una tabla horizontal de masa m y longitud L hace pivote en un extremo. El otro extremo de la tabla está sostenido por un resorte de constante de fuerza k (figura P15.61). El momento de inercia de la tabla alrededor del pivote es $\frac{1}{3}mL^2$. La tabla se desplaza un pequeño ángulo θ desde su posición horizontal de equilibrio y se suelta. (a) Demuestre que se mueve con movimiento armónico simple con una frecuencia angular $\omega = \sqrt{3k/m}$. (b) Evalúe la frecuencia si la masa es 5.00 kg y el resorte tiene una constante de fuerza de 100 N/m.

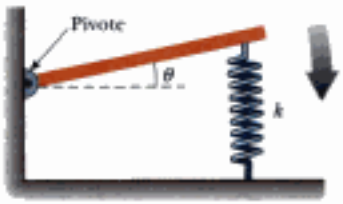


Figura P15.61

62. **Problema de repaso.** Una partícula de masa 4.00 kg está unida a un resorte de constante de fuerza 100 N/m. Está oscilando sobre una superficie horizontal sin fricción con una amplitud de 2.00 m. Un objeto de 6.00 kg se deja caer verticalmente en la parte superior del objeto de 4.00 kg cuando pasa por su punto de equilibrio. Los dos objetos se quedan pegados. (a) ¿Cuánto cambia la amplitud del sistema vibratorio como resultado de la colisión? (b) ¿Cuánto cambia el periodo? (c) ¿Cuánto cambia la energía? (d) Explique el cambio en energía.

63. Un péndulo simple con longitud de 2.23 m y masa de 6.74 kg recibe una rapidez inicial de 2.06 m/s en su posición de equilibrio. Suponga que experimenta un movimiento armónico simple, y determine su (a) periodo, (b) energía total y (c) máximo desplazamiento angular.

64. **Problema de repaso.** Un extremo de un resorte ligero con constante de fuerza de 100 N/m está unido a una pared vertical. Una cuerda ligera se une al otro extremo del resorte horizontal. La cuerda cambia de horizontal a vertical cuando pasa sobre una polea sólida de 4.00 cm de diámetro. La polea está libre de girar en un eje liso y fijo. La sección vertical de la cuerda sostiene un objeto de 200 g. La cuerda no resbala a su contacto con la polea. Encuentre la frecuencia de oscilación del objeto si la masa de la polea es (a) insignificante, (b) de 250 g y (c) de 750 g.

65. Las personas que se desplazan en motocicletas y bicicletas aprenden a tener cuidado de los baches en el pavimento, y especialmente de *superficies onduladas*, condición ésta en la que muchos bordes igualmente espaciados se forman en caminos. ¿Qué hay de malo en estas superficies onduladas? Una motocicleta tiene varios resortes y amortiguadores en su suspensión, pero podemos modelarla como un solo resorte que sostiene un bloque. Es posible estimar la constante de fuerza si pensamos en cuánto se comprime el resorte cuando un motociclista corpulento se pone en el asiento. Un motociclista que corre a velocidades de carretera debe tener especial cuidado de baches del tipo de superficies onduladas que están a cierta distancia unas de otras. ¿Cuál es el orden de magnitud de su distancia de separación? Exprese las cantidades que tome como datos y los valores que mida o estime para ellas.

66. Un bloque de masa M se conecta a un resorte de masa m y oscila en un movimiento armónico simple sobre una vía horizontal sin fricción (figura P15.66). La constante de fuerza del resorte es k y la longitud de equilibrio es ℓ. Suponga que todas las porciones del resorte oscilan en fase y que la velocidad de un segmento dx es proporcional a la distancia x desde el extremo fijo; esto es, $v_x = (x/\ell)v$. También, nótese que la masa de un segmento del resorte es $dm = (m/\ell)dx$. Encuentre (a) la energía cinética del sistema cuando el bloque tiene una rapidez v y (b) el periodo de oscilación.

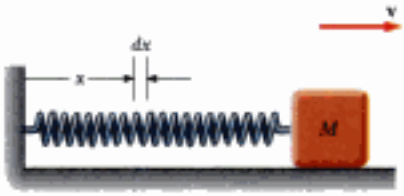


Figura P15.66

67. Una pelota de masa m está conectada a dos bandas de caucho de longitud L, cada una bajo tensión T, como se ve en la figura P15.67. La pelota se desplaza una pequeña distancia y perpendicular a la longitud de las bandas de caucho. Suponiendo que la tensión no cambia, demuestre que (a) la fuerza restauradora es $-(2T/L)y$ y (b) el sistema exhibe movimiento armónico simple con una frecuencia angular de $\omega = \sqrt{2T/mL}$.

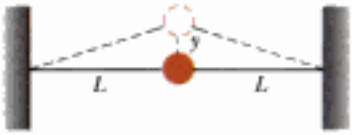


Figura P15.67

68. Cuando un bloque de masa M, conectado al extremo de un resorte de masa $m_s = 7.40$ g y constante de fuerza k, se pone en movimiento armónico simple, el periodo de su movimiento es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + (m_s/3)}{k}}$$

Se lleva a cabo un experimento en dos partes con el uso de bloques de varias masas suspendidos verticalmente desde el resorte,

Materiał chroniony prawem autorskim

$\theta_{máx} = 100°$. En cada caso encuentre la posición θ como una función del tiempo. Usando los mismos valores de $\theta_{máx}$, compare sus resultados para θ con los obtenidos de $\theta(t) = \theta_{máx} \cos \omega t$. ¿Cómo se compara el periodo para el valor grande de $\theta_{máx}$ con el del valor pequeño de $\theta_{máx}$? *Nota:* Con el uso del método de Euler para resolver esta ecuación diferencial, es posible hallar que la amplitud tiende a aumentar con el tiempo. El método de cuarto orden de Runge-Kutta sería una mejor opción para resolver la ecuación diferencial. No obstante, si se escoge Δt suficientemente pequeño, la solución con el uso del método de Euler todavía puede ser buena.

74. Su dedo pulgar rechina en un plato que acaba de lavar. Sus zapatos deportivos (tenis) a veces rechinan en el piso del gimnasio. Los neumáticos de automóvil rechinan en un arranque o frenazo rápidos. Se puede hacer que una copa "cante" si se pasa un dedo húmedo alrededor del borde. Cuando se hace deslizar sobre una mesa, una taza de espuma de estireno puede no hacer mucho ruido, pero hace que la superficie de un poco de agua dentro de ella baile en una complicada vibración de resonancia. Cuando la tiza rechina en una pizarra, se puede ver que hace una hilera de renglones espaciados regularmente. Como sugieren todos estos ejemplos, suele haber vibración cuando actúa fricción sobre un cuerpo elástico en movimiento. La oscilación no es un movimiento armónico simple, pero se llama *pega y resbala*. Este problema modela un movimiento de pega y resbala.

Un bloque de masa m está unido a un soporte fijo por un resorte horizontal de constante de fuerza k y masa despreciable (figura P15.74). La ley de Hooke describe el resorte en extensión y en compresión. El bloque se apoya sobre una larga tabla horizontal, con la que tiene coeficiente de fricción estático μ_s y un coeficiente más pequeño de fricción cinética μ_k. La tabla se mueve a la derecha a una rapidez v constante. Suponga que el bloque pasa casi todo su tiempo pegado a la tabla y moviéndose a la derecha, de modo que la rapidez v es pequeña en comparación con el promedio de rapidez que el bloque tiene cuando regresa a la izquierda. (a) Demuestre que la máxima extensión del resorte desde su posición no estirada está dada muy cercanamente por $\mu_s mg/k$. (b) Demuestre que el bloque oscila alrededor de una posición de equilibrio a la que el resorte se estira $\mu_k mg/k$. (c) Haga una gráfica de la posición del bloque contra el tiempo. (d) Demuestre que la amplitud del movimiento del bloque es

$$A = \frac{(\mu_s - \mu_k)mg}{k}$$

(e) Demuestre que el periodo del movimiento del bloque es

$$T = \frac{2(\mu_s - \mu_k)mg}{vk} + \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(f) Evalúe la frecuencia del movimiento si $\mu_s = 0.400$, $\mu_k = 0.250$, $m = 0.300$ kg, $k = 12.0$ N/m y $v = 2.40$cm/s. (g) **¿Qué pasaría si?** ¿Qué pasa a la frecuencia si aumenta la masa? (h) ¿Si aumenta la constante de resorte? (i) ¿Si aumenta la rapidez de la tabla? (j) ¿Si aumenta el coeficiente de fricción estático con respecto al coeficiente de fricción cinética? Nótese que es el exceso de fricción estática sobre la cinética que es importante para la vibración. "La rueda que rechina se engrasa" porque incluso un fluido viscoso no puede ejercer una fuerza de fricción estática.

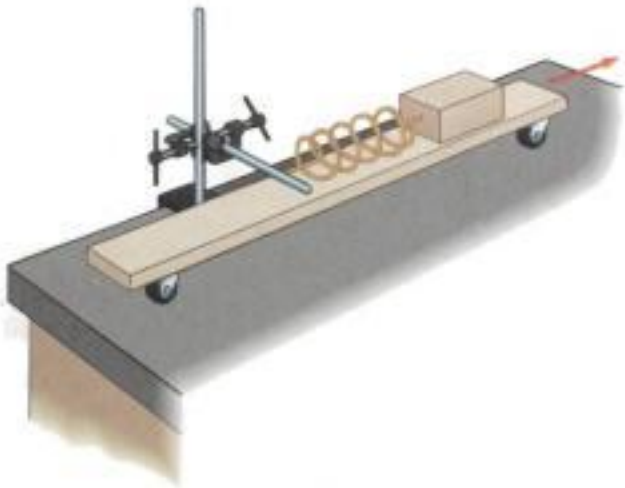


Figura P15.74

75. Problema de repaso. Imagine que un agujero se taladra en el centro de la Tierra hasta el otro lado. Un objeto de masa m a una distancia r del centro de la Tierra es jalado hacia el centro de la Tierra sólo por la masa dentro de la esfera de radio r (la región rojiza en la figura P15.75). (a) Escriba la Ley de Newton de gravitación para un cuerpo situado a una distancia r del centro de la Tierra, y demuestre que la fuerza sobre él es de la forma de la Ley de Hooke, $F = -kr$, donde la constante de fuerza efectiva es $k = (4/3)\pi\rho Gm$. Aquí ρ es la densidad de la Tierra, que se supone uniforme, y G es la constante gravitacional. (b) Demuestre que una bolsa de correo que se deje caer en el agujero ejecutará un movimiento armónico simple si se mueve sin fricción. ¿Cuándo llegará al otro lado de la Tierra?

Figura P15.75

Respuestas a las *preguntas rápidas*

15.1 (d). Desde su máxima posición positiva a la posición de equilibrio, el bloque recorre una distancia A. A continuación recorre igual distancia frente a la posición de equilibrio a su máxima posición negativa. Luego repite estos dos movimientos en la dirección inversa para regresar a su posición original y completar un ciclo.

15.2 (f). El cuerpo está en la región $x < 0$, de modo que la posición es negativa. Como el objeto se mueve de regreso hacia el origen en esta región, la velocidad es positiva.

Materiał chroniony prawem autorskim

15.3 (a) La amplitud es mayor porque la curva para el cuerpo B muestra que el desplazamiento desde el origen (el eje vertical en la gráfica) es mayor. La frecuencia es mayor para el cuerpo B porque hay más oscilaciones por intervalo unitario.

15.4 (a) La velocidad es positiva, como en la Pregunta rápida 15.2. Como el resorte está jalando el cuerpo hacia el equilibrio desde la región x negativa, la aceleración también es positiva.

15.5 (b) Según la ecuación 15.13, el periodo es proporcional a la raíz cuadrada de la masa.

15.6 (c) La amplitud del movimiento armónico simple es igual que el radio del movimiento circular. La posición inicial del cuerpo en su movimiento circular es π radianes desde el eje x positivo.

15.7 (a) Con una longitud mayor, el periodo del péndulo aumentará. Por lo tanto, tomará más tiempo ejecutar cada oscilación, de modo que cada segundo de acuerdo con el reloj tomará más de un segundo real, es decir, el reloj *se atrasa*.

15.8 (a) En lo alto de la montaña, el valor de g es menor que al nivel del mar. En consecuencia, el periodo del péndulo aumentará y el reloj se atrasará.

15.9 (a) Si su meta es sólo detener el rebote de un choque absorbido tan rápido como sea posible, la suspensión debe ser críticamente amortiguada. Desafortunadamente, la rigidez de este diseño hace incómodo un viaje. Si se diseña una suspensión subamortiguada, el viaje es más cómodo pero el auto brinca. Si se construye una suspensión sobreamortiguada, la rueda se desplaza desde su posición de equilibrio más tiempo del que debe. (Por ejemplo, después de golpear un bache, el resorte se queda comprimido durante un corto tiempo y la rueda no regresa rápidamente a hacer contacto con el pavimento después de pasar por el bache, lo cual es una situación peligrosa.) Debido a todas estas consideraciones, los ingenieros de automotores suelen diseñar suspensiones ligeramente subamortiguadas. Esto permite que la suspensión absorba con rapidez un choque (reduciendo así lo incómodo del viaje) y luego regrese al equilibrio después de sólo una o dos oscilaciones perceptibles.

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 16

Movimiento de ondas

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

16.1 Propagación de una perturbación

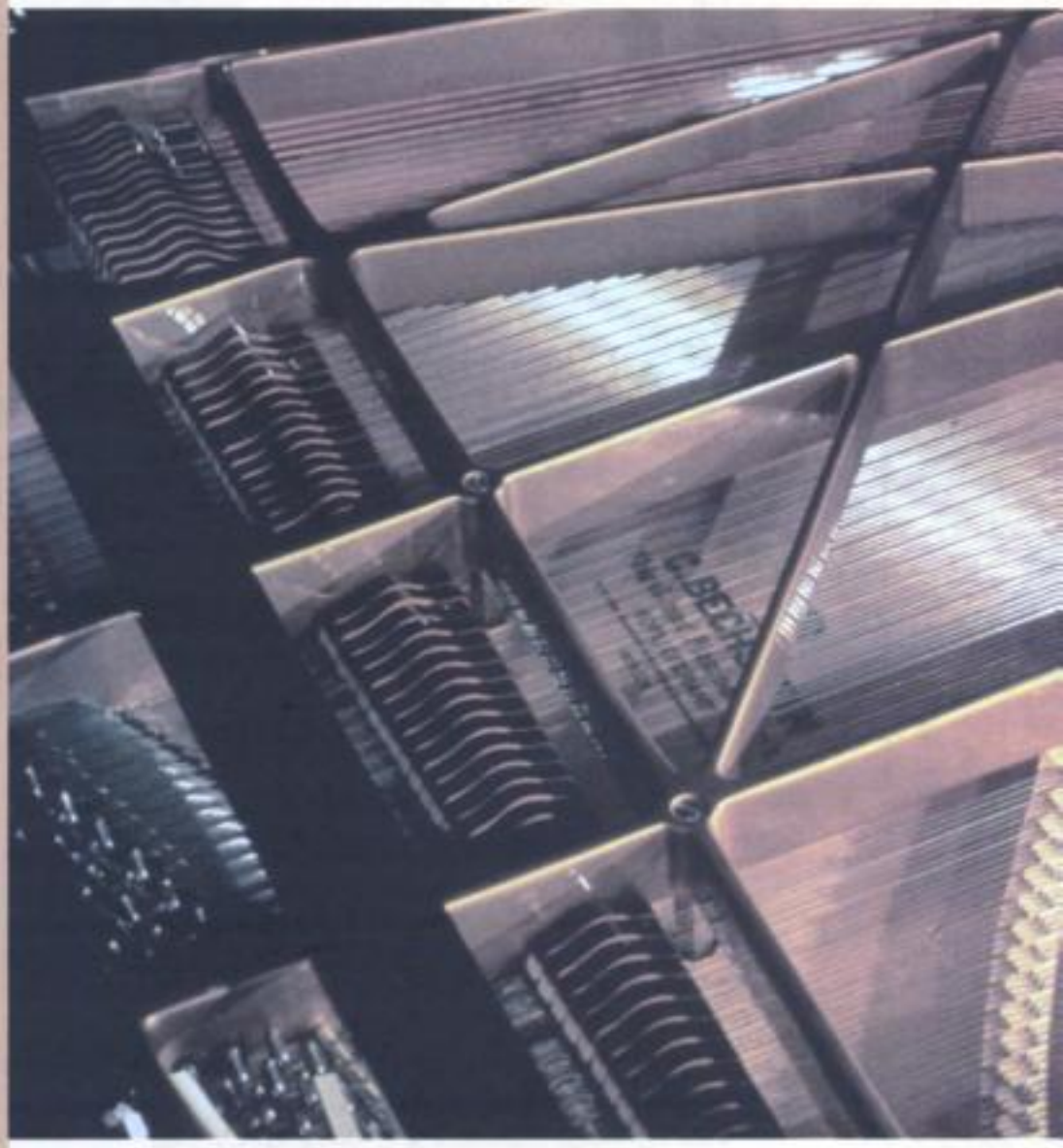
16.2 Ondas senoidales

16.3 Rapidez de ondas en cuerdas

16.4 Reflexión y transmisión

16.5 Rapidez de transferencia de energía por ondas senoidales en cuerdas

16.6 La ecuación lineal de onda



▲ *El espléndido sonido de un piano se debe a ondas en cuerdas que están bajo tensión. Muchas de las cuerdas se pueden ver en esta fotografía; las ondas también viajan en la tabla de armonía que se ve bajo las cuerdas. En este capítulo estudiamos los principios fundamentales de fenómenos de ondas. (Kathy Ferguson Johnson/PhotoEdit/PictureQuest)*

Materiał chroniony prawem autorskim

La mayoría de nosotros observamos ondas en nuestra infancia, cuando dejábamos caer una piedra en una charca. En el punto donde la piedra tocaba la superficie del agua se formaban ondas, que se movían hacia fuera desde el punto de su creación y se expandían en círculos cada vez más grandes hasta que llegaban a la orilla. Si examináramos con cuidado el movimiento de una pelota de playa que flota en aguas en calma, veríamos que la pelota se mueve vertical y horizontalmente alrededor de su posición original, pero no experimenta ningún desplazamiento neto que la aleje o la lleve hacia el punto donde una piedra caiga en el agua. Los pequeños elementos de agua en contacto con la pelota de playa, así como todos los otros elementos del agua de la superficie de la charca, se comportan en la misma forma. Esto es, la *onda* de agua se mueve desde el punto de origen a la orilla, pero el agua no se va con ella.

El mundo está lleno de ondas, siendo los dos tipos principales el de ondas *mecánicas* y el de ondas *electromagnéticas*. En el primer caso, algún medio físico se perturba como en el ejemplo de la piedra, la pelota de playa y los elementos de agua. Las ondas electromagnéticas no requieren de un medio para propagarse; algunos ejemplos de ondas electromagnéticas son las señales de luz visible y las de radio, señales de televisión y rayos X. Aquí, en esta parte del libro, estudiamos sólo ondas mecánicas.

El concepto de onda es abstracto. Cuando observamos lo que llamamos onda de agua, lo que vemos es un reacomodo de la superficie del agua. Sin el agua, no habría onda. Una onda viajera en una cuerda no existiría sin la cuerda. Las ondas de sonido no podrían viajar de un punto a otro si no hubiera moléculas de aire entre los dos puntos. Con ondas mecánicas, lo que interpretamos como una onda corresponde a la propagación de una perturbación a través de un medio.

Si consideramos un poco más la pelota de playa que flota en el agua, nótese que hemos causado que la pelota se mueva en un punto del agua al dejar caer una piedra en otro lugar. La pelota ha ganado energía cinética por nuestra acción, de modo que debe haberse transferido energía del punto en el que dejamos caer la piedra a la posición de la pelota. Ésta es la característica central del movimiento de ondas, es decir, se transfiere *energía* a cierta distancia, pero no *materia*.

Todas las ondas llevan energía, pero la cantidad de energía transmitida a través de un medio y el mecanismo responsable para ese transporte de energía difiere de un caso al otro. Por ejemplo, la potencia de ondas oceánicas (olas) durante una tormenta, es mucho mayor que la de ondas de sonido generadas por una sola voz humana.

16.1 Propagación de una perturbación

En la introducción aludimos a la esencia del movimiento de una onda, es decir, la transferencia de energía a través del espacio sin la transferencia acompañante de materia. En la lista de mecanismos de transferencia de energía del capítulo 7, dos mecanismos dependen de ondas: la radiación de ondas mecánicas y electromagnéticas. Por contraste, en otro mecanismo, que es la transferencia de materia, la transferencia de energía está acompañada de un movimiento de materia a través del espacio.

Todas las ondas mecánicas requieren (1) alguna fuente de perturbación, (2) un medio que pueda ser perturbado, y (3) algún medio físico a través del cual elementos del medio puedan influir uno al otro. Una forma de demostrar el movimiento de on-

Materiał chroniony prawem autorskim

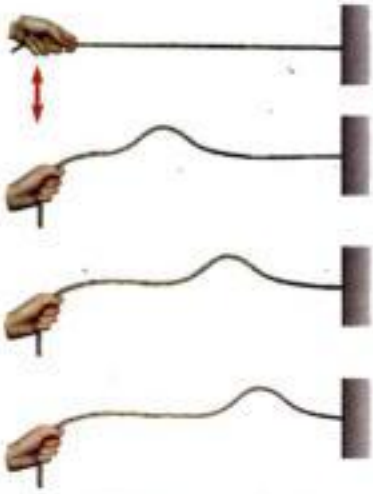


Figura 16.1 Pulso que se desplaza en una cuerda estirada. La forma del pulso es casi sin cambio cuando se mueve a lo largo de la cuerda.

das, es mover un extremo de una cuerda larga que se encuentre bajo tensión y tenga su extremo opuesto fijo, como se ve en la figura 16.1. En esta forma, una sola sacudida (llamada *pulso*) se forma y se desplaza a lo largo de la cuerda con una rapidez definida. La figura 16.1 representa cuatro "instantáneas" consecutivas de la creación y propagación del pulso viajero. La cuerda es el medio a través del cual viaja el pulso. El pulso tiene una altura definida y una rapidez definida de propagación a lo largo del medio (la cuerda). Como veremos un poco más adelante, las propiedades de este medio particular que determinan la rapidez de la perturbación son la tensión de la cuerda y su masa por longitud unitaria. La forma del pulso cambia muy poco cuando viaja a lo largo de la cuerda.[1]

Concentraremos primeramente nuestra atención en un pulso que se mueve a través de un medio. Una vez que hemos explorado el comportamiento de un pulso, llevaremos de nuevo nuestra atención a una *onda*, que es una perturbación *periódica* que se desplaza en un medio. Creamos un pulso en nuestra cuerda al mover una vez el extremo de la cuerda, como en la figura 16.1. Si fuéramos a mover repetidamente el extremo de la cuerda hacia arriba y abajo, crearíamos una onda viajera, que tiene características que no tiene un pulso. En la sección 16.2 vamos a explorar estas características.

Cuando el pulso de la figura 16.1 se desplaza, cada elemento perturbado de la cuerda se mueve en una dirección *perpendicular* a la dirección de propagación. La figura 16.2 ilustra este punto para un elemento en particular, marcado *P*. Nótese que ninguna parte de la cuerda se mueve en la dirección de la propagación.

Una onda viajera o pulso que hace que los elementos del medio perturbado se muevan perpendiculares a la dirección de propagación se llama **onda transversal.**

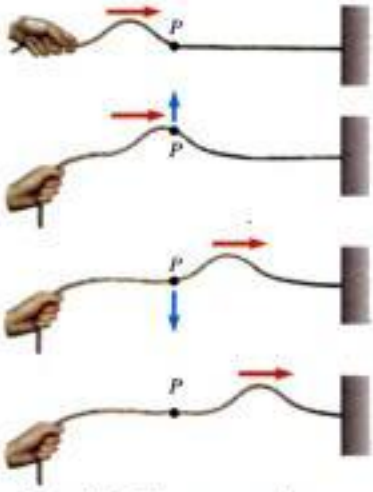


Figura 16.2 Pulso transversal que se desplaza en una cuerda estirada. La dirección de movimiento de cualquier elemento *P* de la cuerda (flechas azules) es perpendicular a la dirección de propagación (flechas rojas).

Compare esto con otro tipo de pulso, uno que se mueva por un resorte largo, no estirado, como se ve en la figura 16.3. El extremo izquierdo del resorte es empujado brevemente a la derecha y luego jalado brevemente a la izquierda. Este movimiento crea una repentina compresión en una región de las espiras. La región comprimida viaja a lo largo del resorte (a la derecha en la figura 16.3). La región comprimida es seguida por una región donde las espiras están extendidas. Nótese que la dirección del desplazamiento de las espiras es paralela a la dirección de propagación de la región comprimida.

Una onda viajera o pulso que hace que los elementos del medio se muevan paralelos a la dirección de propagación, se llama **onda longitudinal.**

Las ondas de sonido, que estudiaremos en el capítulo 17, son otro ejemplo de ondas longitudinales. La perturbación en una onda de sonido es una serie de regiones de alta presión y baja presión que viajan en el aire.

Algunas ondas en la naturaleza exhiben una combinación de desplazamientos transversales y longitudinales. Las ondas en la superficie del agua son un buen ejemplo. Cuando una onda en el agua se desplaza en la superficie de agua profunda, elementos del agua de la superficie se mueven en trayectorias casi circulares, como se ve en la figura 16.4. Nótese que la perturbación tiene componentes transversales y longitudinales. Los desplazamientos

Figura 16.3 Pulso longitudinal a lo largo de un resorte estirado. El desplazamiento de las espiras es paralelo a la dirección de la propagación.

[1] En realidad, el pulso cambia de forma y gradualmente se extiende durante el movimiento. Este efecto se denomina *dispersión* y es común a numerosas ondas mecánicas, así como a ondas electromagnéticas. No consideramos la dispersión en este capítulo.

Materiał chroniony prawem autorskim

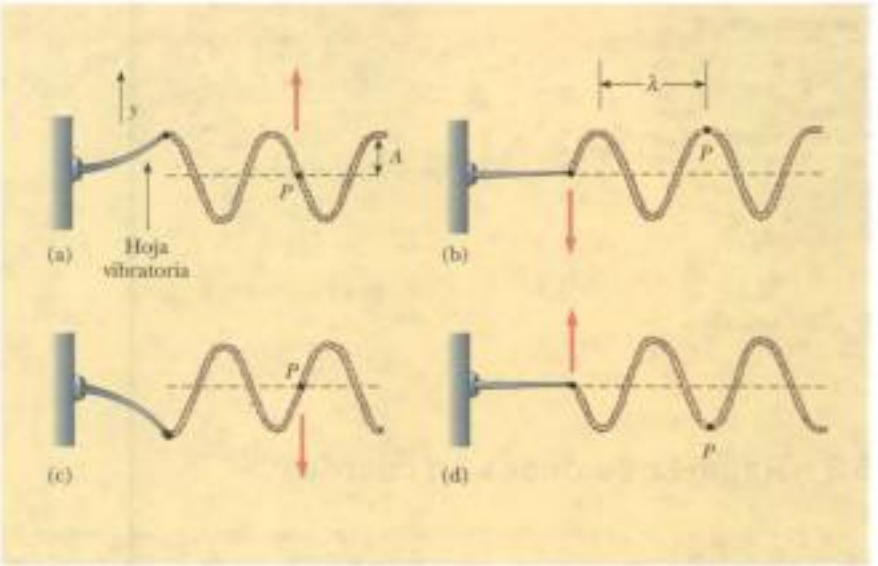


Figura activa 16.10 Método para producir una onda senoidal en una cuerda. El extremo izquierdo de la cuerda está conectado a una hoja que se hace entrar en vibración. Todo elemento de la cuerda, por ejemplo el del punto *P*, oscila con movimiento armónico simple en la dirección vertical.

En el vínculo* Active Figures *en* http://www.pse6.com, *usted podrá ajustar la frecuencia de la hoja.

Podemos usar este experimento para describir el movimiento de cualquier elemento de la cuerda. Un elemento en el punto *P* (o cualquier otro elemento de la cuerda) se mueve sólo verticalmente, por lo que su coordenada x permanece constante. Por lo tanto, la **rapidez transversal** v_y (no confundir con la rapidez v de la onda) y la **aceleración transversal** a_y de elementos de la cuerda son

$$v_y = \left.\frac{dy}{dt}\right]_{x\,=\,\text{constante}} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(kx - \omega t) \tag{16.14}$$

$$a_y = \left.\frac{dv_y}{dt}\right]_{x\,=\,\text{constante}} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A\,\text{sen}(kx - \omega t) \tag{16.15}$$

En estas expresiones, debemos usar derivadas parciales (véase la sección 8.5) porque y depende de x y de t. En la operación $\partial y/\partial t$, por ejemplo, tomamos una derivada con respecto a t mientras que conservamos x constante. Los máximos valores de la rapidez transversal y aceleración transversal, son simplemente los valores absolutos de los coeficientes de las funciones coseno y seno:

$$v_{y,\,\text{máx}} = \omega A \tag{16.16}$$

$$a_{y,\,\text{máx}} = \omega^2 A \tag{16.17}$$

La rapidez transversal y la aceleración transversal de elementos de la cuerda no alcanzan simultáneamente sus valores máximos. La rapidez transversal alcanza su valor máximo (ωA) cuando $y = 0$, mientras que la magnitud de la aceleración transversal alcanza su valor máximo ($\omega^2 A$) cuando $y \pm A$. Por último, las ecuaciones 16.16 y 16.17 son idénticas en forma matemática a las ecuaciones correspondientes para movimiento armónico simple, ecuaciones 15.17 y 15.18.

Pregunta rápida 16.6 La amplitud de una onda se duplica, sin hacer otros cambios a la onda. Como resultado de la duplicación, ¿cuál de los siguientes enunciados es correcto? (a) Cambia la rapidez de la onda. (b) Cambia la frecuencia de la onda. (c) Cambia la rapidez transversal máxima de un elemento del medio. (d) Todos estos son verdaderos. (e) Ninguno de estos es verdadero.

¡ADVERTENCIA!

16.2 Dos clases de rapidez/velocidad

No se confunda, v es la rapidez de la onda cuando se propaga a lo largo de la cuerda, y v_y es la velocidad transversal de un punto en la cuerda. La rapidez v es constante, mientras que v_y varía senoidalmente.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 16.3 Una cuerda movida senoidalmente

La cuerda que se muestra en la figura 16.10 es pulsada a una frecuencia de 5.00 Hz. La amplitud del movimiento es 12.0 cm, y la rapidez de la onda es 20.0 m/s. Determine la frecuencia angular ω y el número de onda k para esta onda, y escriba una expresión para la función de onda.

Solución Con el uso de las ecuaciones 16.3, 16.9 y 16.11, encontramos que

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi(5.00\text{ Hz}) = \mathbf{31.4\ rad/s}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{31.4\text{ rad/s}}{20.0\text{ m/s}} = \mathbf{1.57\ rad/m}$$

Como $A = 12.0$ cm $= 0.120$ m, tenemos

$$y = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$$

$$= \mathbf{(0.120\ m)\ sen(1.57}x - \mathbf{31.4}t\mathbf{)}$$

16.3 Rapidez de ondas en cuerdas

En esta sección nos concentramos en determinar la rapidez de un pulso transversal que viaja en una cuerda tensa. En primer término, pronostiquemos en forma conceptual los parámetros que determinan la rapidez. Si una cuerda bajo tensión es jalada a los lados y luego soltada, la tensión es la causa de acelerar un elemento particular de la cuerda de nuevo a su posición de equilibrio. De acuerdo con la segunda ley de Newton, la aceleración del elemento aumenta con una tensión creciente. Si el elemento regresa al equilibrio con más rapidez debido a esta mayor aceleración, intuitivamente diríamos que la rapidez de la onda es mayor. Por lo tanto, esperamos que aumente la rapidez de la onda con una tensión creciente.

Del mismo modo, la rapidez de la onda debe disminuir cuando aumenta la masa por unidad de longitud de la cuerda. Esto es porque es más difícil acelerar un elemento grande de la cuerda que uno ligero. Si la tensión de la cuerda es T y su masa por longitud unitaria es μ, entonces, como veremos, la rapidez de la onda es

Rapidez de una onda en una cuerda estirada

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{16.18}$$

Primero, verifiquemos que esta expresión sea dimensionalmente correcta. Las dimensiones de T son ML/T^2, y las dimensiones de μ son M/L. Por lo tanto, las dimensiones de T/μ son L^2/T^2; en consecuencia, las dimensiones de $\sqrt{T/\mu}$ son L/T, las dimensiones de rapidez. No hay otra combinación de T y μ que sea dimensionalmente correcta, y si suponemos que éstas son las únicas variables relevantes a la situación, la rapidez debe ser proporcional a $\sqrt{T/\mu}$.

¡ADVERTENCIA!

16.3 Las múltiples *T*

No confunda la T de la ecuación 16.18 para la tensión con el símbolo T de este capítulo para el periodo de una onda. El contexto de la ecuación debe ayudar a identificar de cuál se trata. Simplemente no hay suficientes letras en el alfabeto para asignar una letra única a cada variable.

Ahora usemos un análisis mecánico para deducir la ecuación 16.18. Considere un pulso que se mueve en una cuerda tensa a la derecha con una rapidez uniforme v medida con respecto a un marco de referencia estacionario. En lugar de permanecer en este marco de referencia, es más conveniente escoger como nuestro marco uno que se mueve con el pulso con la misma rapidez que el pulso, de modo que el pulso esté en reposo dentro del marco. Este cambio de marco de referencia se permite porque las leyes de Newton son válidas ya sea en un marco estacionario o en uno que se mueve con velocidad constante. En nuestro nuevo marco de referencia, todos los elementos de la cuerda se mueven a la izquierda, es decir, un elemento dado de la cuerda inicialmente a la derecha del pulso se mueve a la izquierda, sube y sigue la forma del pulso, y luego continúa su movimiento a la izquierda. La figura 16.11a muestra este elemento en el instante en que está situado en la parte superior del pulso.

El pequeño elemento de la cuerda de longitud Δs que se ilustra en la figura 16.11a, y que se amplifica en la figura 16.11b, forma un arco aproximado de un círculo de radio R. En nuestro marco de referencia móvil (que se mueve a la derecha a una rapidez v a lo largo del pulso), el elemento sombreado se mueve a la izquierda con una rapidez v. Este elemento tiene una aceleración centrípeta igual a v^2/R, que es proporcionada por componentes de la fuerza **T** cuya magnitud es la tensión en la cuerda. La fuerza **T** actúa sobre ambos lados del elemento y tangente al arco, como se muestra en la figura 16.11b. Los componentes horizontales de **T** se cancelan, y cada componente vertical T sen θ actúa radialmente hacia el centro del arco. Por lo tanto, la fuerza radial total sobre el elemento es $2T$ sen θ. Como el

Material chroniony prawem autorskim

Ejemplo 16.4 La rapidez de un pulso en una cuerda

Una cuerda uniforme tiene una masa de 0.300 kg y longitud de 6.00 m (figura 16.12). La cuerda pasa sobre una polea y sostiene un cuerpo de 2.00 kg. Halle la rapidez de un pulso que viaje a lo largo de esta cuerda.

Solución La tensión T de la cuerda es igual al peso del cuerpo de 2.00 kg suspendido:

$$T = mg = (2.00\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 19.6\ \text{N}$$

(Este cálculo de la tensión desprecia la pequeña masa de la cuerda. Estrictamente hablando, la cuerda nunca puede ser exactamente horizontal, y por lo tanto la tensión no es uniforme). La masa por unidad de longitud μ de la cuerda es

$$\mu = \frac{m}{\ell} = \frac{0.300\ \text{kg}}{6.00\ \text{m}} = 0.050\,0\ \text{kg/m}$$

Por lo tanto, la rapidez de la onda es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{19.6\ \text{N}}{0.050\,0\ \text{kg/m}}} = \mathbf{19.8\ m/s}$$

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si el bloque girara hacia delante y atrás entre ángulos máximos de ± 20° con respecto a la vertical? ¿Qué intervalo de rapidez de onda crearía esto sobre la cuerda horizontal?

Respuesta La figura 16.13 muestra en tres posiciones el bloque que oscila, su posición más alta, su posición más baja y una posición arbitraria. Sumando las fuerzas sobre el bloque en la dirección radial, cuando el bloque está en una posición arbitraria, la segunda ley de Newton da

$$(1) \qquad \sum F = T - mg\cos\theta = m\frac{v_{\text{bloque}}^2}{L}$$

donde la aceleración del bloque es centrípeta, L es la longitud de la pieza vertical de cuerda, y v_{bloque} es la rapidez instantánea del bloque en la posición arbitraria. Ahora considere la conservación de la energía mecánica para el sistema formado por el bloque y la Tierra. Definimos el cero de la energía potencial gravitacional para el sistema cuando el bloque está en su punto más bajo, punto Ⓒ en la figura 16.13. Al igualar la energía mecánica del sistema, cuando el bloque está en Ⓐ, con la energía mecánica cuando el bloque está en una posición arbitraria Ⓑ, tenemos,

Figura 16.12 (Ejemplo 16.4) La tensión T de la cuerda es mantenida por el cuerpo suspendido. La rapidez de cualquier onda que viaje a lo largo de la cuerda está dada por $v = \sqrt{T/\mu}$.

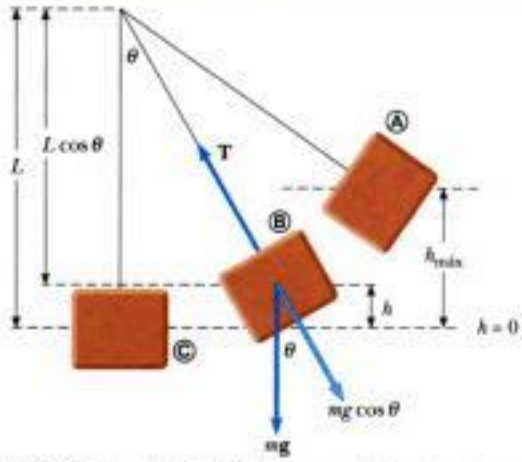


Figura 16.13 (Ejemplo 16.4) Si el bloque oscila hacia arriba y abajo, cambia la tensión en la cuerda, lo cual ocasiona una variación en la rapidez de la onda en la sección horizontal de la cuerda en la figura 16.12. Se ilustran las fuerzas sobre el bloque cuando se encuentra en la posición arbitraria Ⓑ. La posición Ⓐ es la posición más alta y Ⓒ es la más baja. (El ángulo máximo está aquí exagerado para mayor claridad)

$$E_A = E_B$$

$$mgh_{\text{máx}} = mgh + \tfrac{1}{2}mv_{\text{bloque}}^2$$

$$mv_{\text{bloque}}^2 = 2mg(h_{\text{máx}} - h)$$

Sustituyendo esto en la ecuación (1), encontramos una expresión para T como función del ángulo θ y altura h:

$$T - mg\cos\theta = \frac{2mg(h_{\text{máx}} - h)}{L}$$

$$T = mg\left[\cos\theta + \frac{2}{L}(h_{\text{máx}} - h)\right]$$

El valor máximo de T se presenta cuando $\theta = 0$ y $h = 0$:

$$T_{\text{máx}} = mg\left[\cos 0 + \frac{2}{L}(h_{\text{máx}} - 0)\right] = mg\left(1 + \frac{2h_{\text{máx}}}{L}\right)$$

El mínimo valor de T se presenta cuando $h = h_{\text{máx}}$ y $\theta = \theta_{\text{máx}}$:

$$T_{\text{mín}} = mg\left[\cos\theta_{\text{máx}} + \frac{2}{L}(h_{\text{máx}} - h_{\text{máx}})\right] = mg\cos\theta_{\text{máx}}$$

Ahora encontramos los valores máximo y mínimo de la rapidez v de la onda, usando el dato que, como vemos de la figura 16.13, h y θ están relacionados por $h = L - L\cos\theta$:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{T_{\text{máx}}}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg[1 + (2h_{\text{máx}}/L)]}{\mu}}$$

$$= \sqrt{\frac{mg[1 + [2(L - L\cos\theta_{\text{máx}})/L]]}{\mu}}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

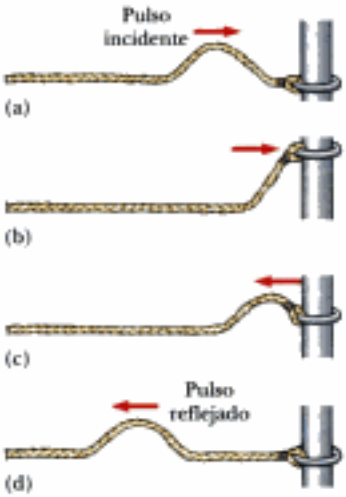


Figura 16.15 Reflexión de un pulso viajero en el extremo libre de una cuerda estirada. El pulso reflejado no se invierte.

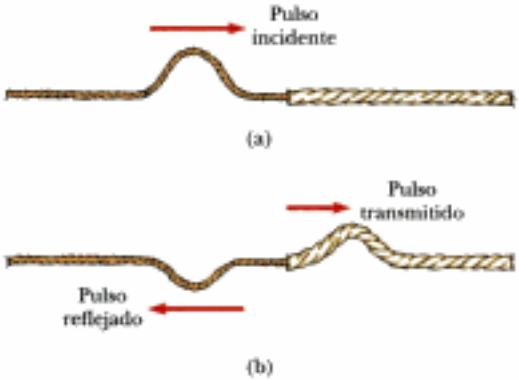


Figura 16.16 (a) Pulso que viaja a la derecha en una cuerda ligera atada a una cuerda más pesada. (b) Parte del pulso incidente es reflejado (e invertido), y parte es transmitido a la cuerda más pesada. En la figura 16.17, vea una animación que para ambas figuras está en el vínculo Active figures.

hacia abajo. Este movimiento del anillo produce un pulso reflejado que no se invierte y que tiene la misma amplitud que el pulso entrante.

Por último, podemos tener una situación en la que la frontera es indeterminada entre estos dos extremos. En este caso, parte de la energía del pulso incidente se refleja y parte experimenta **transmisión,** es decir, parte de la energía pasa por la frontera. Por ejemplo, suponga que una cuerda ligera está atada a una cuerda más pesada, como en la figura 16.16. Cuando un pulso que viaja en la cuerda ligera llega a la frontera entre las dos, parte del pulso es reflejado e invertido y parte se transmite a la cuerda más pesada. El pulso reflejado se invierte por las mismas razones descritas antes en el caso de la cuerda rígidamente unida a un soporte.

Nótese que el pulso reflejado tiene una menor amplitud que el pulso incidente. En la sección 16.5 demostramos que la energía transportada por una onda está relacionada con su amplitud. De acuerdo con el principio de la conservación de la energía, cuando el pulso se descompone en un pulso reflejado y un pulso transmitido en la frontera, la suma de las energías de estos dos pulsos debe ser igual a la energía del pulso incidente. Como el pulso reflejado contiene sólo parte de la energía del pulso incidente, su amplitud debe ser menor.

Cuando un pulso que se desplaza en una cuerda pesada incide en la frontera entre la cuerda pesada y una más ligera, como en la figura 16.17, de nuevo parte se refleja y parte se transmite. En este caso, el pulso reflejado no se invierte.

En cualquier caso, las alturas respectivas de los pulsos reflejado y transmitido dependen de las densidades relativas de las dos cuerdas. Si las cuerdas son idénticas, no hay discontinuidad en la frontera y no tiene lugar ninguna reflexión.

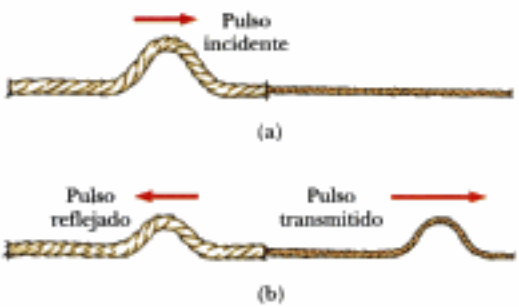


Figura 16.17 (a) Pulso que viaja a la derecha en una cuerda pesada atada a una cuerda más ligera. (b) El pulso incidente es parcialmente reflejado y parcialmente transmitido, y el pulso reflejado no se invierte.

En el vínculo* Active Figuras *en* http://www.pse6.com, *usted podrá ajustar las densidades lineales de masa de las cuerdas y la dirección transversal del pulso inicial.

Materiał chroniony prawem autorskim

Según la ecuación 16.18, aumenta la rapidez de una onda en una cuerda cuando disminuye la masa por longitud unitaria de la cuerda. En otras palabras, una onda se desplaza con más lentitud en una cuerda pesada que en una cuerda ligera si ambas están bajo la misma tensión. La siguiente regla general aplica a ondas reflejadas. **Cuando una onda o pulso se desplaza de un medio A a un medio B y $v_A > v_B$ (esto es, cuando B es más densa que A), se invierte al reflejarse. Cuando una onda o pulso se desplaza de un medio A a un medio B y $v_A < v_B$ (esto es, cuando A es más densa que B), no se invierte al reflejarse.**

16.5 Rapidez de transferencia de energía por ondas senoidales en cuerdas

Las ondas transportan energía cuando se propagan por un medio. Podemos fácilmente demostrar esto al colgar un objeto de una cuerda estirada y luego enviar un pulso por la cuerda, como se ve en la figura 16.18a. Cuando el pulso se encuentra con el objeto suspendido, éste se desplaza momentáneamente hacia arriba, como en la figura 16.18b. En el proceso, se transfiere energía al objeto y aparece como un aumento en la energía potencial gravitacional del sistema objeto-Tierra. En esta sección examinamos la rapidez con la que se transporta energía a lo largo de una cuerda; supondremos una onda senoidal unidimensional en el cálculo de la energía transferida.

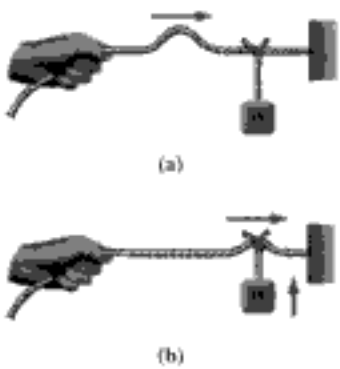


Figura 16.18 (a) Pulso que se desplaza a la derecha en una cuerda estirada que tiene un objeto suspendido de ella. (b) Se transmite energía al objeto suspendido cuando llega el pulso.

Considere una onda senoidal que viaja en una cuerda (figura 16.19). La fuente de la energía es algún agente externo situado en el extremo izquierdo de la cuerda, que realiza trabajo al producir oscilaciones. Podemos considerar que la cuerda es un sistema no aislado. Cuando el agente externo realiza trabajo sobre el extremo de la cuerda, moviéndola hacia arriba y abajo, se suministra energía al sistema de la cuerda y se propaga a toda su longitud. Concentremos nuestra atención en un elemento de la cuerda de longitud Δx y masa Δm. Cada uno de estos elementos se mueve verticalmente con movimiento armónico simple. Por lo tanto, podemos modelar cada elemento de la cuerda como un oscilador armónico simple, con la oscilación en la dirección y. Todos los elementos tienen la misma frecuencia angular ω y la misma amplitud A. La energía cinética K asociada con una partícula en movimiento es $K = \frac{1}{2}mv^2$. Si aplicamos esta ecuación a un elemento de longitud Δx y masa Δm, vemos que la energía cinética ΔK de este elemento es

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}(\Delta m)v_y^2$$

donde v_y es la rapidez transversal del elemento. Si μ es la masa por longitud unitaria de la cuerda, entonces la masa Δm del elemento de longitud Δx es igual a $\mu\,\Delta x$. Por lo tanto, podemos expresar la energía cinética de un elemento de la cuerda como

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}(\mu\,\Delta x)v_y^2 \tag{16.19}$$

Cuando la longitud del elemento de la cuerda se contrae a cero, ésta se convierte en una relación diferencial:

$$dK = \tfrac{1}{2}(\mu\,dx)v_y^2$$

Sustituimos por la rapidez general transversal de un oscilador armónico simple usando la ecuación 16.14:

$$\begin{aligned} dK &= \tfrac{1}{2}\mu[\omega A\cos(kx - \omega t)]^2\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\mu\omega^2A^2\cos^2(kx - \omega t)\,dx \end{aligned}$$

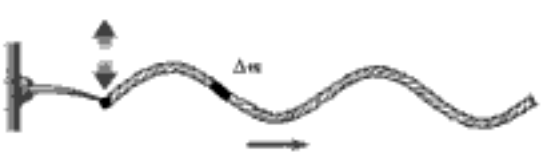


Figura 16.19 Onda senoidal que viaja a lo largo del eje x en una cuerda estirada. Cada elemento se mueve verticalmente y tiene la misma energía total.

Materiał chroniony prawem autorskim

Si tomamos una fotografía de la onda en el tiempo $t = 0$, entonces la energía cinética de un elemento dado es

$$dK = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2 kx\, dx$$

Integremos esta expresión sobre todos los elementos de la cuerda en una longitud de onda de la onda, que nos dará la energía cinética total K_λ en una longitud de onda:

$$K_\lambda = \int dK = \int_0^\lambda \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2 kx\, dx = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \int_0^\lambda \cos^2 kx\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left[\tfrac{1}{2}x + \frac{1}{4k}\operatorname{sen} 2kx\right]_0^\lambda = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 [\tfrac{1}{2}\lambda] = \tfrac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

Además de energía cinética, cada elemento de la cuerda tiene energía potencial asociada a él debido a su desplazamiento desde la posición de equilibrio y las fuerzas restauradoras de los elementos vecinos. Un análisis similar al que aparece líneas antes para la energía potencial total U_λ en una longitud de onda dará exactamente el mismo resultado:

$$U_\lambda = \tfrac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

La energía total en una longitud de onda de la onda es la suma de las energías potencial y cinética:

$$E_\lambda = U_\lambda + K_\lambda = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda \tag{16.20}$$

Cuando la onda se mueve a lo largo de la cuerda, esta cantidad de energía pasa por un punto dado en la cuerda durante un intervalo de un periodo de la oscilación. Por lo tanto, la potencia o rapidez de transferencia de energía asociada con la onda, es

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{\tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda}{T} = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left(\frac{\lambda}{T}\right)$$

Potencia de una onda

$$\mathcal{P} = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v \tag{16.21}$$

Esta expresión muestra que la rapidez de transferencia de energía de una onda senoidal en una cuerda es proporcional a (a) el cuadrado de la frecuencia, (b) el cuadrado de la amplitud, y (c) la rapidez de la onda. En realidad: **la rapidez de transferencia de energía en cualquier onda senoidal es proporcional al cuadrado de la frecuencia angular y al cuadrado de la amplitud.**

Pregunta rápida 16.8 ¿Cuál de lo siguiente, tomado por sí mismo, sería más efectivo para aumentar la rapidez a la que una onda que viaja a lo largo de una cuerda transfiere energía? (a) reducir a la mitad la densidad lineal de masa de la cuerda, (b) duplicar la longitud de onda de la onda, (c) duplicar la tensión en la cuerda, (d) duplicar la amplitud de la onda

Ejemplo 16.6 Potencia suministrada a una cuerda vibrando

Una cuerda tensa para la que $\mu = 5.00 \times 10^{-2}$ kg/m está bajo tensión de 80.0 N. ¿Cuánta potencia debe ser suministrada para generar ondas senoidales a una frecuencia de 60.0 Hz y una amplitud de 6.00 cm?

Solución La rapidez de la onda en la cuerda es, de la ecuación 16.18,

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{80.0\ \text{N}}{5.00 \times 10^{-2}\ \text{kg/m}}} = 40.0\ \text{m/s}$$

Como $f = 60.0$ Hz, la frecuencia angular ω de las ondas senoidales en la cuerda tiene el valor

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(60.0\ \text{Hz}) = 377\ \text{s}^{-1}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Usando estos valores en la ecuación 16.21 para la potencia, con $A = 6.00 \times 10^{-2}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v \\ &= \tfrac{1}{2}(5.00 \times 10^{-2}\ \text{kg/m})(377\ \text{s}^{-1})^2 \\ &\quad \times (6.00 \times 10^{-2}\ \text{m})^2(40.0\ \text{m/s}) \\ &= \mathbf{512\ W}\end{aligned}$$

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si la cuerda debe transferir energía a razón de 1 000 W? ¿Cuál debe ser la amplitud necesaria si todos los demás parámetros permanecen iguales?

Respuesta Establecemos una relación entre la potencia nueva y la anterior, que refleja sólo un cambio en la amplitud:

$$\frac{\mathcal{P}_{\text{nueva}}}{\mathcal{P}_{\text{vieja}}} = \frac{\frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2_{\text{nueva}} v}{\frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2_{\text{vieja}} v} = \frac{A^2_{\text{nueva}}}{A^2_{\text{vieja}}}$$

Al despejar la nueva amplitud,

$$\begin{aligned}A_{\text{nueva}} &= A_{\text{vieja}}\sqrt{\frac{\mathcal{P}_{\text{nueva}}}{\mathcal{P}_{\text{vieja}}}} = (6.00\ \text{cm})\sqrt{\frac{1\,000\ \text{W}}{512\ \text{W}}} \\ &= 8.39\ \text{cm}\end{aligned}$$

16.6 La ecuación lineal de onda

En la sección 16.1 introdujimos el concepto de la función de onda para representar ondas que viajan en una cuerda. Todas las funciones de onda $y(x,t)$ representan soluciones de una ecuación llamada *ecuación lineal de onda*. Esta ecuación da una descripción completa del movimiento de una onda, y de ella se puede obtener una expresión para la rapidez de la onda. Además, la ecuación lineal de onda es básica para muchas formas de movimiento de ondas. En esta sección derivamos esta ecuación cuando se aplique a ondas en cuerdas.

Suponga que una onda viajera se propaga a lo largo de una cuerda que está bajo la tensión T. Consideremos un pequeño elemento de cuerda de longitud Δx (figura 16.20). Los extremos del elemento forman pequeños ángulos θ_A y θ_B con el eje x. La fuerza neta que actúa sobre el elemento en la dirección vertical es

$$\sum F_y = T \operatorname{sen}\theta_B - T \operatorname{sen}\theta_A = T(\operatorname{sen}\theta_B - \operatorname{sen}\theta_A)$$

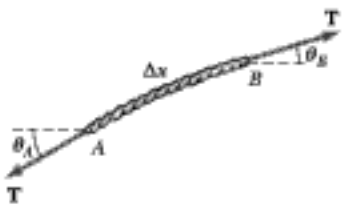


Figura 16.20 Un elemento de una cuerda bajo tensión T.

Como los ángulos son pequeños, podemos usar la aproximación de ángulo pequeño $\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta$ para expresar la fuerza neta como

$$\sum F_y \approx T(\tan\theta_B - \tan\theta_A) \tag{16.22}$$

Imagine experimentar un desplazamiento infinitesimal hacia fuera desde el extremo del elemento de cuerda de la figura 16.20 a lo largo de la línea azul que representa la fuerza $\mathbf{T}$. Este desplazamiento tiene componentes x e y infinitesimales y se puede representar con el vector $dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}}$. La tangente del ángulo con respecto al eje x para este desplazamiento es dy/dx. Como estamos evaluando esta tangente en un instante particular de tiempo, necesitamos expresar esto en forma parcial como $\partial y/\partial x$. Sustituyendo por las tangentes en la ecuación 16.22 tendremos

$$\sum F_y \approx T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right] \tag{16.23}$$

Ahora aplicamos la segunda ley de Newton al elemento, con la masa del elemento dada por $m = \mu\,\Delta x$:

$$\sum F_y = ma_y = \mu\,\Delta x\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \tag{16.24}$$

Combinando la ecuación 16.23 con la ecuación 16.24, obtenemos

$$\begin{aligned}\mu\,\Delta x\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) &= T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right] \\ \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{(\partial y/\partial x)_B - (\partial y/dx)_A}{\Delta x}\end{aligned} \tag{16.25}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

El lado derecho de esta ecuación se puede expresar en una forma diferente si notamos que la derivada parcial de cualquier función se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si asociamos $f(x + \Delta x)$ con $(\partial y/\partial x)_B$ y $f(x)$ con $(\partial y/\partial x)_A$, vemos que, en el límite $\Delta x \to 0$, la ecuación 16.25 se convierte en

Ecuación lineal de onda para una cuerda

$$\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{16.26}$$

Ésta es la ecuación lineal de onda como aplica a ondas en una cuerda.

Ahora demostramos que la función senoidal de onda (ecuación 16.10) representa una solución de la ecuación lineal de onda. Si tomamos la función senoidal de onda como la forma $y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)$, entonces las derivadas apropiadas son

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 16.26, obtenemos

$$-\frac{\mu\omega^2}{T}\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) = -k^2\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)$$

Esta ecuación debe ser verdadera para todos los valores de las variables x y t para que la función senoidal de onda sea una solución de la ecuación de onda. Ambos lados de la ecuación dependen de x y t a través de la misma función $\mathrm{sen}(kx - \omega t)$. Como esta función se divide, en realidad tenemos una identidad, siempre que

$$k^2 = \frac{\mu}{T}\omega^2$$

Si usamos la relación $v = \omega/k$ (ecuación (16.11) en esta expresión, vemos que

$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{T}{\mu}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

que es la ecuación 16.18. Esta derivación representa otra prueba de la expresión para la rapidez de la onda en una cuerda tensa.

La ecuación lineal de onda (ecuación 16.26) se escribe a veces en la forma

Ecuación lineal de onda en general

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{16.27}$$

Esta expresión aplica en general a varios tipos de ondas viajeras. Para ondas en cuerdas, y representa la posición vertical de elementos de la cuerda. Para ondas de sonido, y corresponde a la posición longitudinal de elementos de aire desde el equilibrio o variaciones ya sea de la presión o la densidad del gas a través del que se propagan las ondas de sonido. En el caso de ondas electromagnéticas, y corresponde a componentes de campo eléctrico o magnético.

Hemos demostrado que la función senoidal de onda (ecuación 16.10) es una solución de la ecuación lineal de onda (ecuación (16.27). Aun cuando no lo demostramos aquí, la ecuación lineal de onda se satisface para *cualquier* función de onda que tenga la forma $y = f(x \pm vt)$. Además, hemos visto que la ecuación lineal de onda es consecuencia directa de la segunda ley de Newton aplicada a cualquier elemento de una cuerda que transporte una onda viajera.

Materiał chroniony prawem autorskim

RESUMEN

Una **onda transversal** es aquella en la que los elementos del medio se mueven en una dirección *perpendicular* a la dirección de propagación. Un ejemplo es una onda en una cuerda tensa. Una **onda longitudinal** es aquella en la que los elementos del medio se mueven en una dirección *paralela* a la dirección de propagación. Las ondas de sonido en fluidos son longitudinales.

Cualquier onda unidimensional que se desplace con rapidez v en la dirección x puede ser representada por una función de onda de la forma

$$y(x, t) = f(x \pm vt) \qquad (16.1, 16.2)$$

donde el signo positivo aplica a una onda que se desplaza en la dirección x negativa y el signo negativo aplica a una onda que viaja en la dirección x positiva. Se obtiene la forma de la onda en cualquier instante (una fotografía de la onda) al mantener t constante.

La **función de onda** para una onda senoidal unidimensional que viaja a la derecha se puede expresar como

$$y = A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \qquad (16.5, 16.10)$$

donde A es la **amplitud,** λ es la **longitud de onda,** k es el **número angular de onda,** y ω es la **frecuencia angular.** Si T es el **periodo** y f la **frecuencia,** v, k y ω se pueden escribir como

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \qquad (16.6, 16.12)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (16.8)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad (16.3, 16.9)$$

La rapidez de una onda que se mueva en una cuerda tensa de masa μ por longitud unitaria y tensión T es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (16.18)$$

Una onda es total o parcialmente reflejada cuando llega al extremo del medio en el que se propaga o cuando llega a una frontera donde en forma discontinua cambia su rapidez. Si una onda que viaja en una cuerda se encuentra un extremo fijo, la onda se refleja y se invierte. Si la onda alcanza un extremo libre, se refleja pero no se invierte.

La **potencia** transmitida por una onda senoidal en una cuerda estirada es

$$\mathcal{P} = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v \qquad (16.21)$$

Las funciones de onda son soluciones a una ecuación diferencial llamada **ecuación lineal de onda:**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (16.27)$$

PREGUNTAS

1. ¿Por qué un pulso en una cuerda es considerado como transversal?
2. ¿Cómo se crearía una onda longitudinal en un resorte estirado? ¿Sería posible crear una onda transversal en un resorte?
3. ¿Por qué factor se tendría que multiplicar la tensión en una cuerda estirada para duplicar la rapidez de una onda?
4. Cuando se desplaza en una cuerda tensa, ¿siempre se invierte un pulso al reflejarse? Explique.
5. La rapidez vertical de un segmento de una cuerda tensa horizontal, por la cual viaja una onda, ¿depende de la rapidez de la onda?
6. Si un extremo de una cuerda tensa se mueve continuamente tres veces por segundo, ¿cuál sería el periodo de la onda senoidal que se forma en la cuerda?
7. Una fuente vibratoria genera una onda senoidal en una cuerda bajo tensión constante. Si se duplica la potencia entregada a una

Materiał chroniony prawem autorskim

cuerda, ¿en qué factor cambia la amplitud? ¿Cambia la rapidez de la onda bajo estas circunstancias?

8. Considere una onda que se desplaza en una cuerda tensa. ¿Cuál es la diferencia, si la hay, entre la rapidez de la onda y la rapidez de un pequeño segmento de la cuerda?

9. Si una cuerda larga se cuelga de un techo y se inician ondas en la cuerda desde su extremo inferior, ¿ascienden con rapidez constante? Explique.

10. ¿Cómo difieren las ondas transversales de las ondas longitudinales?

11. Cuando todas las cuerdas de una guitarra están estiradas a la misma tensión, la rapidez de una onda a lo largo de la cuerda de tono más grave ¿será mayor, menor o igual que la rapidez de una onda de las cuerdas más ligeras?

12. Si un extremo de una cuerda pesada se ata a un extremo de una cuerda ligera, la rapidez de una onda cambiará cuando la onda pase de la cuerda pesada a la ligera. ¿Aumentará o disminuirá? ¿Qué le ocurre a la frecuencia? ¿Y a la longitud de onda?

13. Si se estira una manguera de caucho y se le da un tirón, se puede observar que un pulso sube y baja por la manguera. ¿Qué le pasa a la rapidez del pulso si se estira aun más la manguera? ¿Qué le pasa a la rapidez si se llena la manguera con agua?

14. En una onda longitudinal en un resorte, las espiras se mueven hacia delante y atrás en la dirección del movimiento de la onda. ¿La rapidez de la onda depende de la máxima rapidez de cada espira?

15. Ondas longitudinales y transversales se pueden propagar por un sólido. Una onda en la superficie de un líquido puede comprender movimiento longitudinal y transversal de elementos del medio. Por fluido debe ser puramente longitudinal, no transversal. ¿Por qué?

16. En un terremoto, tanto ondas S (transversales) como P (longitudinales) se propagan desde el foco del temblor. El foco está en el suelo abajo del epicentro en la superficie. Las ondas S viajan por el suelo con más lentitud que las ondas P (a unos 5 km/s contra 8 km/s). Al detectar el tiempo de llegada de las ondas, ¿cómo se puede determinar la distancia desde el foco del temblor? ¿Cuántas estaciones de detección se necesitan para localizar el foco en forma no ambigua?

17. En mecánica, es frecuente suponer cuerdas sin masa. ¿Por qué no es ésta una buena suposición cuando se estudian ondas en cuerdas?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, difícil = solución guiada con sugerencias disponibles en http://www.pse6.com

= use computadora para resolver el problema = problemas numéricos y simbólicos por pares

Sección 16.1 Propagación de una perturbación

1. En $t = 0$, un pulso transversal en un alambre está descrito por la función

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

donde x e y están en metros. Escriba la función $y(x,t)$ que describe este pulso si está moviéndose en la dirección x positiva con una rapidez de 4.50 m/s.

2. Las olas oceánicas con distancia de 10.0 m de cresta a cresta se pueden describir por la función de onda

$$y(x,t) = (0.800 \text{ m}) \operatorname{sen}[0.628(x - vt)]$$

donde $v = 1.20$ m/s. (a) Trace $y(x,t)$ en $t = 0$. (b) Trace $y(x,t)$ en $t = 2.00$ s. Nótese que toda la onda se ha corrido 2.40 m en la dirección x positiva en este intervalo.

3. Un pulso que se mueve a lo largo del eje x está descrito por

$$y(x, t) = 5.00e^{-(x+5.00t)^2}$$

donde x es en metros y t es en segundos. Determine (a) la dirección del movimiento de la onda, y (b) la rapidez del pulso.

4. Dos puntos A y B en la superficie terrestre están a la misma longitud y 60.0° aparte en latitud. Suponga que un temblor en el punto A crea una onda P que llega al punto B al viajar por el cuerpo del planeta a una rapidez constante de 7.80 km/s. El terremoto también irradia una *onda Rayleigh*, que viaja por la superficie de la Tierra en forma análoga a una onda superficial en el agua, a 4.50 km/s. (a) ¿Cuál de estas dos ondas sísmicas llega primero a B? (b) ¿Cuál es la diferencia en tiempo entre las llegadas de las dos ondas en B? Tome el radio de la Tierra como 6 370 km.

5. Las ondas S y P, simultáneamente radiadas desde el hipocentro de un temblor, se reciben en una estación sismológica situadas a 17.3 s una de otra. Suponga que las ondas se han desplazado en la misma trayectoria con magnitudes de rapidez de 4.50 km/s y 7.80 km/s. Hállese la distancia desde el sismógrafo al hipocentro del temblor.

Sección 16.2 Ondas senoidales

6. Para cierta onda transversal, la distancia entre dos crestas sucesivas es 1.20 m, y ocho crestas pasan por un punto dado a lo largo de la dirección de recorrido cada 12.0 s. Calcule la rapidez de la onda.

7. Una onda senoidal está viajando a lo largo de una cuerda. El oscilador que genera la onda completa produce 40.0 vibraciones en 30.0 s. También, un máximo dado viaja 425 cm a lo largo de la cuerda en 10.0 s. ¿Cuál es la longitud de onda?

8. Cuando un alambre particular está vibrando con una frecuencia de 4.00 Hz, se produce una onda transversal de longitud de onda 60.0 cm. Determine la rapidez de las ondas a lo largo del alambre.

9. Una onda está descrita por $y = (2.00 \text{ cm}) \operatorname{sen}(kx - \omega t)$, donde $k = 2.11$ rad/m, $\omega = 3.62$ rad/s, x es en metros, y t es en segundos. Determine la amplitud, longitud de onda, frecuencia y rapidez de la onda.

10. Una onda senoidal en una cuerda está descrita por

$$y = (0.51 \text{ cm}) \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

Materiał chroniony prawem autorskim

donde $k = 3.10$ rad/cm y $\omega = 9.30$ rad/s. ¿Qué distancia se mueve la cresta de la onda en 10.0 s? ¿Se mueve en la dirección x positiva o negativa?

11. Considere con más detalle la cuerda que se muestra en la figura 16.10 y que se trata en el ejemplo 16.3. Calcule (a) la máxima rapidez transversal y (b) la máxima aceleración transversal de un punto sobre la cuerda.

12. Considere la onda senoidal del ejemplo 16.2, con la función de onda

$$y = (15.0 \text{ cm}) \cos (0.157x - 50.3t).$$

En cierto instante, sea el punto A el origen y el punto B el primer punto a lo largo del eje x, donde la onda está 60.0° fuera de fase con el punto A. ¿Cuál es la coordenada del punto B?

13. Una onda senoidal está descrita por

$$y = (0.25 \text{ m}) \text{ sen } (0.30x - 40t)$$

donde x y y se miden en metros y t en segundos. Determine para esta onda (a) la amplitud, (b) la frecuencia angular, y (c) el número angular de onda, (d) la longitud de onda, (e) la rapidez de onda y (f) la dirección de movimiento.

14. (a) Grafique y contra t en $x = 0$ para una onda senoidal de la forma $y = (15.0 \text{ cm}) \cos(0.157x - 50.3t)$, donde x e y están en centímetros y t es en segundos. (b) Determine el periodo de vibración desde esta gráfica y compare su resultado con el valor hallado en el ejemplo 16.2.

15. (a) Escriba la expresión para y como función de x y t para una onda senoidal que viaja a lo largo de una cuerda en la dirección x *negativa* con las siguientes características: $A = 8.00$ cm, $\lambda = 80.0$ cm, $f = 3.00$ Hz, y $y(0,t) = 0$ en $t = 0$. (b) **¿Qué pasaría si?** Escriba la expresión para y como función de x y t para la onda en la parte (a) suponiendo que $y(x,0) = 0$ en el punto $x = 10.0$ cm.

16. Una onda senoidal que se desplaza en la dirección $-x$ (a la izquierda) tiene una amplitud de 20.0 cm, una longitud de onda de 35.0 cm, y una frecuencia de 12.0 Hz. La posición transversal de un elemento del medio en $t = 0$, $x = 0$ es $y = -3.00$ cm, y el elemento tiene aquí una velocidad positiva. (a) Trace la onda en $t = 0$. (b) Encuentre el número angular de onda, periodo, frecuencia angular y rapidez de onda de la onda. (c) Escriba una expresión para la función de onda $y(x,t)$.

17. Una onda transversal en una cuerda está descrita por la función de onda

$$y = (0.120 \text{ m}) \text{ sen}[(\pi x/8) + (4\pi t)]$$

(a) Determine la rapidez transversal y aceleración en $t = 0.200$ s para el punto en la cuerda situado en $x = 1.60$ m. (b) ¿Cuál es la longitud de onda, periodo y rapidez de propagación de esta onda?

18. Una onda senoidal transversal en una cuerda tiene un periodo $T = 25.0$ ms y se desplaza en la dirección x negativa con una rapidez de 30.0 m/s. En $t = 0$, una partícula en la cuerda en $x = 0$ tiene una posición transversal de 2.00 cm y está viajando hacia abajo con una rapidez de 2.00 m/s. (a) ¿Cuál es la amplitud de la onda? (b) ¿Cuál es el ángulo inicial de fase? (c) ¿Cuál es la máxima rapidez transversal de la cuerda? (d) Escriba la función de onda para la onda.

19. Una onda senoidal de longitud de onda 2.00 m y amplitud 0.100 m se desplaza en una cuerda con una rapidez de 1.00 m/s a la derecha. Inicialmente, el extremo izquierdo de la cuerda está en el origen. Encuentre (a) la frecuencia y frecuencia angular, (b) el número angular de onda, y (c) la función de onda para esta onda. Determine la ecuación de movimiento para (d) el extremo izquierdo de la cuerda y (e) el punto de la cuerda en $x = 1.50$ m a la derecha del extremo izquierdo. (f) ¿Cuál es la máxima rapidez de cualquier punto sobre la cuerda?

20. Una onda en una cuerda está descrita por la función de onda $y = (0.100 \text{ m}) \text{ sen}(0.50x - 20t)$. (a) Demuestre que una partícula en la cuerda en $x = 2.00$ m ejecuta un movimiento armónico simple. (b) Determine la frecuencia de oscilación de este punto particular.

Sección 16.3 Rapidez de ondas en cuerdas

21. Un cable de teléfono mide 4.00 m de largo. El cable tiene una masa de 0.200 kg. Se produce un pulso transversal al pulsar un extremo del cable tenso. El pulso hace cuatro recorridos en un sentido y otro a lo largo del cable en 0.800 s. ¿Cuál es la tensión del cable?

22. Han de producirse ondas transversales con una rapidez de 50.0 m/s en una cuerda tensa. Se utiliza un tramo de 5.00 m de la cuerda con una masa total de 0.060 0 kg. ¿Cuál es la tensión requerida?

23. Una cuerda de piano que tiene una masa por unidad de longitud igual a 5.00×10^{-3} kg/m está bajo una tensión de 1 350 N. Encuentre la rapidez de una onda que se desplace en esta cuerda.

24. Una onda viajera transversal en un alambre tenso tiene una amplitud de 0.200 mm y una frecuencia de 500 Hz. Se desplaza con una rapidez de 196 m/s. (a) Escriba una ecuación en unidades del SI de la forma $y = A \text{ sen}(kx - \omega t)$ para esta onda. (b) La masa por longitud unitaria de este alambre es 4.10 g/m. Encuentre la tensión en el alambre.

25. Un astronauta en la Luna desea medir el valor local de la aceleración en caída libre al sincronizar pulsos que bajan por un alambre que tiene un objeto de masa grande suspendido del alambre. Suponga que un alambre tiene una masa de 4.00 g y una longitud de 1.60 m, y que un objeto de 3.00 kg se cuelga de él. Un pulso necesita de 36.1 ms para recorrer el tramo del alambre. Calcule g_{Luna} a partir de estos datos. (El estudiante puede no hacer caso de la masa del alambre cuando calcule la tensión en el mismo.)

26. Viajan pulsos transversales con una rapidez de 200 m/s a lo largo de un alambre tenso de cobre cuyo diámetro es 1.50 mm. ¿Cuál es la tensión en el alambre? (La densidad del cobre es de 8.92 g/cm^3.)

27. Viajan pulsos transversales con una rapidez de 20.0 m/s en una cuerda bajo una tensión de 6.00 N. ¿Qué tensión se necesita para una rapidez de onda de 30.0 m/s en la misma cuerda?

28. Un péndulo simple consta de una pelota de masa M que cuelga de una cuerda uniforme de masa m y longitud L, con $m \ll M$. Si el periodo de oscilaciones para el péndulo es T, determine la rapidez de una onda transversal en la cuerda cuando el péndulo cuelgue en reposo.

29. El límite elástico del acero que forma un alambre es igual a 2.70×10^8 Pa. ¿Cuál es la máxima rapidez a la que se pueden propagar pulsos de una onda transversal a lo largo de este alambre sin exceder este esfuerzo? (La densidad del acero es 7.86×10^3 kg/m^3.)

30. **Problema de repaso.** Una cuerda ligera con una masa por longitud unitaria de 8.00 g/m tiene sus extremos atados a dos paredes

Materiał chroniony prawem autorskim

Sección 16.6 La ecuación lineal de onda

43. (a) Evalúe A en la igualdad escalar $(7 + 3)4 = A$. (b) Evalúe A, B y C en la igualdad vectorial $7.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{k}} = A\hat{\mathbf{i}} + B\hat{\mathbf{j}} + C\hat{\mathbf{k}}$. Explique la forma en que llega a las respuestas para convencer a un estudiante que piensa que usted no puede resolver una sola ecuación para tres incógnitas diferentes. (c) **¿Qué pasaría si?** La igualdad o identidad funcional

$$A + B\cos(Cx + Dt + E) = (7.00\text{ mm})\cos(3x + 4t + 2)$$

es verdadera para todos los valores de las variables x y t, que se miden en metros y segundos, respectivamente. Evalúe las constantes A, B, C, D y E. Explique cómo llegar a las respuestas.

44. Demuestre que la función de onda $y = e^{b(x - vt)}$ es una solución de la ecuación lineal de onda (ecuación 16.27), donde b es una constante.

45. Demuestre que la función de onda $y = \ln[b(x - vt)]$ es una solución a la ecuación 16.27, donde b es una constante.

46. (a) Demuestre que las funciones $y(x,t) = x^2 + v^2t^2$ es una solución a la ecuación de onda. (b) Demuestre que la función en la parte (a) se puede escribir como $f(x + vt) + g(x - vt)$, y determine las formas funcionales para f y g. (c) **¿Qué pasaría si?** Repita las partes (a) y (b) para la función $y(x,t) = \text{sen}(x)\cos(vt)$.

Problemas adicionales

47. "La ola" es un tipo particular de pulso que se puede propagar en una gran multitud reunida en estadios deportivos para ver un juego de fútbol (figura P16.47). Los elementos del medio son los espectadores, con la posición cero correspondiente a que están sentados y la posición máxima correspondiente a cuando se ponen de pie y levantan los brazos. Cuando una parte considerable de los espectadores participan en el movimiento de la ola, se puede crear una forma estable del pulso. La rapidez de la onda depende del tiempo de reacción del público, que suele ser del orden de 0.1 s. Estime el orden de magnitud, en minutos, del tiempo necesario para que este pulso haga un circuito alrededor de un gran estadio de deportes. Exprese las cantidades que mida o estime, y sus valores.

Figura P16.47

48. Una onda viajera se propaga de acuerdo con la expresión $y = (4.0\text{ cm})\,\text{sen}(2.0x - 3.0t)$, donde x es en centímetros y t es en segundos. Determine (a) la amplitud, (b) la longitud de onda, (c) la frecuencia, (d) el periodo y (e) la dirección de recorrido de la onda.

49. La función de onda para una onda viajera en una cuerda tensa es (en unidades del SI)

$$Y(x,t) = (0.350\text{ m})\,\text{sen}(10\pi t - 3\pi x + \pi/4)$$

(a) ¿Cuáles son la rapidez y dirección de recorrido de la onda? (b) ¿Cuál es la posición vertical de un elemento de la cuerda en $t = 0$, $x = 0.100$ m? (c) ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de la onda? (d) ¿Cuál es la máxima magnitud de la rapidez transversal de la cuerda?

50. Una onda transversal en una cuerda está descrita por la ecuación

$$y(x,t) = (0.350\text{ m})\,\text{sen}[(1.25\text{ rad/m})x + (99.6\text{ rad/s})t]$$

Considere el elemento de la cuerda en $x = 0$. (a) ¿Cuál es el intervalo entre los primeros dos instantes cuando este elemento tiene una posición de $y = 0.175$ m? (b) ¿Qué distancia recorre la onda durante este intervalo?

51. Una película cinematográfica se proyecta a 24.0 cuadros por segundo. Cada cuadro es una fotografía de 19.0 mm de alto. ¿A qué rapidez constante pasa la película en el proyector?

52. **Problema de repaso.** Un bloque de masa M, sostenido por una cuerda, se apoya sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal (figura P16.52). La longitud de la cuerda es L, y su masa es $m \ll M$. Deduzca una expresión para el intervalo necesario para que una onda transversal recorra de un extremo de la cuerda al otro.

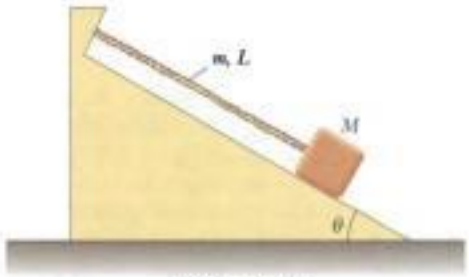


Figura P16.52

53. **Problema de repaso.** Un bloque de 2.00 kg cuelga de una cuerda de caucho, estando sostenida de modo que la cuerda no está estirada. La longitud no estirada de la cuerda es 0.500 m, y su masa es de 5.00 g. La "constante del resorte" para la cuerda es de 100 N/m. El bloque se suelta y se detiene en el punto más

Materiał chroniony prawem autorskim

bajo. (a) Determine la tensión en la cuerda cuando el bloque esté en su punto más bajo. (b) ¿Cuál es la longitud de la cuerda en esta posición "estirada"? (c) Encuentre la rapidez de una onda transversal en la cuerda si el bloque se mantiene en esta posición más baja.

54. **Problema de repaso.** Un bloque de masa M cuelga de una cuerda de caucho. El bloque está sostenido de modo que la cuerda no está estirada. La longitud no estirada de la cuerda es L_0 y su masa es m, mucho menor que M. La "constante del resorte" para la cuerda es k. El bloque se suelta y se detiene en el punto más bajo. (a) Determine la tensión en la cuerda cuando el bloque está en su punto más bajo. (b) ¿Cuál es la longitud de la cuerda en esta posición "estirada"? (c) Encuentre la rapidez de una onda transversal en la cuerda si el bloque se mantiene en esta posición más baja.

55. (a) Determine la rapidez de ondas transversales en una cuerda bajo una tensión de 80.0 N si la cuerda tiene una longitud de 2.00 m y masa de 5.00 g. (b) Calcule la potencia necesaria para generar estas ondas si tienen una longitud de 16.0 cm y una amplitud de 4.00 cm.

56. Una onda senoidal en una cuerda está descrita por la función de onda

$$y = (0.20\ \text{m})\ \text{sen}(0.75\pi x + 18\pi t)$$

donde x y y están en metros y t está en segundos. La cuerda tiene una densidad lineal de masa de 0.250 kg/m. Si la tensión en la cuerda es proporcionada por un montaje como el que se ilustra en la figura 16.12, ¿cuál es el valor de la masa suspendida?

57. Un bloque de masa 0.450 kg está unido a un extremo de una cuerda de masa 0.003 20 kg; el otro extremo de la cuerda está atado a un punto fijo. El bloque gira con rapidez angular constante en un círculo en una mesa horizontal sin fricción. ¿Qué ángulo gira el bloque en el tiempo que una onda transversal tarda para desplazarse a lo largo de una cuerda desde el centro del círculo al bloque?

58. Un alambre de densidad ρ tiene conicidad de modo que el área de la sección transversal varía con x de acuerdo a

$$A = (1.0 \times 10^{-5}x + 0.010)\ \text{cm}^2$$

(a) Si el alambre está sometido a una tensión T, deduzca una relación para hallar la rapidez de una onda como función de la posición. (b) **¿Qué pasaría si?** Si el alambre es de aluminio y está sometido a una tensión de 24.0 N, determine la rapidez en el origen y en $x = 10.0$ m.

59. Una cuerda de masa total m y longitud L está suspendida verticalmente. Demuestre que un pulso transversal se desplaza la longitud de la cuerda en un intervalo $\Delta t = 2\sqrt{L/g}$ (*Sugerencia:* Primero encuentre una expresión para hallar la rapidez de onda en cualquier punto a una distancia x del extremo inferior al considerar la tensión en la cuerda como resultante del peso del segmento que está abajo de ese punto).

60. Si un cuerpo de masa M está suspendido de la parte baja de la cuerda en el problema 59, (a) demuestre que el intervalo para que un pulso transversal recorra la longitud de la cuerda es

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{L}{mg}}\left(\sqrt{M+m} - \sqrt{M}\right)$$

¿Qué pasaría si? (b) Demuestre que esto se reduce al resultado del problema 59 cuando $M = 0$. (c) Demuestre que para $m \ll M$, la expresión en la parte (a) se reduce a

$$\Delta t = \sqrt{\frac{mL}{Mg}}$$

61. Se dice en el problema 59 que un pulso viaja del punto más bajo al más alto de una cuerda de longitud L en un intervalo $\Delta t = 2\sqrt{L/g}$ Use este resultado para contestar las siguientes preguntas. (Es necesario establecer cualesquiera integraciones nuevas). (a) ¿Cuánto tarda un pulso para subir la mitad de la cuerda? Dé su respuesta como fracción de la cantidad $2\sqrt{L/g}$ (b) Un pulso empieza a subir por la cuerda. ¿Cuánto ha recorrido después de un intervalo $\sqrt{L/g}$?

62. Determine la rapidez y dirección de propagación de cada una de las siguientes ondas senoidales, suponiendo que x y y se miden en metros y t en segundos.

(a) $y = 0.60\cos(3.0x - 15t + 2)$

(b) $y = 0.40\cos(3.0x + 15t - 2)$

(c) $y = 1.2\ \text{sen}(15t + 2.0x)$

(d) $y = 0.20\ \text{sen}[12t - (x/2) + \pi]$

63. Un alambre de aluminio está sujeto en cada extremo bajo tensión cero a temperatura ambiente. La tensión en el alambre se aumenta al reducir la temperatura, lo cual resulta en una disminución de la longitud de equilibrio del alambre. ¿Qué deformación ($\Delta L/L$) resulta en una rapidez de onda transversal de 100 m/s? Tome el área de la sección transversal de alambre como $5.00 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$, la densidad como $2.70 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$, y el módulo de elasticidad como $7.00 \times 10^{10}\ \text{N/m}^2$.

64. Si una espira de cadena se conforma a alta velocidad, puede rodar por el suelo como un arillo circular sin resbalar ni colapsarse. Considere una cadena de densidad μ de masa lineal uniforme cuyo centro de masa se mueve a la derecha a una rapidez constante v_0. (a) Determine la tensión en la cadena en términos de μ y v_0. (b) Si la espira rueda sobre un bache, la deformación resultante de la cadena hace que dos pulsos transversales se propaguen a lo largo de la cadena, uno moviéndose en el sentido de giro de las manecillas de un reloj y uno moviéndose al contrario. ¿Cuál es la rapidez de los pulsos que viajan a lo largo de la cadena? (c) ¿Qué ángulo recorre cada pulso durante el tiempo que tarda la espira en hacer una revolución completa?

65. (a) Demuestre que la rapidez de las ondas longitudinales a lo largo de un resorte de constante de fuerza k es $v = \sqrt{kL/\mu}$, donde L es la longitud no estirada del resorte y μ es la masa por longitud unitaria. (b) Un resorte con una masa de 0.400 kg tiene una longitud no estirada de 2.00 m y una constante de fuerza de 100 N/m. Usando el resultado que obtuvo en (a), determine la rapidez de las ondas longitudinales a lo largo de este resorte.

66. Una cuerda de longitud L está formada por dos secciones. La mitad izquierda tiene una masa por longitud unitaria de $\mu = \mu_0/2$, mientras que la derecha tiene una masa por longitud unitaria de $\mu' = 3\mu = 3\mu_0/2$. La tensión en la cuerda es T_0. Nótese de los datos dados que esta cuerda tiene la misma masa total que una cuerda uniforme de longitud L y masa por longitud unitaria μ_0. (a) Encuentre las magnitudes de rapidez v y v' a las que los pulsos transversales viajan en las dos secciones. Exprese las magnitudes de rapidez en términos de T_0 y μ_0, y también como múltiples de la rapidez $v_0 = (T_0/\mu_0)^{1/2}$. (b) Encuentre el intervalo necesario para que un pulso se desplace de un extremo de la cuerda al otro. Dé su resultado como un múltiplo de $\Delta t_0 = L/v_0$.

Materiał chroniony prawem autorskim

67. Un pulso que se desplaza a lo largo de una cuerda de densidad μ de masa lineal está descrito por la función de onda

$$y = [A_0 e^{-bx}] \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

donde el factor en paréntesis rectangulares antes de la función seno se dice que es la amplitud. (a) ¿Cuál es la potencia $\mathcal{P}$ transportada por esta onda en un punto x? (b) ¿Cuál es la potencia transportada por esta onda en el origen? (c) Calcule la razón $\mathcal{P}$.

68. Un terremoto en el lecho oceánico en el golfo de Alaska produce un *tsunami* (a veces llamado incorrectamente "ola de marea") que llega a Hilo, Hawai, a 4 450 km de distancia, en un tiempo de 9 h 30 minutos. Los tsunamis tienen longitudes de onda enormes (100 a 200 km), y la rapidez de propagación para estas olas es $v = \sqrt{g\bar{d}}$, donde $\bar{d}$ es el promedio de profundidad del agua. De la información dada, encuentre el promedio de rapidez de la ola y el promedio de profundidad del océano entre Alaska y Hawai. (Este método se utilizó en 1856 para estimar el promedio de profundidad del océano Pacífico mucho antes que se hicieran sondeos para dar una determinación directa.)

69. Una cuerda en un instrumento musical se mantiene bajo tensión T y se extiende del punto $x = 0$ al punto $x = L$. La cuerda está forrada con alambre en forma tal que su masa por longitud unitaria $\mu(x)$ aumenta uniformemente de μ_0 en $x = 0$ a μ_L en $x = L$. (a) Encuentre una expresión para $\mu(x)$ como función de x sobre el intervalo $0 \leq x \leq L$. (b) Demuestre que el intervalo necesario para que el pulso transversal recorra la longitud de la cuerda está dado por

$$\Delta t = \frac{2L\left(\mu_L + \mu_0 + \sqrt{\mu_L \mu_0}\right)}{3\sqrt{T}\left(\sqrt{\mu_L} + \sqrt{\mu_0}\right)}$$

Respuestas a las *preguntas rápidas*

16.1 (b) Es longitudinal porque la perturbación (el corrimiento de la posición de las personas) es paralelo a la dirección en la que viaja la onda.

16.2 (a) Es transversal porque las personas se ponen de pie y se sientan (movimiento vertical), mientras que la ola se mueve ya sea a la izquierda o a la derecha.

16.3 (c) La rapidez de la onda está determinada por el medio, de modo que no es afectada por cambiar la frecuencia.

16.4 (b) Como la rapidez de la onda permanece igual, el resultado de duplicar la frecuencia es que la longitud de onda es la mitad de su magnitud.

16.5 (d) La amplitud de una onda no está relacionada con la rapidez de la onda, de modo que no podemos determinar la nueva amplitud sin más información.

16.6 (c) Con una amplitud mayor, un elemento de la cuerda tiene más energía asociada con su movimiento armónico simple, de manera que el elemento pasa por la posición de equilibrio con una más alta rapidez transversal máxima.

16.7 Sólo las respuestas (f) y (h) son correctas. (a) y (b) afectan la rapidez transversal de una partícula de la cuerda, pero no la rapidez de la onda a lo largo de la cuerda. (c) y (d) cambian la amplitud. (e) y (g) aumentan el intervalo de tiempo al reducir la rapidez de la onda.

16.8 (d) Duplicar la amplitud de la onda hace que la potencia sea mayor en un factor de 4. En (a), reducir a la mitad la densidad lineal de masa de la cuerda hace que la potencia cambie en un factor de 0.71, la rapidez disminuye. En (b), duplicar la longitud de onda reduce a la mitad la frecuencia y hace que la potencia cambie en un factor de 0.25, la rapidez disminuye. En (c), duplicar la tensión en la cuerda cambia la rapidez de la onda y hace que la potencia cambie en un factor de 1.4, no tan grande como en la parte (d).

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 17

Ondas de sonido

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

17.1 Rapidez de las ondas de sonido

17.2 Ondas de sonido periódicas

17.3 Intensidad de ondas de sonido periódicas

17.4 El efecto Doppler

17.5 Grabación digital de sonido

17.6 Sonido en películas

▲ *El oído humano ha evolucionado para captar ondas de sonido e interpretarlas como música o voz. Algunos animales, como este joven zorro de orejas de murciélago, se han adaptado para captar sonidos muy débiles. (Getty Images)*

Materiał chroniony prawem autorskim

Las ondas de sonido son el ejemplo más común de ondas longitudinales. Se desplazan en cualquier medio material con una rapidez que depende de las propiedades del medio. Cuando las ondas viajan en el aire, elementos del aire vibran para producir cambios en densidad y presión a lo largo de la dirección de movimiento de la onda. Si la fuente de las ondas de sonido vibra senoidalmente, las variaciones de presión también son senoidales. La descripción matemática de ondas de sonido senoidales es muy semejante a la de ondas senoidales en cuerdas, que hemos estudiado en el capítulo previo a éste.

Las ondas de sonido se dividen en tres categorías que cubren intervalos de frecuencia diferentes. (1) Las *ondas audibles* se encuentran dentro de la gama de sensibilidad del oído humano. Pueden ser generadas en varias formas, por ejemplo por instrumentos musicales, voces humanas o altavoces. (2) Las *ondas infrasónicas* tienen frecuencias abajo de la gama audible. Los elefantes pueden usar ondas infrasónicas para comunicarse entre ellos, incluso cuando estén separados por muchos kilómetros. (3) Las *ondas ultrasónicas* tienen frecuencias arriba de la gama audible. Es posible que hayamos empleado un silbato "silencioso" para llamar a un perro. El sonido ultrasónico que emite es fácilmente escuchado por perros, aun cuando los humanos no podamos captarlo en absoluto. Las ondas ultrasónicas también se emplean para tomar imágenes de uso en medicina.

Iniciamos este capítulo con el estudio de la rapidez de las ondas de sonido y luego intensidad de ondas, que es una función de la amplitud de una onda. A continuación damos una descripción alternativa de la intensidad de ondas de sonido que para mayor comodidad comprime, en una pequeña gama, la amplia gama de intensidades a las que el oído es sensible. Investigamos los efectos del movimiento de fuentes y/o escuchas en la frecuencia de un sonido. Por último, exploramos la reproducción digital del sonido, concentrándonos en particular en sistemas de sonido que se utilizan en películas modernas.

17.1 Rapidez de las ondas de sonido

Describamos gráficamente el movimiento de un pulso longitudinal unidimensional que se mueve por un largo tubo que contiene un gas compresible (figura 17.1). Un émbolo situado en el extremo izquierdo se puede mover a la derecha para comprimir el gas y crear el pulso. Antes que el émbolo se mueva, el gas no está perturbado y es de densidad uniforme, como lo representa la región uniformemente sombreada de la figura 17.1a. Cuando el émbolo se empuja de pronto a la derecha (figura 17.1b), el gas que está justo frente a él se comprime (como lo representa la región más sombreada); la presión y densidad en esta región son ahora más altas de lo que eran antes de mover el émbolo. Cuando éste llega al reposo (figura 17.1c), la región comprimida del gas continúa moviéndose a la derecha, correspondiendo a un pulso longitudinal que se desplaza por el tubo con rapidez v. Nótese que la rapidez del émbolo *no es* igual a v. Además, la región comprimida no "se pega" al émbolo cuando éste se mueve, porque la rapidez de la onda suele ser mayor que la del émbolo.

La rapidez de las ondas de sonido en un medio depende de la compresibilidad y de la densidad del medio. Si el medio es un líquido o gas y tiene módulo de volumen B (vea la sección 12.4) y densidad ρ, la rapidez de las ondas de sonido en ese medio es

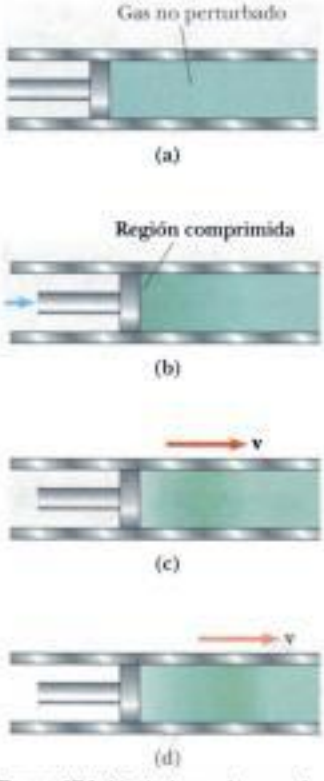


Figura 17.1 Movimiento de un pulso longitudinal que pasa por un gas compresible. La compresión (región más oscura) es producida por el émbolo en movimiento.

Materiał chroniony prawem autorskim

17.2 Ondas de sonido periódicas

Esta sección ayudará al lector a entender mejor la naturaleza de las ondas de sonido. Un dato importante para comprender la forma en que funciona nuestro oído es que *las variaciones de presión controlan lo que escuchamos.*

Es posible producir una onda de sonido periódica unidimensional en un tubo largo y angosto que contenga un gas, por medio de un émbolo oscilatorio que se encuentre en un extremo, como se ve en la figura 17.2. Las partes más oscuras de las regiones de color de esta figura, representan regiones donde el gas está comprimido, por lo que la densidad y presión están arriba de sus valores de equilibrio. Una región comprimida se forma siempre que el émbolo se empuje en el tubo. Esta región comprimida, llamada **compresión,** se mueve por el tubo como un pulso, continuamente comprimiendo la región situada justo frente a él. Cuando el émbolo se jala hacia atrás, se expande el gas situado frente a él y la presión y densidad en esta región caen por abajo de sus valores de equilibrio (representadas por partes más claras en las áreas de color en la figura 17.2). Estas regiones de baja presión, llamadas **rarefacciones** también se propagan a lo largo del tubo, siguiendo las compresiones. Ambas regiones se mueven con una rapidez igual a la rapidez del sonido en el medio.

Cuando el émbolo oscila senoidalmente, las regiones de compresión y expansión se forman continuamente. La distancia entre dos compresiones sucesivas (o dos expansiones sucesivas) es igual a la longitud de onda λ. Cuando estas regiones se desplazan por el tubo, cualquier elemento pequeño del medio se mueve con movimiento armónico simple en la dirección de la onda. Si $x(x, t)$ es la posición de un elemento pequeño con respecto a su posición de equilibrio,[1] podemos expresar esta función de posición armónica como

$$s(x, t) = s_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t) \tag{17.2}$$

donde **$s_{\text{máx}}$ es la máxima posición del elemento con respecto al equilibrio.** Es frecuente que ésta se llame **amplitud de desplazamiento** de la onda. El parámetro k es el número de onda y ω es la frecuencia angular del émbolo. Nótese que el desplazamiento del elemento es a lo largo de x, en la dirección de propagación de la onda de sonido, lo cual significa que estamos describiendo una onda longitudinal.

La variación en la presión del gas ΔP medida desde el valor de equilibrio también es periódica. Para la función de posición en la ecuación 17.2, ΔP está dada por

$$\Delta P = \Delta P_{\text{máx}} \operatorname{sen}(kx - \omega t) \tag{17.3}$$

donde **la amplitud de presión $\Delta P_{\text{máx}}$** —que es el **máximo cambio en la presión desde el valor de equilibrio**— está dada por

$$\Delta P_{\text{máx}} = \rho v \omega s_{\text{máx}} \tag{17.4}$$

Por lo tanto, vemos que una onda de sonido puede ser considerada ya sea como una onda de desplazamiento o una onda de presión. Una comparación de las ecuaciones 17.2 y 17.3 muestra que **la onda de presión está 90° fuera de fase con la onda de desplazamiento.** En la figura 17.3 se ilustran estas funciones. Nótese que la variación de presión es máxima cuando el desplazamiento desde el equilibrio es cero, y el desplazamiento desde el equilibrio es máximo cuando la variación de presión es cero.

Pregunta rápida 17.2 Al soplar en sentido perpendicular en la boca de una botella de refresco, un pulso de sonido baja por el aire de la botella. En el momento en que el pulso llega al fondo de la botella, las descripciones correctas del desplazamiento de elementos de aire desde sus posiciones de equilibrio y la presión del aire en este punto son: (a) el desplazamiento y presión son máximos, (b) el desplazamiento y presión son mínimos, (c) el desplazamiento es cero y la presión es máxima, (d) el desplazamiento es cero y la presión es mínima.

[1] Usamos $s(x, t)$ aquí en lugar de $y(x, t)$, porque el desplazamiento de elementos del medio no es perpendicular a la dirección x.

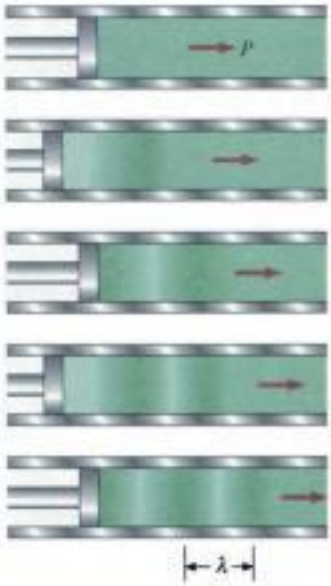


Figura activa 17.2 Onda longitudinal que se propaga en un tubo lleno de gas. La fuente de la onda es un émbolo oscilatorio situado a la izquierda.

En el vínculo Active Figures *en* http://www.pse6.com, *usted podrá ajustar la frecuencia del émbolo.*

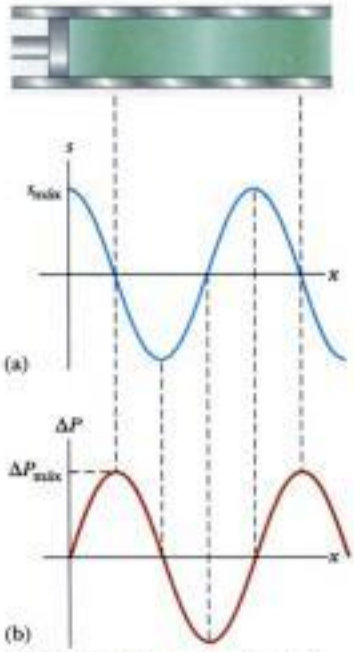


Figura 17.3 (a) Amplitud de desplazamiento y (b) amplitud de presión contra posición para una onda longitudinal senoidal.

Materiał chroniony prawem autorskim

Deducción de la ecuación 17.3

Considere un elemento delgado de gas en forma de disco cuya sección transversal circular es paralela al émbolo en la figura 17.2. Este elemento experimentará cambios en posición, presión y densidad cuando una onda de sonido se propague por el gas. De la definición de módulo de volumen (véase la ecuación 12.8), la variación de presión en el gas es

$$\Delta P = -B\frac{\Delta V}{V_i}$$

El elemento tiene un grosor Δx en la dirección horizontal y un área de sección transversal A, de modo que su volumen es $V_i = A\Delta x$. El cambio en volumen ΔV que acompaña el cambio de presión es igual a $A\Delta s$, donde Δs es la diferencia entre el valor de s en $x + \Delta x$ y el valor de s en x. Por lo tanto, podemos expresar ΔP como

$$\Delta P = -B\frac{\Delta V}{V_i} = -B\frac{A\Delta s}{A\Delta x} = -B\frac{\Delta s}{\Delta x}$$

Cuando Δx se aproxima a cero, la razón $\Delta s/\Delta x$ se convierte en $\partial s/\partial x$. (La derivada parcial indica que estamos interesados en la variación de s con la posición en un tiempo *fijo*.) Por lo tanto,

$$\Delta P = -B\frac{\partial s}{\partial x}$$

Si la función de posición es la función senoidal simple dada por la ecuación 17.2, encontramos que

$$\Delta P = -B\frac{\partial}{\partial x}[s_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t)] = Bs_{\text{máx}}k\,\text{sen}(kx - \omega t)$$

Como el módulo de volumen está dado por $B = \rho v^2$ (vea la ecuación 17.1), la variación de presión se reduce a

$$\Delta P = \rho v^2 s_{\text{máx}}k\,\text{sen}(kx - \omega t)$$

De la ecuación 16.11, podemos escribir $k = \omega/v$; por lo tanto, ΔP se puede expresar como

$$\Delta P = \rho v\omega s_{\text{máx}}\,\text{sen}(kx - \omega t)$$

Como la función seno tiene un valor máximo de 1, vemos que el valor máximo de la variación de presión es $\Delta P_{\text{máx}} = \rho v\omega s_{\text{máx}}$ (vea la ecuación 17.4), y llegamos a la ecuación 17.3:

$$\Delta P = \Delta P_{\text{máx}}\,\text{sen}(kx - \omega t)$$

17.3 Intensidad de ondas de sonido periódicas

En el capítulo precedente demostramos que una onda viajera en una cuerda tensa transporta energía. El mismo concepto se aplica a las ondas de sonido. Considere un elemento de aire de masa Δm y ancho Δx enfrente de un émbolo que oscila con una frecuencia ω, como se muestra en la figura 17.4.

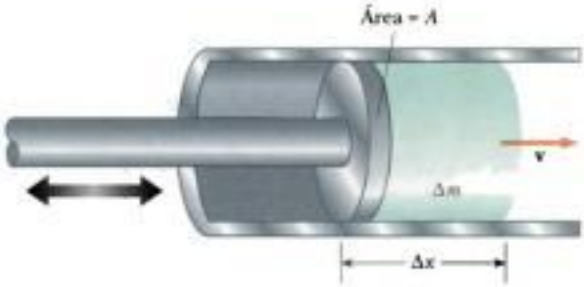


Figura 17.4 Un émbolo oscilatorio transfiere energía al aire del tubo, haciendo que el elemento de aire de ancho Δx y masa Δm oscile con una amplitud $s_{\text{máx}}$.

Materiał chroniony prawem autorskim

El émbolo transmite energía a este elemento de aire del tubo, y se propaga energía alejándola del émbolo por acción de la onda de sonido. Para evaluar la rapidez de transferencia de energía para la onda de sonido, evaluaremos la energía cinética de este elemento de aire, que está experimentando movimiento armónico simple. Seguiremos un procedimiento semejante al de la sección 16.5, en donde evaluamos la rapidez de transferencia de energía para una onda en una cuerda.

Cuando la onda de sonido se propaga alejándose del émbolo, la posición de cualquier elemento de aire frente al émbolo está dada por la ecuación 17.2. Para evaluar la energía cinética de este elemento de aire, necesitamos conocer su rapidez. Encontramos la rapidez al tomar la derivada del tiempo de la ecuación 17.2:

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} s(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} [s_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)] = -\omega s_{\text{máx}} \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

Imagine que tomamos una "instantánea" de la onda en $t = 0$. La energía cinética de un elemento de aire dado en este tiempo es

$$\begin{aligned}\Delta K &= \tfrac{1}{2}\Delta m(v)^2 = \tfrac{1}{2}\Delta m(-\omega s_{\text{máx}} \operatorname{sen} kx)^2 = \tfrac{1}{2}\rho A\, \Delta x(-\omega s_{\text{máx}} \operatorname{sen} kx)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\rho A\, \Delta x(\omega s_{\text{máx}})^2 \operatorname{sen}^2 kx\end{aligned}$$

donde A es el área de la sección transversal del elemento y $A\Delta x$ es su volumen. Ahora, como en la sección 16.5, integramos esta expresión sobre toda una longitud de onda para hallar la energía cinética total en una longitud de onda. Si hacemos que el elemento de aire se contraiga a un grosor infinitesimal, de modo que $\Delta x \rightarrow dx$, tenemos

$$\begin{aligned}K_\lambda &= \int dK = \int_0^\lambda \tfrac{1}{2}\rho A(\omega s_{\text{máx}})^2 \operatorname{sen}^2 kx\, dx = \tfrac{1}{2}\rho A(\omega s_{\text{máx}})^2 \int_0^\lambda \operatorname{sen}^2 kx\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\rho A(\omega s_{\text{máx}})^2 (\tfrac{1}{2}\lambda) = \tfrac{1}{4}\rho A(\omega s_{\text{máx}})^2 \lambda\end{aligned}$$

Al igual que en el caso de la onda en una cuerda en la sección 16.5, la energía potencial total para una longitud de onda tiene el mismo valor que la energía cinética total; por lo tanto, la energía mecánica total para una longitud de onda es

$$E_\lambda = K_\lambda + U_\lambda = \tfrac{1}{2}\rho A(\omega s_{\text{máx}})^2 \lambda$$

Cuando la onda de sonido se mueve en el aire, esta cantidad de energía pasa por un punto dado durante un periodo de oscilación. En consecuencia, la rapidez de transferencia de energía es

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{\tfrac{1}{2}\rho A(\omega s_{\text{máx}})^2 \lambda}{T} = \tfrac{1}{2}\rho A(\omega s_{\text{máx}})^2 \left(\frac{\lambda}{T}\right) = \tfrac{1}{2}\rho A v(\omega s_{\text{máx}})^2$$

donde v es la rapidez del sonido en el aire.

Definimos la **intensidad** I de una onda, o la potencia por área unitaria, como la rapidez a la que la onda transporta energía a un área unitaria A perpendicular a la dirección de recorrido de la onda:

$$I = \frac{\mathcal{P}}{A} \tag{17.5}$$

En el presente caso, por lo tanto, la intensidad es

$$I = \frac{\mathcal{P}}{A} = \tfrac{1}{2}\rho v(\omega s_{\text{máx}})^2$$

Intensidad de una onda de sonido

En consecuencia, vemos que la intensidad de una onda de sonido periódica es proporcional al cuadrado de la amplitud de desplazamiento y al cuadrado de la frecuencia angular (como en el caso de una onda periódica en una cuerda). Esto se puede escribir en términos de la amplitud de presión $\Delta P_{\text{máx}}$; en este caso, usamos la ecuación 17.4 para obtener

Materiał chroniony prawem autorskim

$$I = \frac{\Delta P_{\text{máx}}^2}{2\rho v} \tag{17.6}$$

Ahora considere una fuente puntual que emite ondas de sonido igualmente en todas direcciones. De nuestra experiencia diaria, sabemos que la intensidad del sonido decrece conforme nos alejamos de la fuente. Identificamos una esfera imaginaria de radio r con centro en la fuente. Cuando una fuente emite sonido igualmente en todas direcciones, describimos el resultado como una **onda esférica.** La potencia promedio $\mathcal{P}$ emitida por la fuente debe estar distribuida uniformemente en esta superficie esférica de área $4\pi r^2$. Por lo tanto, la intensidad de la onda a una distancia r de la fuente es

Comportamiento del inverso del cuadrado de la intensidad para una fuente puntual

$$I = \frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{A} = \frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{4\pi r^2} \tag{17.7}$$

Esta ley del inverso del cuadrado, que nos recuerda el comportamiento de la gravedad en el capítulo 13, indica que la intensidad disminuye en proporción del inverso del cuadrado desde la fuente.

Pregunta rápida 17.3 Una *trompeta de oído* es una campana en forma de cono, como un megáfono, que personas con problemas auditivos usaban antes que se inventaran aparatos de sordera. El pequeño extremo del cono se mantenía en la oreja, y el extremo grande se apuntaba hacia la fuente de sonido, como en la figura 17.5. La trompeta de oído aumenta la intensidad del sonido porque (a) aumenta la rapidez del sonido, (b) refleja sonido hacia la fuente, (c) reúne sonido que normalmente no llegaría al oído y lo concentra en un área más pequeña, (d) aumenta la densidad del aire.

Cortesía de Kennedy Rogers Museum Archives/Ball State University

Figura 17.5 (Pregunta rápida 17.3) Una trompeta de aire, antes que se inventaran aparatos de sordera, se usaba para que los sonidos se hicieran más intensos a personas con problemas auditivos. Se puede simular el efecto de una trompeta de aire al poner las manos detrás de las orejas.

Materiał chroniony prawem autorskim

Pregunta rápida 17.4 Una cuerda de guitarra en vibración hace muy poco sonido si no está montada en la guitarra. Pero si esta cuerda en vibración se sujeta al cuerpo de la guitarra, de modo que vibre el cuerpo de la guitarra, el sonido es más alto en intensidad. Esto es porque (a) la potencia de la vibración se extiende sobre un área más grande, (b) la energía sale de la guitarra con mayor rapidez, (c) la rapidez del sonido es más alta en el material del cuerpo de la guitarra, (d) ninguno de estos incisos.

Ejemplo 17.2 Límites auditivos

Los sonidos más débiles que el oído humano puede detectar a una frecuencia de 1 000 Hz, corresponden a una intensidad de alrededor de 1.00×10^{-12} W/m^2, el así llamado *umbral auditivo*. Los sonidos más fuertes que puede tolerar el oído humano a esta frecuencia, corresponden a una intensidad de alrededor de 1.00 W/m^2, que es el *umbral del dolor*. Determine la amplitud de presión y amplitud de desplazamiento asociados con estos dos límites.

Solución Primero, considere los sonidos más débiles. Usando la ecuación 17.6 y tomando $v = 343$ m/s como la rapidez de ondas de sonido en el aire y $\rho = 1.20$ kg/m^3 como la densidad del aire, obtenemos

$$\Delta P_{\text{máx}} = \sqrt{2\rho v I}$$
$$= \sqrt{2(1.20\ \text{kg/m}^3)(343\ \text{m/s})(1.00 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2)}$$
$$= \mathbf{2.87 \times 10^{-5}\ N/m^2}$$

Como la presión atmosférica es de unos 10^5 N/m^2, este resultado nos dice que el oído es sensible a fluctuaciones de presión de sólo 3 partes en 10^{10}.

Podemos calcular la correspondiente amplitud de desplazamiento si usamos la ecuación 17.4, recordando que $\omega = 2\pi f$ (vea las ecuaciones 16.3 y 16.9):

$$s_{\text{máx}} = \frac{\Delta P_{\text{máx}}}{\rho v \omega} = \frac{2.87 \times 10^{-5}\ \text{N/m}^2}{(1.20\ \text{kg/m}^3)(343\ \text{m/s})(2\pi \times 1\,000\ \text{Hz})}$$
$$= \mathbf{1.11 \times 10^{-11}\ m}$$

Éste es un número notablemente pequeño. Si comparamos este resultado para $s_{\text{máx}}$ con el tamaño de un átomo (unos 10^{-10} m), vemos que el oído es un detector extremadamente sensible a las ondas de sonido.

De un modo semejante, encontramos que los sonidos más intensos que el oído humano puede tolerar corresponden a una amplitud de presión de 28.7 N/m^2 y una amplitud de desplazamiento igual a 1.11×10^{-5} m.

Ejemplo 17.3 Variaciones de la intensidad de una fuente puntual

Una fuente puntual emite ondas de sonido con una potencia promedio de 80.0 W.

(A) Hállese la intensidad a 3.00 m de la fuente.

Solución Una fuente puntual emite energía en forma de ondas esféricas. Usando la ecuación 17.7, tenemos

$$I = \frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{4\pi r^2} = \frac{80.0\ \text{W}}{4\pi(3.00\ \text{m})^2} = \mathbf{0.707\ W/m^2}$$

una intensidad que es cercana al umbral del dolor.

(B) Encuentre la distancia a la que la intensidad del sonido es 1.00×10^{-8} W/m^2.

Solución Si usamos este valor para I en la ecuación 17.7 y despejamos r, obtenemos

$$r = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{80.0\ \text{W}}{4\pi(1.00 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2)}}$$
$$= \mathbf{2.52 \times 10^4\ m}$$

que es igual a unas 16 millas.

Nivel de sonido en decibeles

El ejemplo 17.2 ilustra el amplio margen de intensidades que puede detectar el oído humano. Debido a que este margen es tan amplio, es conveniente usar una escala logarítmica, donde el **nivel de sonido** β está definido por la ecuación

$$\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \tag{17.8}$$

Nivel de sonido en decibeles

La constante I_0 es la *intensidad de referencia*, tomada como el umbral auditivo ($I_0 = 1.00 \times 10^{-12}$ W/m^2), e I es la intensidad en watts por metro cuadrado a la que corresponde el nivel de sonido β, donde β se mide[2] en **decibeles** (dB). En esta escala, el umbral del

[2] La unidad *bel* es en honor al inventor del teléfono, Alexander Graham Bell (1847-1922). El prefijo *deci* es el prefijo del SI que es 10^{-1}.

Materiał chroniony prawem autorskim

máquinas en este ejemplo ha de duplicarse, ¿cuántas máquinas deben estar funcionando?

Respuesta Con la regla práctica, una duplicación de intensidad corresponde a un aumento de nivel de sonido de 10 dB. Por lo tanto,

$$\beta_2 - \beta_1 = 10\text{ dB} = 10\log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) - 10\log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = 10\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$

$$\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 1$$

$$I_2 = 10I_1$$

En consecuencia, diez máquinas deben estar funcionando para duplicar la intensidad.

Intensidad y frecuencia

El estudio del nivel de sonido en decibeles se relaciona con una medición *física* de la fuerza de un sonido. Consideremos ahora la forma en que describimos la "medición" *psicológica* de la fuerza de un sonido.

Por supuesto, en nuestro cuerpo no tenemos medidores que puedan leer valores numéricos de nuestras reacciones a estímulos. Tenemos que "calibrar" un poco nuestras reacciones al comparar diferentes sonidos a un sonido de referencia, lo cual no es fácil. Por ejemplo, ya antes dijimos que el umbral de intensidad es 10^{-12} W/m^2, correspondiente a un nivel de intensidad de 0 dB. En realidad, este valor es el umbral sólo para un sonido de frecuencia de 1 000 Hz, que es una frecuencia estándar de referencia en acústica. Si realizamos un experimento para medir el umbral de intensidad a otras frecuencias, encontramos una variación distinta de este umbral como función de la frecuencia. Por ejemplo, a 100 Hz, un sonido debe tener un nivel de intensidad de unos 30 dB para ser apenas perceptible. Desafortunadamente, no hay una relación sencilla entre mediciones físicas y "mediciones" psicológicas. El sonido de 100 Hz, 30 dB es psicológicamente "igual" al sonido de 1 000 Hz y 0 dB (ambos son apenas perceptibles) pero no son físicamente iguales (30 dB ≠ 0 dB).

Al usar sujetos de prueba, se ha estudiado la respuesta humana al sonido y los resultados se muestran en la figura 17.6 (la región blanca), junto con la frecuencia aproximada y escalas de nivel de sonido de otras fuentes de sonido. La curva inferior de la región blanca corresponde al umbral de captación de un sonido. Su variación con la frecuencia es clara en este diagrama. Nótese que los seres humanos son sensibles a frecuencias que van de unos 20 Hz a unos 20 000 Hz. El límite superior de la región blanca es el umbral del dolor.

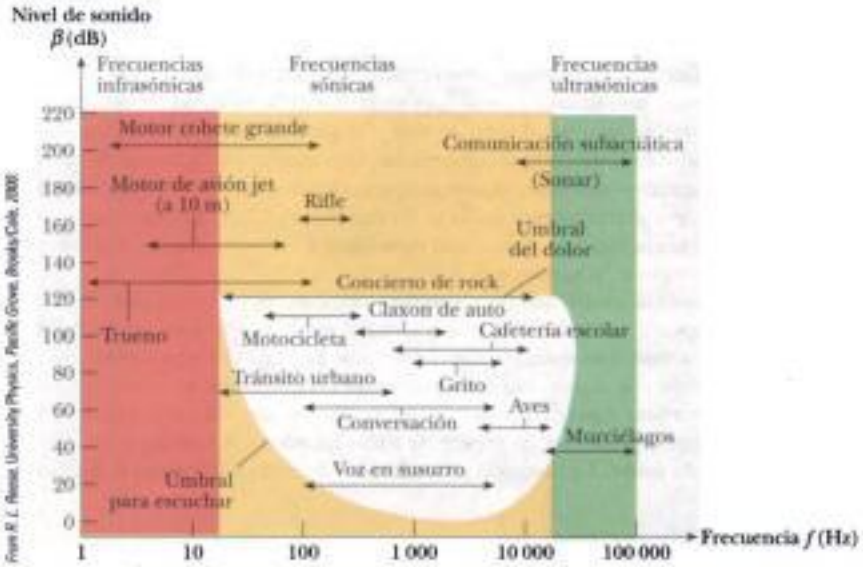


Figura 17.6 Frecuencia aproximada y escalas del nivel de sonido de varias fuentes y la del oído humano normal, mostrados por la región blanca.

Materiał chroniony prawem autorskim

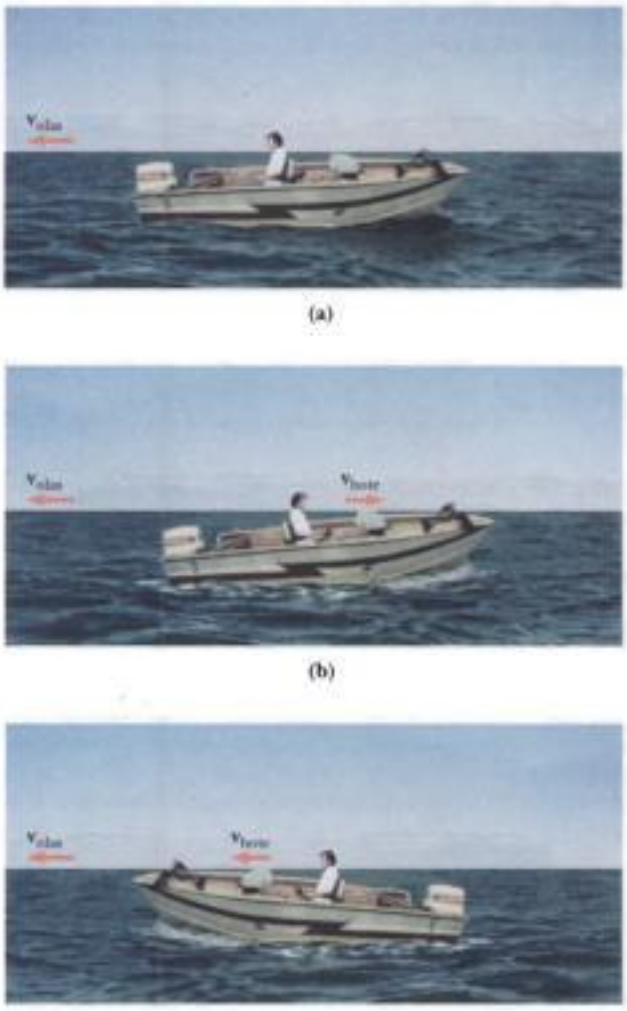


Figura 17.7 (a) Se mueven olas hacia un bote estacionario. Las olas se mueven a la izquierda, y su fuente está lejos a la derecha del bote fuera del marco de la fotografía. (b) El bote se mueve hacia la fuente de ondas. (c) El bote se aleja de la fuente de ondas.

gitud de onda λ. En la figura 17.8, los círculos son las intersecciones de estos frentes de onda tridimensionales con el papel bidimensional.

Tomamos la frecuencia de la fuente de la figura 17.8 como f, la longitud de onda como λ, y la rapidez del sonido como v. Si el observador también estuviera estacionario, él o ella detectarían frentes de onda a un ritmo f. (Esto es, cuando $v_O = 0$ y $v_S = 0$, la frecuencia observada es igual a la frecuencia de la fuente.) Cuando el observador se mueve hacia la fuente, la rapidez de las ondas con respecto al observador es $v' = v + v_O$, como en el caso del

Figura activa 17.8 Un observador O (el ciclista) se mueve con una rapidez v_O hacia una fuente puntual estacionaria S, que es el claxon de una camioneta estacionada. El observador escucha una frecuencia f' que es mayor a la frecuencia de la fuente.

En el vínculo **Active Figures** *en* **http://www.pse6.com**, *usted podrá ajustar la rapidez del observador.*

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 17.5 El radio-reloj descompuesto

Un radio-reloj despierta a una persona con un sonido continuo e irritante de 600 Hz de frecuencia. Una mañana, funciona mal y no puede ser apagado. Con frustración, la persona lanza el aparato desde la ventana de su dormitorio en un cuarto piso, a 15.0 m del suelo.

(A) A medida que el aparato cae, ¿qué frecuencia escucha la persona inmediatamente antes que llegue al suelo?

(B) ¿Con qué rapidez es que la persona escucha que cambia la frecuencia con el tiempo justo antes que oiga que el aparato llega al suelo?

Solución

(A) Al conceptualizar el problema, nótese que la rapidez del aparato aumenta cuando cae. Por lo tanto, es una fuente de sonido que de la persona se aleja con rapidez creciente. Clasificamos este problema como uno en el que debemos combinar nuestro conocimiento de cuerpos en caída con el de cambio de frecuencia debido al efecto Doppler. Para analizar el problema, identificamos el radio como una fuente en movimiento para la cual la frecuencia de efecto Doppler está dada por

$$f' = \left(\frac{v}{v - v_S}\right)f$$

La rapidez de la fuente de sonido está dada por la ecuación 2.9 para un cuerpo en caída:

$$v_S = v_{yi} + a_y t = 0 - gt = -gt$$

Por lo tanto, la frecuencia de efecto Doppler del reloj en caída es

$$(1) \qquad f' = \left(\frac{v}{v - (-gt)}\right)f = \left(\frac{v}{v + gt}\right)f$$

El tiempo en el que el radio choca en el suelo se encuentra de la ecuación 2.12:

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$-15.0\text{ m} = 0 + 0 - \tfrac{1}{2}(9.80\text{ m/s}^2)t^2$$
$$t = 1.75\text{ s}$$

Por lo tanto, la frecuencia de efecto Doppler justo cuando el radio choca en el suelo es

$$f' = \left(\frac{v}{v + gt}\right)f$$
$$= \left(\frac{343\text{ m/s}}{343\text{ m/s} + (9.80\text{ m/s}^2)(1.75\text{ s})}\right)(600\text{ Hz})$$
$$= \mathbf{571\text{ Hz}}$$

(B) La rapidez a la que cambia la frecuencia se encuentra al derivar la ecuación (1) con respecto a t:

$$\frac{df'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{vf}{v + gt}\right) = \frac{-vg}{(v + gt)^2}f$$
$$= \frac{-(343\text{ m/s})(9.80\text{ m/s}^2)}{[343\text{ m/s} + (9.80\text{ m/s}^2)(1.75\text{ s})]^2}(600\text{ Hz})$$
$$= \mathbf{-15.5\text{ Hz/s}}$$

Para finalizar este problema, considere el siguiente ¿Qué pasaría si?

¿Qué pasaría si? Supongamos que una persona vive en el octavo piso en lugar del cuarto piso. Si repite la actividad de tirar el radio, ¿cambia la frecuencia de la parte (A) y la rapidez de cambio de la frecuencia de la parte (B) de este doble ejemplo?

Respuesta La doble altura no da un tiempo en el que el radio llega al suelo como el doble del tiempo encontrado en la parte (A). De la ecuación 2.12:

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$-30.0\text{ m} = 0 + 0 - \tfrac{1}{2}(9.80\text{ m/s}^2)t^2$$
$$t = 2.47\text{ s}$$

La nueva frecuencia escuchada justo antes de oír que el radio choca en el suelo es

$$f' = \left(\frac{v}{v + gt}\right)f$$
$$= \left(\frac{343\text{ m/s}}{343\text{ m/s} + (9.80\text{ m/s}^2)(2.47\text{ s})}\right)(600\text{ Hz})$$
$$= \mathbf{560\text{ Hz}}$$

El cambio de frecuencia escuchado en el cuarto piso es 600 Hz − 571 Hz = 29 Hz, mientras que el cambio de frecuencia escuchado del octavo piso es 600 Hz − 560 Hz = 40 Hz, que no es el doble de grande.

La nueva rapidez de cambio de frecuencia es

$$\frac{df'}{dt} = \frac{-vg}{(v + gt)^2}f$$
$$= \frac{-(343\text{ m/s})(9.80\text{ m/s}^2)}{[343\text{ m/s} + (9.80\text{ m/s}^2)(2.47\text{ s})]^2}(600\text{ Hz})$$
$$= -15.0\text{ Hz/s}$$

Nótese que este valor es en realidad *menor* en magnitud que el valor previo de −15.5 Hz/s.

Ejemplo 17.6 Submarinos Doppler

Un submarino (submarino A) navega a una rapidez de 8.00 m/s, emitiendo una onda de sonar a una frecuencia de 1 400 Hz. La rapidez del sonido en el agua es 1 533 m/s. Un segundo submarino (submarino B) está situado de modo que ambos submarinos están navegando directamente uno hacia el otro. El segundo submarino se mueve a 9.00 m/s.

(A) ¿Qué frecuencia es detectada por un observador que viaja en el B cuando los submarinos se aproximan entre sí?

(B) Los submarinos por muy poco chocan y se pasan. ¿Qué frecuencia es detectada por un observador que viaja en el B cuando ambos submarinos se alejan entre sí?

Materiał chroniony prawem autorskim

Solución

(A) Usamos la ecuación 17.13 para hallar la frecuencia de efecto Doppler. Cuando los dos submarinos se aproximan entre sí, el observador en el B escucha la frecuencia

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right) f$$

$$= \left(\frac{1\,533\,\text{m/s} + (+9.00\,\text{m/s})}{1\,533\,\text{m/s} - (+8.00\,\text{m/s})}\right)(1\,400\,\text{Hz}) = \mathbf{1\,416\,Hz}$$

(B) Cuando los dos submarinos se alejan uno del otro, el observador en el B escucha la frecuencia

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right) f$$

$$= \left(\frac{1\,533\,\text{m/s} + (-9.00\,\text{m/s})}{1\,533\,\text{m/s} - (-8.00\,\text{m/s})}\right)(1\,400\,\text{Hz}) = \mathbf{1\,385\,Hz}$$

¿Qué pasaría si? Cuando los submarinos se aproximan uno al otro, parte del sonido del A será reflejado del B y regresa al A. Si este sonido fuera a ser detectado por un observador en el A, ¿cuál es la frecuencia?

Respuesta El sonido de frecuencia aparente de 1 416 Hz encontrado en la parte (A) será reflejado desde una fuente en movimiento (submarino B) y luego detectado por un observador en movimiento (submarino A). Por lo tanto, la frecuencia detectada por el submarino A es

$$f'' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right) f'$$

$$= \left(\frac{1\,533\,\text{m/s} + (+8.00\,\text{m/s})}{1\,533\,\text{m/s} - (+9.00\,\text{m/s})}\right)(1\,416\,\text{Hz}) = 1\,432\,\text{Hz}$$

Esta técnica es empleada por oficiales de policía para medir la rapidez de un auto en movimiento. Se emiten microondas desde la patrulla de policía que son reflejadas por un auto. Al detectar la frecuencia de efecto Doppler de las microondas reflejadas, el oficial puede determinar la rapidez del auto en movimiento.

Ondas de choque

Ahora considere lo que ocurre cuando la rapidez v_S de una fuente *excede* la rapidez v de la onda. Esta situación está descrita gráficamente en la figura 17.10a. Los círculos representan frentes de onda esféricos emitidos por la fuente en varios tiempos durante su movimiento. En $t = 0$, la fuente está en S_0, y en un tiempo t posterior, la fuente está en S_n. En el tiempo t, el frente de onda centrado en S_0 llega a un radio de vt. En este mismo intervalo, la fuente

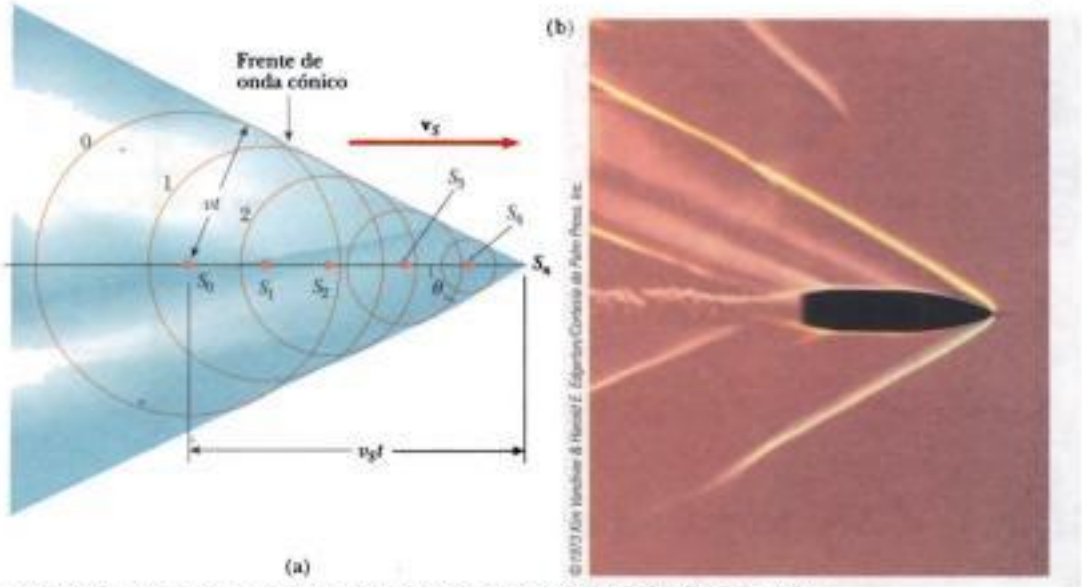


Figura 17.10 (a) Representación de una onda de choque producida cuando una fuente se mueve de S_0 a S_n con una rapidez v_S, que es mayor que la rapidez de la onda v en el medio. La envolvente de los frentes de onda forma un cono cuyo semiángulo de vértice está dado por $\theta = v/v_S$. (b) Fotografía estroboscópica de una bala que se mueve a velocidad supersónica en aire caliente arriba de una vela. Nótese la onda de choque en la cercanía de la bala.

Materiał chroniony prawem autorskim

Las películas actuales se producen con tres sistemas de grabación digital de sonido:

Dolby digital; En este formato, 5.1 canales de sonido digital se guardan en forma óptica entre los agujeros para rueda dentada de la película. Hay un respaldo óptico analógico en caso de falla del sistema digital. La primera película en usar esta técnica fue *Batman Returns* (1992).

DTS (Digital Theater Sound); 5.1 canales de sonido se almacenan en un CD-ROM separado que está sincronizado con la impresión de la película por códigos de tiempo en la película. Hay un respaldo óptico analógico en caso que falle el sistema digital. La primera película en usar esta técnica fue *Jurassic Park* (1993).

SDDS (Sony Dynamic Digital Sound); Ocho canales de sonido digital se almacenan de manera óptica fuera de los agujeros de rueda dentada a ambos lados de la película. Hay un respaldo óptico digital en caso que falle el sistema. La primera película en usar esta técnica fue *Last Action Hero* (1993). La existencia de información a ambos lados de la cinta es un sistema de redundancia —en caso de dañarse un lado, el sistema todavía opera. El SDDS utiliza un canal de LFE de espectro completo y otros dos canales (centro izquierda y centro derecha detrás de la pantalla). En la figura 17.16, que muestra una sección de película SDDS, se pueden ver tanto la pista de sonido óptica analógica y las dobles pistas digitales.

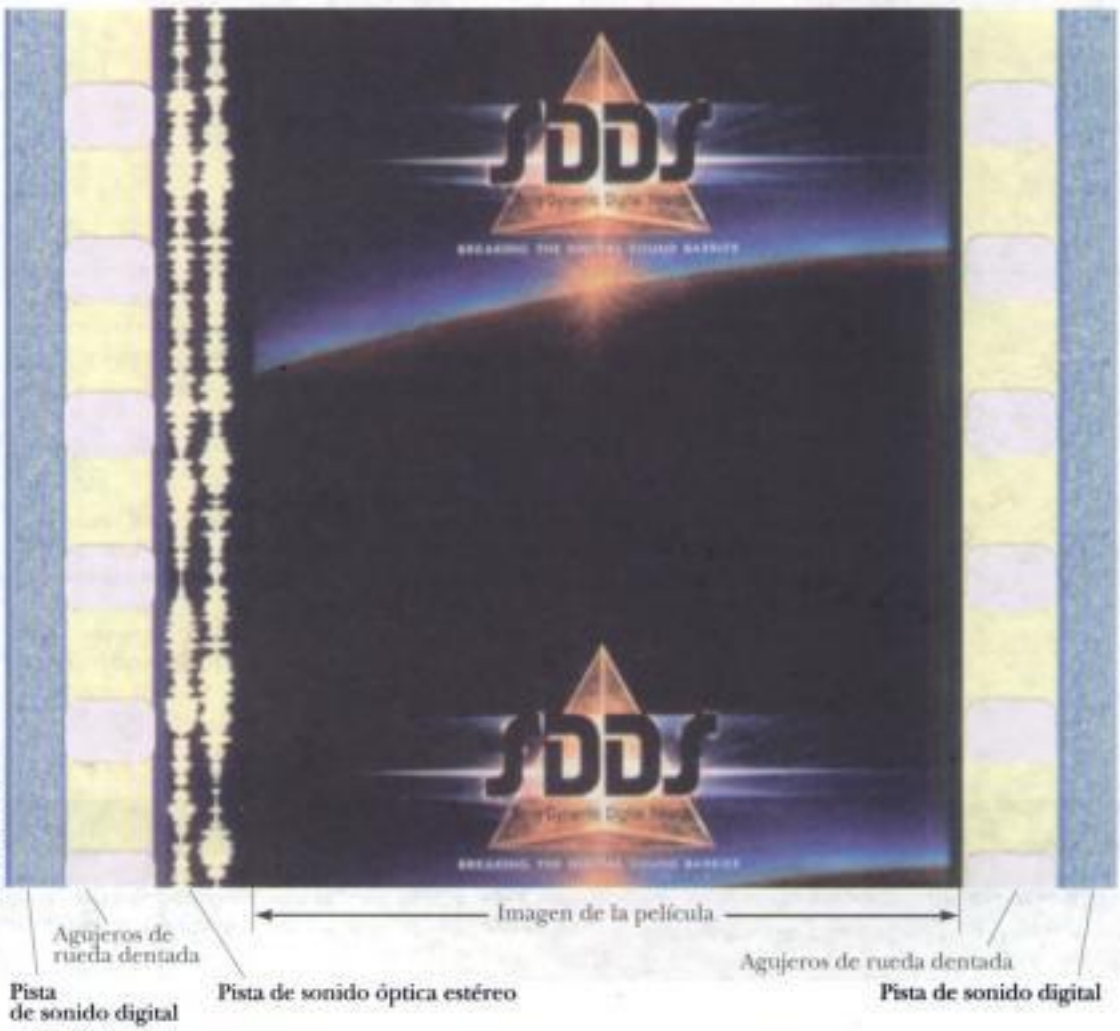


Figura 17.16 Diseño de información de película sonora que usa el sistema de sonido digital SDDS.

Materiał chroniony prawem autorskim

RESUMEN

Las ondas de sonido son longitudinales y se desplazan por un medio compresible con una rapidez que depende de las propiedades elásticas e inerciales de ese medio. La rapidez del sonido en un líquido o gas que tenga módulo de volumen B y densidad ρ es

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{17.1}$$

Para ondas de sonido senoidales, la variación en la posición de un elemento del medio está dada por

$$s(x, t) = s_{máx} \cos(kx - \omega t) \tag{17.2}$$

y la variación en presión a partir del valor de equilibrio es

$$\Delta P = \Delta P_{máx} \operatorname{sen}(kx - \omega t) \tag{17.3}$$

donde ΔP_{max} es la amplitud de presión. La onda de presión está 90° fuera de fase con la onda de desplazamiento. La relación entre s_{max} y ΔP_{max} está dada por

$$\Delta P_{máx} = \rho v \omega s_{máx} \tag{17.4}$$

La intensidad de una onda periódica, que es la potencia por unidad de área, es

$$I = \frac{\mathcal{P}}{A} = \frac{\Delta P_{máx}^2}{2\rho v} \tag{17.5, 17.6}$$

El nivel de sonido de una onda de sonido, en decibeles, está dada por

$$\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \tag{17.8}$$

La constante I_0 es la intensidad de referencia, usualmente tomada como el umbral auditivo (1.00×10^{-12} W/m^2), e I es la intensidad de la onda de sonido en watts por metro cuadrado.

El cambio en frecuencia que escucha un observador siempre que haya movimiento relativo entre una fuente de ondas de sonido y el observador se llama efecto Doppler. La frecuencia observada es

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right) f \tag{17.13}$$

En esta expresión, los signos para los valores sustituidos por v_O y v_S dependen de la dirección de la velocidad. Un valor positivo para la velocidad del observador o fuente se sustituye si la velocidad de uno es hacia el otro, mientras que un valor negativo representa una velocidad de uno alejándose del otro.

En grabación digital de sonido, la onda de sonido se muestrea 44 100 veces por segundo. La presión de la onda para cada muestreo se mide y convierte a un número binario. En la reproducción, los números binarios se leen y emplean para construir la onda original.

PREGUNTAS

1. ¿Por qué las ondas de sonido se caracterizan como longitudinales?
2. Si un reloj de alarma se coloca en un buen vacío y luego se activa, no se escucha. Explique.
3. Un determinador sónico es un aparato que determina la distancia a un objeto al enviar un pulso de sonido ultrasónico y medir cuánto tarda la onda en regresar después de reflejarse desde el objeto. Por lo general, estos aparatos no pueden detectar de modo confiable un objeto que se encuentre a menos de medio metro del detector. ¿Por qué es esto?
4. Una amiga sentada en su auto a cierta distancia en una carretera, hace una seña a una persona y al mismo tiempo hace sonar el claxon de su auto. ¿A qué distancia debe estar ella para que la perso-

Materiał chroniony prawem autorskim

na calcule la rapidez del sonido a dos cifras significativas, al medir el tiempo que tarda el sonido en llegar a la persona?

5. Si la longitud de onda del sonido se reduce en un factor de 2, ¿qué ocurre a su frecuencia? ¿y a su rapidez?

6. Al escuchar una banda u orquesta, ¿cómo se puede determinar que la rapidez del sonido es igual para todas las frecuencias?

7. En el ejemplo 17.3, encontramos que una fuente puntual con una potencia de salida de 80 W produce sonido con una intensidad de 1.00×10^{-8} W/m^2, que corresponde a 40 dB, a una distancia de unas 16 millas (26 km). ¿Por qué se supone que no se puede escuchar un concierto de rock que se presenta a 16 millas de distancia? (Véase la tabla 17.2.)

8. Si se triplica la distancia desde una fuente puntual, ¿en qué factor disminuye la intensidad?

9. *El evento de Tunguska.* El 30 de junio de 1908, un meteoro se incendió y explotó en la atmósfera por encima del río Tunguska, en el valle de Siberia. Derribó árboles en miles de kilómetros cuadrados e inició un incendio forestal, pero aparentemente no ocasionó pérdidas humanas. Un testigo sentado a la entrada de su casa, fuera de la zona de árboles caídos, recordaba eventos en el siguiente orden: Vio una luz que se movía en el cielo, más brillante que el Sol y que descendía a un ángulo bajo en el horizonte. Sintió que la cara (de él) se le calentaba y que el suelo temblaba. Un agente invisible lo levantó, pero de inmediato lo dejó caer más o menos un metro más lejos de donde había estado la luz. Escuchó un estruendo muy fuerte y prolongado. Sugiera una explicación para estas observaciones y para el orden en las que ocurrieron.

10. Explique cómo se usa el efecto Doppler con microondas para determinar la rapidez de un automóvil.

11. Explique lo que ocurre a la frecuencia del eco de un claxon cuando pasamos en un vehículo hacia la pared de un cañón. ¿Qué le pasa a la frecuencia cuando nos alejamos de la pared?

12. De los siguientes sonidos, ¿cuál es más probable que tenga un nivel de sonido de 60 dB: un concierto de rock, el dar vuelta a la página de un libro, una conversación normal o una multitud que lanza vítores en un juego de fútbol?

13. Estime el nivel de decibeles de cada uno de los sonidos de la pregunta anterior.

14. Un sistema de estrellas binarias está formado por dos estrellas que giran alrededor del centro común de masa. Si observamos la luz que nos llega de una de estas estrellas cuando hace una revolución completa, ¿qué pronostica el efecto Doppler que ocurrirá a esta luz?

15. ¿Cómo puede un objeto moverse con respecto a un observador para que el sonido del mismo no cambie en frecuencia?

16. Suponga que sopla viento. ¿Causa esto un efecto Doppler para el sonido que se propague en el aire? ¿Es como una fuente en movimiento o un observador en movimiento?

17. ¿Por qué no es posible usar sonar (ondas de sonido) para determinar la rapidez de un objeto que se desplace con más rapidez que la del sonido?

18. ¿Por qué hay tanto silencio después de una nevada?

19. ¿Por qué es menor la intensidad de un eco que la del sonido original?

20. Un altavoz construido en la pared exterior de un avión produce un estallido de gran amplitud a 200 Hz, luego un estallido a 300 Hz y luego un estallido a 400 Hz, todo mientras el avión vuela con más rapidez que la del sonido. Describa cualitativamente lo que una observadora escucha si ella está frente al avión, cerca de su trayectoria de vuelo. ¿Qué pasaría si? ¿Qué escuchará el observador si el piloto usa el altavoz para decir "¿Cómo estás?

21. En varios casos, se ha encontrado que una estrella cercana tiene un planeta de 0gran tamaño que gira en órbita alrededor de ella, aun cuando el planeta podría no ser visto. Usando las ideas de un sistema que gira alrededor de su centro de masa y del corrimiento Doppler para luz (que es en varias formas semejante al efecto Doppler para el sonido), explique la forma en que un astrónomo podría determinar la presencia del planeta invisible.

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, difícil = solución guiada con sugerencias disponibles en http://www.pse6.com

= use computadora para resolver el problema = problemas numéricos y simbólicos por pares

Sección 17.1 Rapidez de las ondas de sonido

1. Suponga que usted escucha un trueno 16.2 s después de ver el relámpago respectivo. La rapidez de las ondas de sonido en el aire es de 343 m/s, y la de la luz es 3.00×10^8 m/s. ¿Qué tan lejos está de donde se produjo el relámpago?

2. Encuentre la rapidez del sonido en Mercurio, que tiene un módulo de volumen de aproximadamente 2.80×10^{10} N/m^2 y una densidad de 13 600 kg/m^3.

3. Una maceta cae de un balcón de 20.0 m sobre la banqueta y cae hacia un desprevenido hombre de 1.75 m de estatura que está de pie. ¿Qué tan cerca de la banqueta puede caer la maceta antes que sea demasiado tarde para que un grito de aviso desde el balcón llegue a tiempo al hombre? Suponga que el hombre que está en la banqueta necesita 0.300 s para responder al grito de aviso.

4. La rapidez del sonido en aire (en m/s) depende de la temperatura de acuerdo con la expresión aproximada

$$v = 331.5 + 0.6077T_C$$

donde T_C es la temperatura Celsius. En aire seco, la temperatura disminuye alrededor de 1°C por cada 150 m de elevación en altitud. (a) Suponiendo que este cambio es constante hasta una altitud de 9 000 m, ¿cuánto tardará el sonido de un avión que vuela a 9 000 m para llegar al suelo en un día cuando la temperatura

Materiał chroniony prawem autorskim

del suelo es 30°C? **¿Qué pasaría si?** Compare esto con el intervalo necesario si el aire fuera de 30°C constantes. ¿Cuál intervalo es más largo?

5. Un vaquero está de pie en terreno horizontal entre dos acantilados verticales paralelos. No está a la mitad entre los acantilados. Dispara una bala y escucha sus ecos. El segundo eco llega 1.92 s después del primero y 1.47 s antes que el tercero. Considere sólo el sonido que se desplaza paralelo al suelo y que se refleja de los acantilados. Tome la rapidez del sonido como 340 m/s. (a) ¿Cuál es la distancia entre los acantilados? (b) **¿Qué pasaría si?** Si él puede escuchar un cuarto eco, ¿cuánto tiempo llegará después del tercer eco?

6. Un avión de rescate vuela horizontalmente a una rapidez constante en busca de un bote en peligro. Cuando el avión está directamente sobre el bote, la tripulación de éste hace sonar un claxon. Para cuando el detector de sonido del avión capta el sonido del claxon, el avión ha avanzado una distancia igual a la mitad de su altitud sobre el océano. Si el sonido tarda 2.00 s en llegar al avión, determine (a) la rapidez del avión y (b) su altitud. Tome la rapidez del sonido como 343 m/s.

Sección 17.2 Ondas de sonido periódicas

Nota: Use los siguientes valores según sea necesario, a menos que se indique de otra forma: la densidad de equilibrio del aire a 20°C es $\rho = 1.20\ \text{kg/m}^3$. La rapidez del sonido en aire es $v = 343\ \text{m/s}$. Las variaciones de presión ΔP se miden con respecto a la presión atmosférica, $1.013 \times 10^5\ \text{N/m}^2$. El problema 70 del capítulo 2 también se puede asignar con esta sección.

7. Un murciélago (figura P17.7) puede detectar objetos muy pequeños, por ejemplo un insecto cuya longitud sea aproximadamente igual a una longitud de onda del sonido que emite el murciélago. Si un murciélago emite chirridos a una frecuencia de 60.0 kHz, y si la rapidez del sonido en aire es de 340 m/s, ¿cuál es el insecto más pequeño que puede detectar el murciélago?

Jim McDonald/Visuals Unlimited

Figura P17.7 Problemas 7 y 60.

8. Una medida ultrasónica usa frecuencias arriba de 20 MHz para determinar dimensiones de estructuras como son edificios. Hace esto al emitir un pulso de ultrasonido en el aire y luego mide el tiempo para que un eco regrese desde una superficie reflectora cuya distancia ha de medirse. La distancia se exhibe en una salida digital. Para una medida que emite un pulso de ultrasonido con una frecuencia de 22.0 MHz, (a) ¿Cuál es la distancia a un objeto desde el cual el pulso de eco regresa después de 24.0 ms cuando la temperatura del aire es de 26°C? (b) ¿Cuál debe ser la duración del pulso emitido si debe incluir 10 ciclos de la onda ultrasónica? (c) ¿Cuál es la longitud espacial de ese pulso?

9. Se utiliza ultrasonido para imágenes de diagnóstico y para terapia. Para diagnósticos, pulsos cortos de ultrasonido se hacen pasar por el cuerpo del paciente. Se registra el eco reflejado por una estructura de interés, y a partir del tiempo de retardo del eco se puede determinar la distancia a la estructura. Un solo transductor emite y detecta el ultrasonido. Se obtiene una imagen de la estructura al reducir los datos con una computadora. Con sonido de baja intensidad, esta técnica es no agresiva e inofensiva. Se utiliza para examinar fetos, tumores, aneurismas, cálculos biliares y muchas otras estructuras. Se emplea una unidad de ultrasonido Doppler para estudiar la circulación sanguínea y el funcionamiento del corazón. Para obtener detalles, la longitud de onda del ultrasonido reflejado debe ser pequeña en comparación con el tamaño del objeto que refleje la onda. Por esta razón, se emplean frecuencias en la escala de 1.00 a 20.0 MHz. ¿Cuál es la escala de longitudes de onda correspondientes a este margen de frecuencias? La rapidez del ultrasonido en tejido humano es de unos 1500 m/s (casi igual que la rapidez del sonido en agua).

10. Una onda de sonido en aire tiene una amplitud de presión igual a $4.00 \times 10^{-3}\ \text{N/m}^2$. Calcule la amplitud de desplazamiento de la onda a una frecuencia de 10.0 kHz.

11. Una onda senoidal de sonido está descrita por la función de onda de desplazamiento

$$S(x, t) = (2.00\ \mu\text{m}) \cos[(15.7\ \text{m}^{-1})x - (858\ \text{s}^{-1})t]$$

(a) Encuentre la amplitud, longitud de onda y rapidez de esta onda. (b) Determine el desplazamiento instantáneo desde el equilibrio de los elementos de aire en la posición $x = 0.050\,0$ m a $t = 3.00$ ms. (d) Determine la máxima rapidez del movimiento oscilatorio del elemento.

12. Cuando cierta onda de sonido se desplaza en aire, produce variaciones de presión (arriba y abajo de la presión atmosférica) dada por $\Delta P = 1.27\ \text{sen}(\pi x - 340\pi t)$ en unidades del SI. Encuentre (a) la amplitud de las variaciones de presión, (b) la frecuencia, (c) la longitud de onda en aire y (d) la rapidez de la onda de sonido.

13. Escriba una expresión que describa la variación de presión como una función de la posición y del tiempo para una onda senoidal de sonido en aire, si $\lambda = 0.100$ m y $\Delta P_{\text{máx}} = 0.200\ \text{N/m}^2$.

14. Escriba la función que describe la onda de desplazamiento correspondiente a la onda de presión del problema 13.

15. Un experimentador desea generar en aire una onda de sonido que tenga una amplitud de desplazamiento de 5.50×10^{-6} m. La amplitud de presión ha de estar limitada a $0.840\ \text{N/m}^2$. ¿Cuál es la mínima longitud de onda que puede tener la onda de sonido?

Materiał chroniony prawem autorskim

16. El esfuerzo de tensión en una gruesa barra de cobre es 99.5% de su límite elástico de ruptura de 13.0×10^{10} N/m². Si una onda de sonido de 500 Hz se transmite por el material, (a) ¿qué amplitud de desplazamiento hará que se rompa la barra? (b) ¿cuál es la rapidez máxima de los elementos del cobre en este momento? (c) ¿Cuál es la intensidad del sonido en la barra?

17. Demuestre que se propagan ondas de sonido con una rapidez dada por la ecuación 17.1. Proceda como sigue. En la figura 17.3, considere una capa delgada cilíndrica de aire en el cilindro, con área A de cara y grosor Δx. Trace un diagrama de cuerpo libre de esta capa delgada. Demuestre que $\Delta F_x = ma_x$ implica que $-[\partial(\Delta P)/\partial x]A\,\Delta x = \rho A\,\Delta x(\partial^2 s/\partial t^2)$. Al sustituir $\Delta P = -B(\partial s/\partial x)$, obtenga la ecuación de onda para el sonido, $(B/\rho)(\partial^2 s/\partial x^2) = (\partial^2 s/\partial t^2)$. Para un físico matemático, esta ecuación demuestra la existencia de ondas de sonido y determina su rapidez. Como estudiante de física, el lector debe dar uno o dos pasos más. Sustituya en la ecuación de onda la solución de prueba $s(x, t) = s_{max} \cos(kx - \omega t)$. Demuestre que esta función satisface la ecuación de onda siempre que $\omega/k = \sqrt{B/\rho}$. Este resultado deja ver que existen ondas de sonido siempre que se muevan con la rapidez $v = f\lambda = (2\pi f)(\lambda/2\pi) = \omega/k = \sqrt{B/\rho}$.

Sección 17.3 Intensidad de ondas de sonido periódicas

18. El área de un tímpano común es alrededor de 5.00×10^{-5} m². Calcule la potencia del sonido que incide en un tímpano en (a) el umbral auditivo y (b) el umbral del dolor.

19. Calcule el nivel de sonido en decibeles de una onda de sonido que tiene una intensidad de 4.00 μW/m².

20. Una aspiradora produce sonido con un nivel medido de sonido de 70.0 dB. (a) ¿Cuál es la intensidad de este sonido en W/m²? (b) ¿Cuál es la amplitud de presión del sonido?

21. La intensidad de una onda de sonido a una distancia fija desde un altavoz que vibra a 1.00 kHz es 0.600 W/m². (a) Determine la intensidad si la frecuencia se aumenta a 2.50 kHz mientras que se mantiene una amplitud constante de desplazamiento. (b) Calcule la intensidad si la frecuencia se reduce a 0.500 kHz y se duplica la amplitud de desplazamiento.

22. La intensidad de una onda de sonido a una distancia fija desde un altavoz que vibra a una frecuencia f es I. (a) Determine la intensidad si la frecuencia se aumenta a f mientras que se mantiene una amplitud de desplazamiento constante. (b) Calcule la intensidad se la frecuencia se reduce a $f/2$ y se duplica la amplitud de desplazamiento.

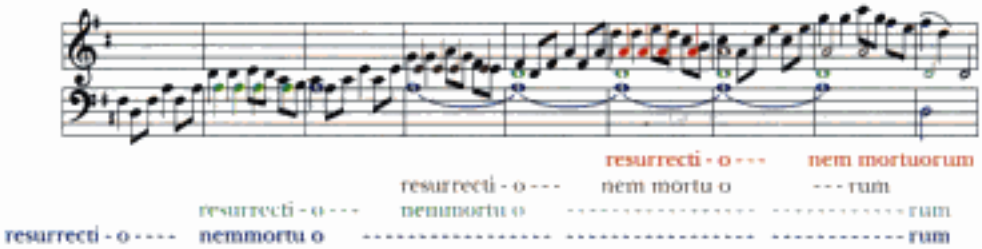
23. La melodía vocal más alta es en la *Misa en Si menor* de Johann Sebastian Bach. En la figura P17.23 aparece una porción de la partitura para la sección del Credo, número 9, barras 25 a 33. La sílaba repetitiva O en la frase "resurrectionem martuorum" (la resurrección de los muertos) pasa perfectamente de bajos a tenores a altos a primeras sopranos, como estafeta en una carrera de relevos. Cada voz lleva una melodía en una carrera de una octava o más. Juntos la llevarí de Re abajo de Do mayor a La arriba del Do alto de un tenor. En tono de concierto, estas notas son ahora frecuencias asignadas de 146.8 Hz y 880.0 Hz. (a) Hállense las longitudes de onda de las notas inicial y final. (b) Suponga que el coro canta la melodía con un nivel uniforme de sonido de 75.0 dB. Encuéntrense las amplitudes de presión de las notas inicial y final. (c) Encuentre las amplitudes de desplazamiento de las notas inicial y final. (d) **¿Qué pasaría si?** En la época de Bach, antes de la invención del diapasón, las frecuencias se asignaban a notas como materia de comodidad local inmediata. Suponga que la melodía que subía de tono se cantaba empezando de 134.3 Hz y terminaba en 804.9 Hz. ¿Cómo cambiarían las respuestas a las partes de la (a) a la (c)?

24. El tubo descrito en la figura 17.2 está lleno de aire a 20°C y presión de equilibrio de 1 atm. El diámetro del tubo es de 8.00 cm. El émbolo es movido a una frecuencia de 600 Hz con una amplitud de 0.120 cm. ¿Qué potencia debe alimentarse para mantener la oscilación del émbolo?

25. En una pista cerrada se lleva a cabo un festival de patinaje sobre hielo para familias. Los patinadores actúan con música a un nivel de 80.0 dB, lo cual es demasiado fuerte para un bebé que llora a 75.0 dB. (a) ¿Qué intensidad total de sonido lo rodea? (b) ¿Cuál es el nivel combinado de sonido?

26. Considere ondas de sonido senoidales que se propagan en estos tres medios diferentes: aire a 0°C, agua y hierro. Utilice densidades y magnitudes de velocidad de las tablas 14.1 y 17.1. Cada onda tiene la misma intensidad I_0 y la misma frecuencia angular ω_0. (a) Compare los valores de la longitud de onda en los tres medios. (b) Compare los valores de la amplitud de desplazamiento en los tres medios. (c) Compare los valores de la amplitud de presión en los tres medios. (d) Para valores de $\omega_0 = 2\,000\,\pi$ rad/s e $I_0 = 1.00 \times 10^{-6}$ W/m², evalúe la longitud de onda, la amplitud de desplazamiento y la amplitud de presión en cada uno de los tres medios.

27. La potencia de salida de cierto sistema de altavoces es de 6.00 W. Suponga que emite igualmente en todas direcciones. (a) ¿Dentro de qué distancia del altavoz es que el sonido causa dolor al oído? (b) ¿A qué distancia del altavoz es que el sonido sería apenas audible?


resurrecti - o - - -
nem mortuorum
resurrecti - o - - -
nem mortu o
- - - rum
resurrecti - o - - -
nemmortu o
- - - -

28. Demuestre que la diferencia entre niveles de decibeles β_1 y β_2 de un sonido está relacionada con la razón entre las distancias r_1 y r_2, desde la fuente de sonido, por

$$\beta_2 - \beta_1 = 20 \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

29. Una carga de fuegos artificiales se hace detonar a muchos metros sobre el suelo. A una distancia de 400 m desde la explosión, la presión acústica llega a un máximo de 10.0 N/m². Suponga que la rapidez del sonido es constante a 343 m/s en la atmósfera sobre la región considerada, que el suelo absorbe todo el sonido que sobre él cae, y que el aire absorbe la energía del sonido como se describe a razón de 7.00 dB/km. ¿Cuál es el nivel de sonido (en dB) a 4.00 km de la explosión?

30. Un altavoz se coloca entre dos observadores que están a 110 m uno de otro, a lo largo de la línea que los une. Si un observador registra el nivel de sonido de 60.0 dB y el otro registra un nivel de sonido de 80.0 dB, ¿a qué distancia está el altavoz de cada observador?

31. Dos pequeños altavoces emiten ondas de sonido de diferentes frecuencias. El altavoz *A* tiene una salida de 1.00 mW, y el altavoz *B* tiene una salida de 1.50 mW. Determine el nivel de sonido (en dB) en el punto *C* (figura P17.31) si (a) sólo el altavoz *A* emite sonido, (b) sólo el altavoz *B* emite sonido, y (c) ambos altavoces emiten sonido.

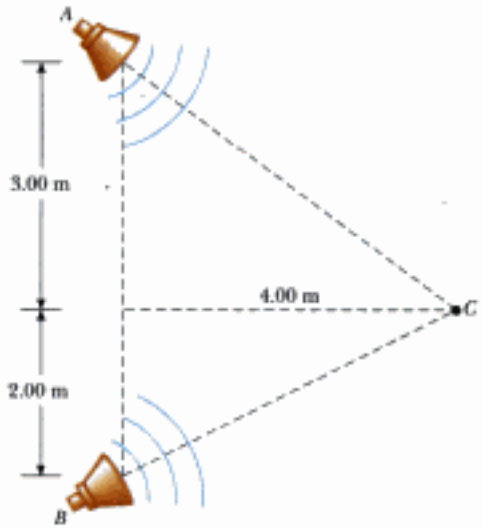


Figura P17.31

32. Un martillo neumático, operado continuamente en una construcción, se comporta como una fuente puntual de ondas de sonido esféricas. Una supervisora de construcción está de pie a 50.0 m al norte de esta fuente de sonido y empieza a caminar al oeste. ¿Qué distancia tiene que caminar para que la amplitud de la función de onda caiga en un factor de 2.00?

33. El nivel de sonido a una distancia de 3.00 m de una fuente es 120 dB. ¿A qué distancia será el nivel de sonido (a) 100 dB y (b) 10.0 dB?

34. Un cohete de fuegos artificiales explota a una altura de 100 m sobre el suelo. Un observador en tierra directamente abajo de la explosión experimenta una intensidad promedio de sonido de 7.00×10^{-2} W/m² durante 0.200 s. (a) ¿Cuál es la energía total del de sonido de la explosión? (b) ¿Cuál es el nivel de sonido en decibeles escuchado por el observador?

35. Cuando las personas cantan en la iglesia, el nivel de sonido en todas partes del interior es 101 dB. No se transmite sonido por las paredes, pero todas las ventanas y puertas están abiertas en una mañana de verano. Su área total es de 22.0 m². (a) ¿Cuánta energía sonora se irradia en 20.0 minutos? (b) Suponga que el suelo es un buen reflector y el sonido se irradia uniformemente en todas las direcciones horizontales y hacia arriba. Encuentre el nivel de sonido a 1 km de distancia.

36. El más pequeño cambio en el nivel de sonido que una persona puede distinguir es aproximadamente de 1 dB. Cuando una persona está de pie junto a su podadora de motor funcionando, ¿puede oír el ruido continuo de la podadora de su vecino? Realice un cálculo del orden de magnitud para justificar su respuesta, expresando los datos que mida o estime.

Sección 17.4 El efecto Doppler

37. Un tren se mueve paralelo a una carretera con una rapidez constante de 20.0 m/s. Un auto viaja en la misma dirección que el tren con una rapidez de 40.0 m/s. El claxon del auto suena a una frecuencia de 510 Hz, y el silbato del tren a una frecuencia de 320 Hz. (a) Cuando el auto está detrás del tren, ¿qué frecuencia escucha el ocupante del auto para el silbato del tren? (b) después que el auto pasa y está frente al tren, ¿qué frecuencia escucha un pasajero del tren para el claxon del auto?

38. Un matrimonio que espera un bebé está emocionado por escuchar los latidos del corazón de su hijo todavía no nacido, revelado por un detector ultrasónico de movimiento. Suponga que la pared ventricular del feto se mueve en movimiento armónico simple con una amplitud de 1.80 mm a una frecuencia de 115 por minuto. (a) Encuentre la rapidez lineal máxima de la pared del corazón. Suponga que el detector de movimiento en contacto con el abdomen de la madre produce un sonido a 2 000 000 Hz, que se desplazan por el tejido a 1.50 km/s. (b) Encuentre la máxima frecuencia a la que llega el sonido a la pared del corazón del bebé. (c) Encuentre la máxima frecuencia a la que el sonido reflejado es recibido por el detector de movimiento. Al "escuchar" electrónicamente ecos a una frecuencia diferente de la frecuencia de emisión, el detector de movimiento puede producir pitidos de sonido audible en sincronización con el pulso cardiaco del feto.

39. Al estar de pie en un crucero de peatones, una persona escucha una frecuencia de 560 Hz de la sirena de una ambulancia que se aproxima. Después que pasa la ambulancia, la frecuencia escuchada de la sirena es de 480 Hz. Determine la rapidez de la ambulancia a partir de estas observaciones.

40. Un bloque con un altavoz atornillado a él está conectado a un resorte que tiene constante de resorte $k = 20.0$ N/m como en la figura P17.40. La masa total del bloque y el altavoz es 5.00 kg, y la amplitud de movimiento de esta unidad es 0.500 m. (a) Si el altavoz emite ondas de sonido de 440 Hz de frecuencia, determine las frecuencias más alta y más baja escuchadas por la persona a la derecha del altavoz. (b) Si el máximo nivel de sonido escuchado por la persona es 60.0 dB cuando está más cerca del altavoz, a

Materiał chroniony prawem autorskim

1.00 m de distancia, ¿cuál es el nivel de sonido mínimo escuchado por el observador? Suponga que la rapidez del sonido es 343 m/s.

Figura P17.40

41. Un diapasón que vibra a 512 Hz, cae desde el reposo y acelera a 9.80 m/s². ¿A qué distancia abajo del punto en que fue soltado estará el diapasón cuando ondas de 485 Hz de frecuencia llegan al punto en que fue soltado? Tome la rapidez del sonido en aire como 340 m/s.

42. En los Juegos Olímpicos de Invierno, una atleta baja en su trineo por una pista cuando una campana situada precisamente sobre la pared de la rampa suena de manera continua. Cuando su trineo pasa la campana, ella escucha que baja la frecuencia de la campana por el intervalo musical llamado tercera menor. Esto es, la frecuencia que ella oye baja a cinco sextos de su valor original. (a) Encuentre la rapidez del sonido en el aire a la temperatura ambiente de −10.0°C. (b) Encuentre la rapidez de la atleta.

43. Una sirena montada en el techo de una estación de bomberos emite sonido a una frecuencia de 900 Hz. Un viento continuo está soplando con una rapidez de 15.0 m/s. Tomando la rapidez del sonido en el aire en calma como 343 m/s, encuentre la longitud de onda del sonido (a) viento arriba de la sirena y (b) viento abajo de la sirena. Los bomberos se aproximan a la sirena desde varias direcciones a 15.0 m/s. ¿Qué frecuencia escucha un bombero (c) si él o ella se aproxima desde una posición viento arriba, de modo que él o ella se mueve en la dirección en que el viento está soplando? (d) ¿si él o ella se aproxima desde una posición viento abajo y se mueve contra el viento?

44. El *Concorde* puede volar a 1.50 Mach, lo cual significa que la rapidez del avión es 1.50 veces la rapidez del sonido en el aire. ¿Cuál es el ángulo entre la dirección de propagación de la onda de choque y la dirección de la velocidad del avión?

45. Cuando partículas cargadas de alta energía se mueven por un medio transparente con una rapidez mayor que la de la luz en ese medio, se produce una onda de choque, u onda frontal. Este fenómeno recibe el nombre de *efecto Cerenkov*. Cuando un reactor nuclear está blindado por una gran masa de agua, la radiación Cerenkov se puede ver como una luz azul en la cercanía del núcleo del reactor, debido a los electrones de alta velocidad que se mueven en el agua. En un caso particular, la radiación Cerenkov produce un frente de ondas con un semiángulo de vértice de 53.0°. Calcule la rapidez de los electrones en el agua. (La rapidez de la luz en el agua es 2.25×10^8 m/s.)

46. El lazo del látigo de un maestro de ceremonias de circo se mueve a 1.38 Mach (esto es, $v_S/v = 1.38$). ¿Qué ángulo forma la onda de choque en la dirección del movimiento del látigo?

47. Un avión supersónico que vuela a 3.00 Mach a una altitud de 20 000 m está directamente sobre una persona en el tiempo $t = 0$ como en la figura P17.47. (a) ¿Cuánto tiempo pasará antes que la persona encuentre la onda de choque? (b) ¿Dónde estará el avión cuando finalmente sea escuchado? (Suponga que la rapidez del sonido en aire es 335 m/s).

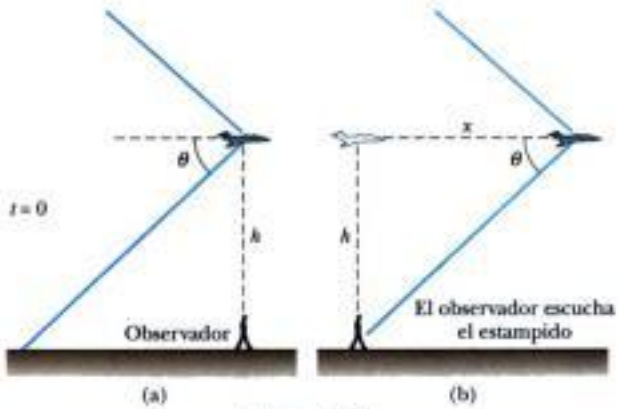


Figura P17.47

Sección 17.5 Grabación digital de sonido

Sección 17.6 Sonido en películas

48. Este problema representa una forma posible (pero no recomendada) de codificar presiones instantáneas en una onda de sonido en palabras digitales de 16 bits. El ejemplo 17.2 menciona que la amplitud de presión de un sonido de 120 dB es 28.7 N/m². Representemos esta variación de presión por el código digital 65 536. Representemos la variación de cero presión sobre la grabación por la palabra digital 0. Representemos otras presiones intermedias por palabras digitales de tamaño intermedio, en proporción directa a la presión. (a) ¿Qué palabra digital representaría la máxima presión en un sonido de 40 dB? (b) Explique por qué este esquema funciona mal para sonidos suaves. (c) Explique la forma en que este esquema de codificación recortaría la mitad de la onda de cualquier sonido, haciendo caso omiso de la forma real de la onda y convirtiéndola en una fila de ceros. Al introducir esquinas agudas en cada onda grabada, este esquema de codificación haría que todo sonara como un zumbador o chicharra.

49. Sólo se requieren dos canales de grabación para dar la ilusión de que un sonido proviene de cualquier punto situado detrás de dos altavoces de un sistema de sonido estereofónico. Si la misma señal se graba en ambos canales, una persona que escucha lo oirá proveniente de una sola dirección a media distancia entre los dos altavoces. Esta ilusión de "orquesta fantasma" se puede oír en la grabación original de dos canales de Broadway de la canción "Do-Re-Mi" de *The Sound of Music* (Columbia Records KOS 2020). Cada uno de los ocho cantantes se puede escuchar en un lugar diferente entre los altavoces. Todos los que escuchan con capacidad normal estarán de acuerdo en sus lugares. El cerebro puede captar la dirección de un sonido al captar qué tanto tiempo antes se escucha un sonido en un oído que en el otro. Modele el lector

Materiał chroniony prawem autorskim

sus oídos como dos detectores situados a 19.0 cm uno del otro en una pantalla plana. Si un clic de una fuente distante se escucha 210 μs antes en el oído izquierdo que en el derecho, ¿de qué dirección parece originarse?

50. Suponga que un altavoz emite sonido igualmente en todas direcciones y produce sonido con un nivel de 103 dB a una distancia de 1.60 m de su centro. (a) Encuentre su potencia de salida del sonido. (b) Si el vendedor dice que le da 150 W por canal, se refiere a la potencia de entrada eléctrica al altavoz. Encuentre la eficiencia del altavoz, es decir, la parte de potencia de entrada que se convierte en potencia útil de salida.

Problemas adicionales

51. Una parte grande de tribunas no ocupadas en un estadio de fútbol tiene asientos sólidos y escaleras. Una persona de pie en el campo frente a las tribunas, dispara una pistola de arranque o hace sonar dos tablas una vez. El pulso de sonido que produce no tiene frecuencia definida ni longitud de onda. El sonido que escucha reflejado de las tribunas tiene una frecuencia identificable y puede sonarle como un breve pitido en una trompeta, o de un zumbador o chicharra. Tome en cuenta este sonido. Calcule estimaciones de orden de magnitud para esta frecuencia, longitud de onda y duración, con base en datos que especifique.

52. Muchos artistas cantan notas muy altas en ornamentos y cadencias *ad lib.* La nota más alta escrita para una cantante en una partitura publicada fue una nota Fa sostenida arriba de la Do alta, 1.480 kHz, para Zerbinetta en la versión original de la ópera *Ariadne auf Naxos* de Richard Strauss. (a) Encuentre la longitud de onda de este sonido en aire. (b) Suponga que las personas en la cuarta fila de asientos escuchan esta nota con un nivel de 81.0 dB. Encuentre la amplitud de desplazamiento del sonido. (c) **¿Qué pasaría si?** Debido a quejas, Strauss más tarde trasladó la nota a una Fa arriba de la Do alta, 1.397 kHz. ¿En qué incremento cambió la longitud de onda?

53. Una onda de sonido en un cilindro está descrita por las ecuaciones 17.2 a la 17.4. Demuestre que $\Delta P = \pm \rho v \omega \sqrt{s_{\text{máx}}^2 - s^2}$.

54. En una mañana de sábado, camionetas y furgonetas sport multiusos que llevan basura al basurero de una ciudad, forman una procesión casi continua en un camino vecinal, todos ellos transitando a 19.7 m/s. De una dirección, dos camiones llegan al basurero cada 3 minutos. Un ciclista también circula hacia el basurero, a 4.47 m/s. (a) ¿Con qué frecuencia lo pasan los camiones? (b) **¿Qué pasaría si?** Una colina no hace que los camiones pierdan velocidad, pero la rapidez del ciclista fuera de condición física cae a 1.56 m/s. ¿Con qué frecuencia lo pasan ahora los ruidosos, malolientes, ineficientes e imprudentes camiones de la basura?

55. Bajo el lecho oceánico está una capa de basalto que constituye la corteza, o capa superior, de la Tierra en esa región. Abajo de esta capa se encuentra roca periodotita más densa que forma el manto de la Tierra. La frontera entre estas dos capas se llama discontinuidad Mohorovicic ("Moho" para brevedad). Si una carga explosiva se hace estallar en la superficie del basalto, genera una onda sísmica que se refleja saliendo de la Moho. Si la rapidez de esta onda en basalto es de 6.50 km/s y el tiempo de recorrido de ida y vuelta es de 1.85 s, ¿cuál es el grosor de esta corteza oceánica?

56. Para cierto tipo de acero, el esfuerzo siempre es proporcional a la deformación con un módulo de elasticidad como se ve en la tabla 12.1. El acero tiene la densidad que aparece para el hierro en la tabla 14.1. Falla al doblarlo de modo permanente si se somete a un esfuerzo de compresión mayor a su límite de fluencia $\sigma_y = 400$ MPa. Una varilla de 80.0 cm de largo, hecha de este acero, se dispara a 12.0 m/s directamente a una pared muy dura, o a otra varilla idéntica que se mueve en dirección opuesta. (a) La rapidez de una onda de compresión unidimensional que se mueve junto a la varilla está dada por $\sqrt{Y/\rho}$, donde ρ es la densidad e Y es el módulo de elasticidad para la varilla. Calcule esta rapidez. (b) Después que el extremo delantero de la varilla choca con la pared y se detiene, el extremo trasero de la varilla sigue en movimiento, como lo describe la primera ley de Newton, hasta que es detenido por exceso de presión de una onda de sonido que regresa por la varilla. ¿Cuánto tiempo transcurre entre el momento en que el extremo trasero de la varilla recibe el mensaje de que debe detenerse? (c) ¿Qué distancia se ha movido el extremo trasero de la varilla en este tiempo? (d) la deformación en la varilla y (e) el esfuerzo. (f) Si no debe fallar, demuestre que la máxima rapidez de impacto que puede tener una varilla está dada por la expresión $\sigma_y/\sqrt{\rho Y}$.

57. Para permitir la medición de la rapidez de ella, una paracaidista lleva un zumbador que emite un tono continuo a 1 800 Hz. Un amigo en tierra, en el lugar de aterrizaje directamente abajo, escucha el sonido amplificado que él recibe. Suponga que el aire está en calma y que la rapidez del sonido es 343 m/s, independiente de la altitud. Mientras la paracaidista cae a su velocidad terminal, el amigo de ella en tierra recibe ondas de 2150 Hz de frecuencia. (a) ¿Cuál es la rapidez de descenso de la paracaidista? (b) **¿Qué pasaría si?** Suponga que la paracaidista puede escuchar el sonido del zumbador reflejado desde el suelo. ¿Qué frecuencia recibe ella?

58. El silbato de un tren ($f = 400$ Hz) suena más alto o más bajo en frecuencia dependiendo de si se aproxima o se aleja. (a) Demuestre que la diferencia en frecuencia entre el silbato de tren que se aproxima y se aleja es

$$\Delta f = \frac{2u/v}{1 - u^2/v^2} f$$

donde u es la rapidez del tren y v la rapidez del sonido. (b) Calcule esta diferencia para un tren que se mueve a una rapidez de 130 km/h. Tome la rapidez del sonido en aire como de 340 m/s.

59. Dos barcos navegan a lo largo de una costa rumbo al Este. El que va detrás tiene una rapidez de 64.0 km/h, con respecto a un punto de observación en tierra, y el barco que va delante tiene una rapidez de 45.0 km/h con respecto a ese punto. Los dos barcos están en una región del océano donde la corriente se mueve uniformemente al oeste a 10.0 km/h. El barco que va detrás transmite una señal de sonar a una frecuencia de 1 200.0 Hz. ¿Qué frecuencia es observada por el barco que va delante? (Utilice 1 520 m/s como la velocidad del sonido en agua de mar).

60. Un murciélago, que se mueve a 5.00 m/s, persigue a un insecto volador (figura P17.7). Si el murciélago emite un chirrido de 40.0 kHz y recibe un eco de 40.4 kHz, ¿a qué rapidez se mueve el insecto hacia el murciélago o se aleja de éste? (Tome la rapidez del sonido en aire como $v = 340$ m/s).

61. Un avión supersónico vuela paralelamente al suelo. Cuando el avión está directamente sobre un observador, éste ve un cohete que es disparado desde el avión. Diez segundos más tarde el observador escucha el estampido sónico, seguido 2.80 s después por

Materiał chroniony prawem autorskim

el sonido del motor del cohete. ¿Cuál es el número Mach del avión?

62. Una patrulla de policía viaja al Este a 40.0 m/s a lo largo de un camino recto, alcanzando a un auto que va delante y se mueve al Este a 30.0 m/s. La patrulla tiene una sirena que funciona mal y está atorada a 1 000 Hz. (a) Dibuje el aspecto de los frentes de onda del sonido producido por la sirena. Muestre los frentes de onda al este y al oeste de la patrulla. (b) ¿Cuál sería la longitud de onda en aire del sonido de la sirena si la patrulla estuviera en reposo? (c) ¿Cuál es la longitud de onda enfrente de la patrulla? (d) ¿Cuál es detrás de la patrulla? (e) ¿Cuál es la frecuencia que escucha el conductor del auto perseguido?

63. La rapidez de una onda unidimensional de compresión que se desplaza a lo largo de una delgada barra de cobre, es de 3.56 km/s. Una barra de cobre recibe un fuerte golpe de compresión en un extremo. El sonido del golpe, que se desplaza en aire a 0°C, alcanza el extremo de la barra 6.40 ms después que el sonido transmitido por el metal de la barra. ¿Cuál es la longitud de la barra?

64. Un avión de reacción vuela hacia una mayor altitud a una rapidez constante de 1963 m/s en una dirección que forma un ángulo θ con la horizontal (figura P17.64). Un observador en tierra escucha el avión por primera vez cuando está directamente sobre él. Determine el valor de θ si la rapidez del sonido en aire es 340 m/s.

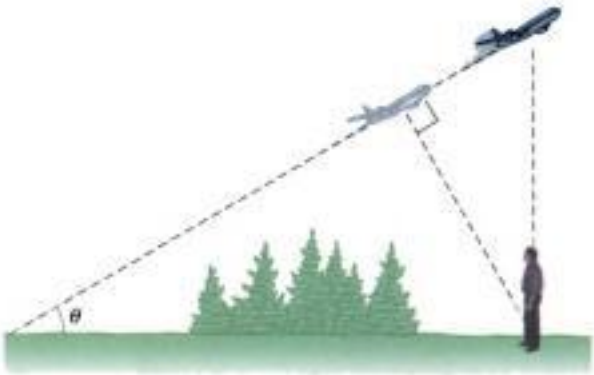


Figura P17.64

65. Un meteorito del tamaño de un camión entra a la atmósfera de la Tierra a una rapidez de 20.0 km/s y no reduce su velocidad suficientemente antes de entrar al océano. (a) ¿Cuál es el ángulo Mach de la onda de choque desde el meteorito en la atmósfera? (Utilice 331 m/s como la rapidez del sonido.) (b) Suponiendo que el meteorito resista el impacto con la superficie del mar, ¿cuál es el ángulo Mach (inicial) de la onda de choque que el meteorito produce en el agua? (Use la rapidez de onda para agua de mar que aparece en la tabla 17.1.)

66. Una carretera interestatal ha sido construida cruzando un barrio pobre en una ciudad. En la tarde, el nivel de sonido en un cuarto rentado es de 80.0 dB, cuando 100 autos pasan frente a la ventana en un minuto. Por la noche, cuando el inquilino está trabajando en una fábrica, el volumen de tránsito es de sólo cinco autos por minuto. ¿Cuál es el promedio del nivel de sonido a altas horas de la noche?

67. Con métodos experimentales particulares, es posible producir y observar en una varilla larga delgada tanto una onda longitudinal, como una onda transversal cuya rapidez depende principalmente de la tensión en la varilla. La rapidez de la onda longitudinal está determinada por el módulo de Young y la densidad del material como $\sqrt{Y/\rho}$. La onda transversal se puede modelar como una onda en una cuerda estirada. Una varilla de metal particular mide 150 cm de largo y tiene un radio de 0.200 cm y una masa de 50.9 g. El módulo de elasticidad para el material es de 6.80×10^{10} N/m². ¿Cuál debe ser la tensión en la varilla si la razón entre la rapidez de ondas longitudinales y la rapidez de ondas transversales es de 8.00?

68. Una sirena crea sonido con un nivel β a una distancia d desde el altavoz. La sirena es accionada por una batería que entrega una energía total E. Represente por e la eficiencia de la sirena. (Esto es, e es igual a la energía de salida del sonido dividida entre la energía alimentada.) Determine el tiempo total que la sirena puede sonar.

69. La ecuación Doppler presentada en el texto es válida cuando el movimiento entre el observador y la fuente se presenta en línea recta, de modo que la fuente y el observador estén directamente moviéndose uno hacia el otro o alejándose entre sí. Si esta restricción se relaja, se debe usar la ecuación Doppler más general

$$f' = \left(\frac{v + v_O \cos\theta_O}{v - v_S \cos\theta_S}\right) f$$

donde θ_O y θ_S están definidos en la figura P17.69a. (a) Demuestre que si el observador y la fuente se alejan uno del otro, la ecuación precedente se reduce a la ecuación 17.13 con valores negativos para v_O y v_S. (b) Use la ecuación precedente para resolver el siguiente problema. Un tren viaja a una rapidez constante de 25.0 m/s hacia el crucero que se ilustra en la figura P17.69b. Un auto está detenido cerca del crucero, a 30.0 m de las vías. Si el silbato del tren emite una frecuencia de 500 Hz, ¿cuál es la frecuencia que escuchan los pasajeros del auto cuando el tren esté a 40.0 m del crucero? Tome la rapidez del sonido como 343 m/s.

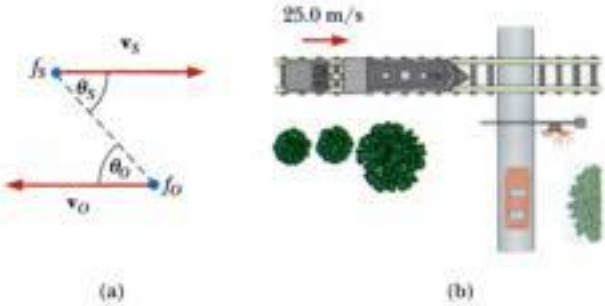


Figura P17.69

70. La ecuación 17.7 expresa que, a una distancia r desde una fuente puntual con potencia $\mathcal{P}_{\text{prom}}$, la intensidad de la onda es

$$I = \frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{4\pi r^2}$$

Estudie la figura 17.9 y demuestre que, a una distancia r directamente frente a una fuente puntual con potencia $\mathcal{P}$ que se mueve con rapidez constante v_S, la intensidad de la onda es

Materiał chroniony prawem autorskim

$$I = \frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{4\pi r^2}\left(\frac{v - v_{\text{Y}}}{v}\right)$$

71. Tres varillas metálicas están situadas una con respecto a la otra como se muestra en la figura P17.71, donde $L_1 + L_2 = L_3$. La rapidez del sonido en una varilla está dada por $v = \sqrt{Y/\rho}$, donde ρ es la densidad y Y es el módulo de elasticidad para la varilla. Los valores de la densidad y módulo de elasticidad para los tres materiales son $\rho_1 = 2.70 \times 10^3$ kg/m^3, $Y_1 = 7.00 \times 10^{10}$ N/m^2, $\rho_2 = 11.3 \times 10^3$ kg/m^3, $Y_2 = 1.60 \times 10^{10}$ N/m^2, $\rho_3 = 8.80 \times 10^3$ kg/m^3, $Y_3 = 11.0 \times 10^{10}$ N/m^2. (a) Si $L_3 = 1.50$ m, (a) Si $L_3 = 1.50$ m, ¿cuál debe ser la razón L_1/L_2 si la onda de sonido ha de recorrer las varillas 1 y 2 en el mismo tiempo que tarda en recorrer la varilla 3? (b) Si la frecuencia de la fuente es 4.00 kHz, determine la diferencia de fase entre la onda viajera a lo largo de las varillas 1 y 2 y la que viaja por la varilla 3.

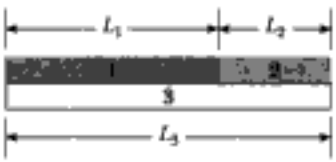


Figura P17.71

72. La longitud de onda más pequeña posible para una onda de sonido en aire es del orden de la distancia de separación entre moléculas de aire. Encuentre el orden de magnitud de la onda de sonido de más alta frecuencia en aire, suponiendo que la rapidez de una onda es 343 m/s, densidad 1.20 kg/m^3, y una masa molecular promedio de 4.82×10^{-26} kg.

Respuestas a las *preguntas rápidas*

17.1 (c) Aun cuando la rapidez de una onda está dada por el producto de su longitud de onda (a) y frecuencia (b), no es afectada por cambios en ninguna de éstas. La amplitud (d) de una onda de sonido determina el tamaño de las oscilaciones de los elementos de aire pero no afecta la rapidez de la onda en el aire.

17.2 (c) Como el fondo de la botella es una barrera rígida, el desplazamiento de los elementos de aire en el fondo es cero. Debido a que la variación de presión es mínima o máxima cuando el desplazamiento es cero, y el pulso se mueve hacia abajo, la variación de presión en el fondo es máxima.

17.3 (c) La trompeta de oído capta ondas de sonido del área grande de su abertura y las dirige hacia la oreja. La mayor parte del sonido en esta área grande no llegaría al oído en ausencia de la trompeta.

17.4 (b) El área grande del cuerpo de la guitarra pone en oscilación numerosos elementos de aire y permite que la energía salga del sistema mediante ondas mecánicas a una rapidez mucho mayor que de la delgada cuerda en vibración.

17.5 (c) El único parámetro que se suma directamente es la intensidad. Debido a la función logarítmica de la definición del nivel de sonido, los niveles de sonido no se pueden sumar directamente.

17.6 (b) El factor de 100 es dos potencias de diez. Por lo tanto, el logaritmo de 100 es 2, que multiplicado por 10 da 20 dB.

17.7 (e) La rapidez de onda no se puede cambiar al mover la fuente, de modo que (a) y (b) son incorrectos. La longitud de onda detectada es máxima en A, por lo cual (c) y (d) son incorrectos. La opción (f) es incorrecta porque la frecuencia detectada es más baja en la ubicación A.

17.8 (e) La intensidad del sonido aumenta porque el tren se mueve más cerca de la persona. Como el tren se mueve a velocidad constante, la variación de frecuencia Doppler permanece fija.

17.9 (b) El número Mach es la razón entre la rapidez del avión (que no cambia) y la rapidez del sonido, que es mayor en aire caliente que en frío. El denominador de esta razón aumenta mientras que el numerador permanece constante. Por lo tanto, la razón en su conjunto, el número Mach, disminuye.

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 18

Superposición y ondas estacionarias

▲ *El guitarrista Carlos Santana aprovecha las ondas estacionarias en cuerdas. Él cambia a una nota más alta en la guitarra al empujar las cuerdas contra los trastes en el diapasón o mástil, con lo cual se acortan las longitudes libres de las cuerdas que vibran. (Bettmann/Corbis)*

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

18.1 Superposición e interferencia

18.2 Ondas estacionarias

18.3 Ondas estacionarias en una cuerda fija en ambos extremos

18.4 Resonancia

18.5 Ondas estacionarias en columnas de aire

18.6 Ondas estacionarias en varillas y membranas

18.7 Batimientos: interferencia en el tiempo

18.8 Patrones de onda no sencidales

Materiał chroniony prawem autorskim

En los dos capítulos previos introdujimos el modelo de onda. Hemos visto que las ondas son muy diferentes a las partículas. Una partícula es de tamaño cero, mientras que una onda tiene un tamaño característico que es la longitud de onda. Otra diferencia importante entre ondas y partículas es que podemos explorar la posibilidad de que dos o más ondas se combinen en un punto en el mismo medio. Podemos combinar partículas para formar objetos más grandes, pero las partículas deben estar en lugares *diferentes*. En contraste, dos ondas pueden estar presentes en el mismo lugar, y en este capítulo exploramos las ramificaciones de esta posibilidad.

Cuando se combinan ondas, sólo pueden existir ciertas frecuencias permitidas en sistemas con condiciones en la frontera, es decir, las frecuencias están *cuantizadas*. La cuantificación es una noción que está en el corazón de la mecánica cuántica, tema que introducimos formalmente en el capítulo 18, Vol. II. Ahí demostramos que las ondas bajo condiciones en la frontera explican muchos de los fenómenos cuánticos. Para nuestros fines en este capítulo, la cuantificación hace posible que entendamos el comportamiento de una amplia variedad de instrumentos musicales que están basados en cuerdas y columnas de aire.

También consideramos la combinación de ondas que tienen frecuencias y longitudes de onda diferentes. Cuando interfieren dos ondas de sonido que tienen casi la misma frecuencia, escuchamos variaciones en la intensidad denominadas *batimientos*. La frecuencia de los batimientos corresponde a la rapidez de alternación entre interferencia constructiva y destructiva. Por último, veremos la forma en que se puede describir cualquier onda periódica no senoidal como una suma de funciones seno y coseno.

18.1 Superposición e interferencia

Numerosos e interesantes fenómenos en la naturaleza no pueden ser descritos por una sola onda viajera. En lugar de ello, es necesario analizar ondas complejas en términos de una combinación de ondas viajeras. Para analizar estas combinaciones de ondas, es posible hacer uso del **principio de superposición:**

Principio de superposición

Si dos o más ondas viajeras se mueven en un medio, el valor resultante de la función de onda en cualquier punto, es la suma algebraica de los valores de las funciones de onda de las ondas individuales.

Las ondas que obedecen este principio se llaman *ondas lineales*. En el caso de ondas mecánicas, las ondas lineales suelen caracterizarse por tener amplitudes mucho menores que sus longitudes de onda. Las ondas que violan el principio de superposición se denominan ondas no lineales y a veces se caracterizan por amplitudes grandes. En este libro trataremos sólo con ondas lineales.

Una consecuencia del principio de superposición es que **dos ondas viajeras pueden pasar una a través de la otra sin ser destruidas o alteradas.** Por ejemplo, cuando se lanzan dos piedras en un charco y llegan al agua en lugares diferentes, las ondas expansivas

Materiał chroniony prawem autorskim

Superposición de ondas senoidales

Apliquemos ahora el principio de superposición a dos ondas senoidales que se desplazan en la misma dirección en un medio lineal. Si las dos ondas se desplazan a la derecha y tienen la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud pero difieren en fase, podemos expresar sus funciones de onda individuales como

$$y_1 = A\,\text{sen}(kx - \omega t) \qquad y_2 = A\,\text{sen}(kx - \omega t + \phi)$$

donde, como es usual, $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi f$, y ϕ es la constante de fase, que estudiamos en la sección 16.2. Por lo tanto, la función de onda y resultante es

$$y = y_1 + y_2 = A[\text{sen}(kx - \omega t) + \text{sen}(kx - \omega t + \phi)]$$

Para simplificar esta expresión, usamos la identidad trigonométrica.

$$\text{sen}\, a + \text{sen}\, b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Si hacemos $a = kx - \omega t$ y $b = kx - \omega t + \phi$, encontramos que la función de onda y resultante se reduce a

$$y = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\text{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

Resultante de dos ondas viajeras senoidales

Este resultado tiene varias características importantes. La función de onda y resultante también es senoidal y tiene la misma frecuencia y longitud de onda que las individuales, porque la función seno incorpora los mismos valores de k y ω que aparecen en las funciones de onda originales. La amplitud de la onda resultante es $2A\cos(\phi/2)$, y su fase es $\phi/2$. Si la constante de fase ϕ es igual a 0, entonces $\cos(\phi/2) = \cos 0 = 1$, y la amplitud de la onda resultante es $2A$, es decir, el doble de amplitud de cualquiera de las ondas individuales. En este caso, se dice que las ondas están en todas partes *en fase* y por lo tanto se interfieren constructivamente. Esto es, las crestas y valles de las ondas individuales y_1 y y_2 se presentan en las mismas posiciones y se combinan para formar la curva roja y de amplitud $2A$ que se ve en la figura 18.4a. Como las ondas individuales están en fase, no se distinguen en la figura 18.4a, en donde aparecen como una sola curva azul. En general, la interfe-

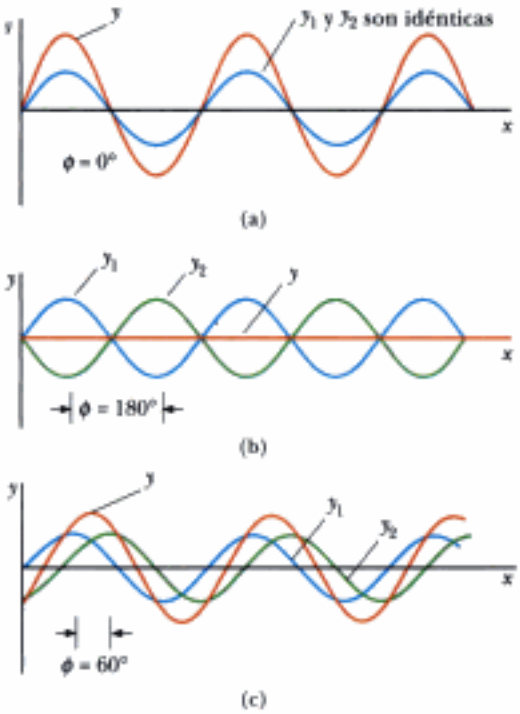


Figura activa 18.4 Superposición de dos ondas idénticas y_1 y y_2 (azul y verde) para dar una onda resultante (roja). (a) Cuando y_1 y y_2 están en fase, el resultado es interferencia constructiva. (b) Cuando y_1 y y_2 están π rad fuera de fase, el resultado es una interferencia destructiva. (c) Cuando el ángulo de fase tiene un valor que no sea 0 o π rad, la onda resultante y cae en algún punto entre los extremos que se muestran en (a) y (b).

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, usted podrá cambiar la relación de fase entre las ondas y observar la onda que representa la superposición.

Materiał chroniony prawem autorskim

rencia constructiva se presenta cuando $\cos(\phi/2) = \pm 1$. Esto es cierto, por ejemplo, cuando $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ rad, es decir, cuando ϕ es un múltiplo *par* de π.

Cuando ϕ es igual a π rad o a cualquier múltiplo *impar* de π, entonces $\cos(\phi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, y las crestas de una onda se presentan en las mismas posiciones que los valles de la segunda onda (figura 18.4b). En consecuencia, la onda resultante tiene *cero* amplitud en todas partes, como consecuencia de la interferencia destructiva. Por último, cuando la constante de fase tiene un valor arbitrario que no sea 0 o un múltiplo entero de π rad (figura 18.4c), la onda resultante tiene una amplitud cuyo valor está entre 0 y $2A$.

Interferencia de ondas de sonido

En la figura 18.5 se ilustra un sencillo aparato para demostrar la interferencia de ondas de sonido. El sonido de un altavoz S es introducido en un tubo en el punto P, donde hay una unión en forma de T. La mitad de la energía del sonido se desplaza en una dirección y la mitad en dirección opuesta. Por lo tanto, las ondas de sonido que llegan al receptor R pueden viajar a lo largo de cualquiera de estas trayectorias. La distancia a lo largo de cualquier trayectoria desde el altavoz al receptor se llama **longitud de trayectoria** r. La longitud de trayectoria inferior r_1 es fija, pero la longitud de trayectoria superior r_2 puede hacerse variar al deslizar el tubo en forma de U, que es semejante a la de un trombón deslizante. Cuando la diferencia en las longitudes de trayectoria $\Delta r = |r_2 - r_1|$ es cero o algún múltiplo entero de la longitud de onda λ (esto es $\Delta r = n\lambda$, donde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$), las dos ondas que llegan al receptor en cualquier instante están en fase e interfieren constructivamente, como se ilustra en la figura 18.4a. Para este caso, un máximo en la intensidad del sonido se detecta en el receptor. Si la longitud de trayectoria r_2 se ajusta de forma que la diferencia de trayectoria $\Delta r = \lambda/2, 3\lambda/2, \ldots, n\lambda/2$ (para n impar), las dos ondas están exactamente π rad, o 180°, fuera de fase en el receptor y por lo tanto se cancelan entre sí. En este caso de interferencia destructiva, no se detecta sonido en el receptor. Este sencillo experimento demuestra que una diferencia de fase puede aparecer entre dos ondas generadas por la misma fuente cuando se desplazan a lo largo de trayectorias de longitudes desiguales. Este importante fenómeno será indispensable en nuestra investigación de la interferencia de ondas de luz en el capítulo 15 del volumen II.

Es útil a veces expresar la diferencia de trayectoria en términos del ángulo de fase ϕ entre las dos ondas. Como la diferencia de trayectoria de una longitud de onda corresponde a un ángulo de fase de 2π rad, obtenemos la razón $\phi/2\pi = \Delta r/\lambda$ o sea

Relación entre diferencia de trayectoria y ángulo de fase (18.1)

$$\Delta r = \frac{\phi}{2\pi}\lambda \tag{18.1}$$

Con el uso de la noción de diferencia de trayectoria, podemos expresar en una forma diferente nuestras condiciones para interferencia constructiva y destructiva. Si la diferencia de trayectoria es cualquier múltiplo par de $\lambda/2$, entonces el ángulo de fase $\phi = 2n\pi$, donde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, y la interferencia es constructiva. Para diferencias de trayectoria de múltiples impares de $\lambda/2$, $\phi = (2n + 1)\pi$, donde $n = 0, 1, 2, \ldots$, y la interferencia es destructiva. En consecuencia, tenemos las condiciones

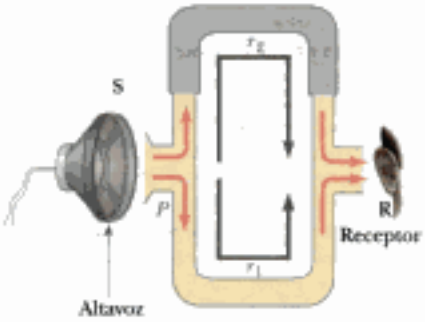


Figura 18.5 Sistema acústico para demostrar interferencia de ondas de sonido. Una onda de sonido del altavoz (S) se propaga entrando en el tubo y se divide en dos partes en el punto P. Las dos ondas, que se combinan en el lado opuesto, son detectadas en el receptor (R). La longitud de trayectoria superior r_2 se puede hacer variar al deslizar la sección superior.

Materiał chroniony prawem autorskim

Figura 18.7 Dos altavoces emiten ondas de sonido uno hacia el otro. Cuando se traslapan, ondas idénticas que se desplazan en direcciones opuestas, se combinarán para formar ondas estacionarias.

direcciones opuestas en el mismo medio, como en la figura 18.7. Estas ondas se combinan de acuerdo con el principio de superposición.

Podemos analizar esta situación al considerar funciones de onda para dos ondas senoidales transversales que tengan la misma amplitud, frecuencia y longitud de onda, pero que se desplazan en direcciones opuestas en el mismo medio:

$$y_1 = A\,\text{sen}(kx - \omega t) \qquad y_2 = A\,\text{sen}(kx + \omega t)$$

donde y_1 representa una onda que se desplaza en la dirección $+x$ y y_2 representa una que se desplaza en la dirección $-x$. La suma de estas dos funciones da la función de onda y resultante:

$$y = y_1 + y_2 = A\,\text{sen}(kx - \omega t) + A\,\text{sen}(kx + \omega t)$$

Cuando usamos la identidad trigonométrica $\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}(a)\cos(b) \pm \cos(a)\,\text{sen}(b)$, esta expresión se reduce a

$$y = (2A\,\text{sen}\,kx)\cos\omega t \tag{18.3}$$

La ecuación 18.3 representa la función de onda de una **onda estacionaria.** Una onda estacionaria, como la que se ve en la figura 18.8, es una figura de oscilación *con un contorno estacionario* que resulta de la superposición de dos ondas idénticas que se desplazan en direcciones opuestas.

Nótese que la ecuación 18.3 no contiene una función de $kx - \omega t$. En consecuencia, no es una expresión para una onda viajera. Si observamos una onda estacionaria, no tenemos sentido de movimiento en la dirección de propagación de cualquiera de las ondas originales. Si comparamos esta ecuación con la ecuación 15.6, vemos que la ecuación 18.3 describe una clase especial de movimiento armónico simple. Cada elemento del medio oscila en un movimiento armónico simple con la misma frecuencia ω (de acuerdo con el factor $\cos\omega t$ de la ecuación). Sin embargo, la amplitud del movimiento armónico simple de un elemento dado (dado por el factor $2A\,\text{sen}\,kx$, el coeficiente de la función coseno) depende de la ubicación x del elemento del medio.

La máxima amplitud de un elemento del medio tiene un valor mínimo de cero cuando x satisface la condición $\text{sen}\,kx = 0$, es decir, **cuando**

$$kx = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$$

Como $k = 2\pi/\lambda$, estos valores para kx dan

$$x = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \ldots = \frac{n\lambda}{2} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{18.4}$$

Estos puntos de cero amplitud se llaman **nodos.**

¡ADVERTENCIA!

18.2 Tres tipos de amplitud

Necesitamos distinguir cuidadosamente aquí entre la **amplitud de las ondas individuales,** que es A, y la **amplitud del movimiento armónico simple de los elementos del medio,** que es $2A\,\text{sen}\,kx$. Un elemento dado de una onda estacionaria vibra dentro de las restricciones de la función *envolvente* $2A\,\text{sen}\,kx$, donde x es la posición de ese elemento en el medio. Esto está en contraste con ondas senoidales viajeras, en las que todos los elementos oscilan con la misma amplitud y la misma frecuencia, y la amplitud A de la onda es la misma que la amplitud A del movimiento armónico simple de los elementos. Además, podemos identificar la **amplitud de la onda estacionaria** como $2A$.

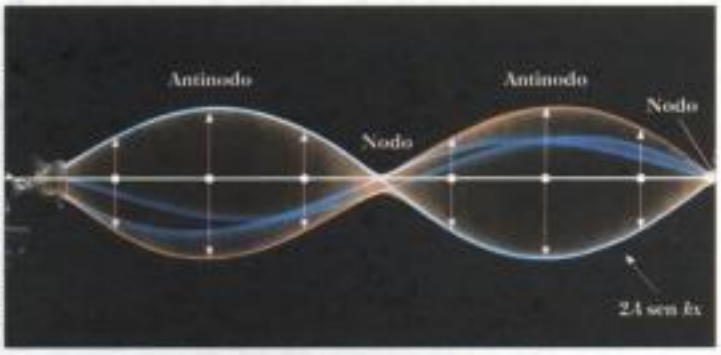


Figura 18.8 Fotografía de destellos múltiples de una onda estacionaria en una cuerda. El comportamiento en el tiempo del desplazamiento vertical de un elemento individual, a partir del equilibrio, está dado por $\cos\omega t$. Esto es, cada elemento vibra a una frecuencia angular ω. La amplitud de la oscilación vertical de cualesquier elementos de la cuerda depende de la posición horizontal del elemento. Cada elemento vibra dentro de los confines de la función envolvente $2A\,\text{sen}\,kx$.

Materiał chroniony prawem autorskim

El elemento con el *mayor* desplazamiento posible desde el equilibrio tiene una amplitud de $2A$, y definimos esto como la amplitud de la onda estacionaria. Las posiciones en el medio en donde ocurre este máximo desplazamiento se llaman **antinodos.** Los antinodos se localizan en posiciones para las cuales la coordenada x satisface la condición sen $kx = \pm 1$, es decir, cuando

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

Por lo tanto, las posiciones de los antinodos están dadas por

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots = \frac{n\lambda}{4} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{18.5}$$

Posición de antinodos

Al examinar las ecuaciones 18.4 y 18.5, observamos las siguientes características importantes de las ubicaciones de nodos y antinodos:

La distancia entre antinodos adyacentes es igual a $\lambda/2$.
La distancia entre nodos adyacentes es igual a $\lambda/2$.
La distancia entre un nodo y un antinodo adyacente es $\lambda/4$.

Las figuras de onda de los elementos del medio producidas en varios instantes por dos ondas que se desplazan en direcciones opuestas se ilustran en la figura 18.9. Las curvas azules y verdes son las mismas figuras de onda para las ondas viajeras individuales, y las curvas rojas son las figuras de onda para la onda estacionaria resultante. En $t = 0$ (figura 18.9a), las dos ondas viajeras están en fase, dando una onda en la que cada elemento del medio está experimentando su máximo desplazamiento desde el equilibrio. Un cuarto de periodo más tarde, en $t = T/4$ (figura 18.9b), las ondas viajeras han avanzado un cuarto de longitud de onda (una a la derecha y otra a la izquierda). En este tiempo, las ondas viajeras están fuera de fase, y cada elemento del medio está pasando por la posición de equilibrio en su movimiento armónico simple. El resultado es cero desplazamiento para elementos de todos los valores de x, es decir, la onda es una recta. En $t = T/2$ (figura 18.9c), las ondas viajeras están de nuevo en fase, produciendo una onda que está invertida con respecto a la figura en $t = 0$. En la onda estacionaria, los elementos del medio se alternan en tiempo entre los extremos que se ilustran en la figura 18.9a y c.

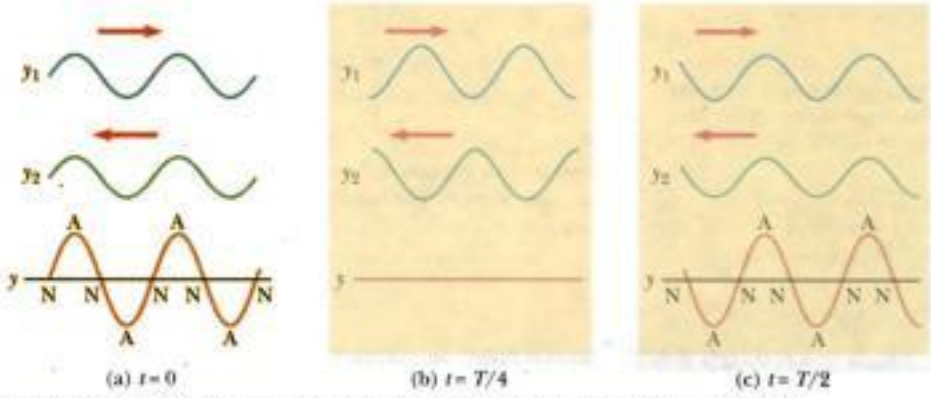


Figura activa 18.9 Figuras de onda estacionaria producidas en varios tiempos por dos ondas de igual amplitud que se desplazan en direcciones opuestas. Para la onda resultante y, los nodos (N) son puntos de desplazamiento cero, y los antinodos (A) son puntos de máximo desplazamiento.

En el vínculo **Active Figures** *en* http://www.pse6.com, *usted podrá seleccionar la longitud de onda de las ondas y ver la onda estacionaria que resulta.*

Materiał chroniony prawem autorskim

Pregunta rápida 18.3 Considere una onda estacionaria en una cuerda como se ve en la figura 18.9. Defina la velocidad de los elementos de la cuerda como positivos si se mueven hacia arriba en la figura. En el momento en que la cuerda tiene la figura hacia abajo por la curva roja de la figura 18.9a, la velocidad instantánea de los elementos a lo largo de la cuerda (a) es cero para todos los elementos, (b) es positiva para todos los elementos, (c) es negativa para todos los elementos, (d) varía con la posición del elemento.

Pregunta rápida 18.4 Continuando con la situación de la Pregunta rápida 18.3, en el momento en que la cuerda tiene la forma hacia abajo por la curva roja en la figura 18.9b, la velocidad instantánea de los elementos a lo largo de la cuerda (a) es cero para todos los elementos, (b) es positiva para todos los elementos, (c) es negativa para todos los elementos, (d) varía con la posición del elemento.

Ejemplo 18.2 Formación de una onda estacionaria

Dos ondas que se desplazan en direcciones opuestas producen una onda estacionaria. Las funciones de onda individuales son

$$y_1 = (4.0\text{ cm})\,\text{sen}(3.0x - 2.0t)$$
$$y_2 = (4.0\text{ cm})\,\text{sen}(3.0x + 2.0t)$$

donde x y y se miden en centímetros.

(A) Encuentre la amplitud del movimiento armónico simple del elemento del medio localizado en $x = 2.3$ cm.

Solución La onda estacionaria está descrita por la ecuación 18.3; en este problema, tenemos $A = 4.0$ cm, $k = 3.0$ rad/cm, y $\omega = 2.0$ rad/s. Así,

$$y = (2A\,\text{sen}\,kx)\cos\omega t = [(8.0\text{ cm})\text{sen}\,3.0x]\cos 2.0t$$

Por lo tanto, obtenemos la amplitud del movimiento armónico simple del elemento en la posición $x = 2.3$ cm al evaluar el coeficiente de la función coseno en esta posición:

$$y_{\text{máx}} = (8.0\text{ cm})\text{sen}\,3.0x\big|_{x=2.3}$$

$$= (8.0\text{ cm})\,\text{sen}\,(6.9\text{ rad}) = \mathbf{4.6\text{ cm}}$$

(B) Encuentre las posiciones de los nodos y antinodos si un extremo de la cuerda está en $x = 0$.

Solución Con $k = 2\pi/\lambda = 3.0$ rad/cm, vemos que la longitud de onda es $\lambda = (2\pi/3.0)$ cm. Por lo tanto, de la ecuación 18.4 encontramos que los nodos están situados en

$$x = n\frac{\lambda}{2} = n\left(\frac{\pi}{3}\right)\text{cm} \qquad n = \mathbf{0, 1, 2, 3, \ldots}$$

y de la ecuación 18.5 encontramos que los antinodos están situados en

$$x = n\frac{\lambda}{4} = n\left(\frac{\pi}{6}\right)\text{cm} \qquad n = \mathbf{1, 3, 5, \ldots}$$

(C) ¿Cuál es el máximo valor de la posición en el movimiento armónico simple de un elemento situado en un antinodo?

Solución De acuerdo con la ecuación 18.3, la máxima posición de un elemento en un antinodo es la amplitud de la onda estacionaria, que es el doble de amplitud de las ondas viajeras individuales:

$$y_{\text{máx}} = 2A(\text{sen}\,kx)_{\text{máx}} = 2(4.0\text{ cm})(\pm 1) = \mathbf{\pm 8.0\text{ cm}}$$

donde hemos empleado el hecho de que el valor máximo de sen kx es ± 1. Verifiquemos este resultado al evaluar el coeficiente de nuestra función de onda estacionaria en las posiciones que encontramos para los antinodos:

$$y_{\text{máx}} = (8.0\text{ cm})\text{sen}\,3.0x\big|_{x=n(\pi/6)}$$

$$= (8.0\text{ cm})\,\text{sen}\left[3.0n\left(\frac{\pi}{6}\right)\text{rad}\right]$$

$$= (8.0\text{ cm})\,\text{sen}\left[n\left(\frac{\pi}{2}\right)\text{rad}\right] = \pm 8.0\text{ cm}$$

Al evaluar esta expresión, hemos empleado el hecho de que n es un entero impar; por lo tanto, la función seno es igual a ± 1, dependiendo del valor de n.

18.3 Ondas estacionarias en una cuerda fija en ambos extremos

Considere una cuerda de longitud l fija en ambos extremos, como se ve en la figura 18.10. Las ondas estacionarias se forman en la cuerda por una superposición continua de ondas que inciden en los extremos y se reflejan desde éstos. Nótese que hay una condición de

Materiał chroniony prawem autorskim

las posiciones extremas (figuras 18.11a y 18.11e) y los elementos tienen velocidades variables en otras posiciones (figuras 18.11b a la 18.11d).

Los modos normales de oscilación para la cuerda se pueden describir al imponer los requisitos de que los extremos sean nodos y que los nodos y antinodos estén separados por un cuarto de longitud de onda. El primer modo normal que es consistente con las condiciones en la frontera, que se ilustra en la figura 18.10b, tiene nodos en sus extremos y un antinodo enmedio. Éste es el modo de longitud de onda más larga consistente con nuestros requisitos. El primer modo normal se presenta cuando la longitud de la cuerda es la mitad de la longitud de onda λ_1, como se indica en la figura 18.10b, o $\lambda_1 = 2L$. El siguiente modo normal (vea la figura 18.10c) de longitud de onda λ_2 se presenta cuando la longitud de onda es igual a la longitud de la cuerda, esto es, cuando $\lambda_2 = L$. El tercer modo normal (vea la figura 18.10c) corresponde al caso en el que $\lambda_3 = 2L/3$. En general, las longitudes de onda de los diversos modos normales para una cuerda de longitud L fija en ambos extremos son

Longitudes de onda de modos normales

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{18.6}$$

donde el índice n se refiera al n-ésimo modo normal de oscilación. Éstos son los *posibles* modos de oscilación para la cuerda. Los modos *reales* que son excitados en una cuerda se analizarán aquí un poco más adelante.

Las frecuencias naturales asociadas con estos modos se obtienen de la relación $f = v/\lambda$, donde la rapidez de la onda v es igual para todas las frecuencias. Con el uso de la ecuación 18.6, encontramos que las frecuencias naturales f_n de los modos normales son

Frecuencias de modos normales como función de la rapidez de la onda y longitud de la cuerda

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{18.7}$$

Estas frecuencias naturales también se llaman *frecuencias cuantificadas* asociadas con la cuerda vibratoria fija en ambos extremos.

Debido a que $v = \sqrt{T/\mu}$ (vea la ecuación 16.18), donde T es la tensión de la cuerda y μ es su densidad lineal de masa, podemos también expresar las frecuencias naturales de una cuerda tensa como

Frecuencias de modos normales como función de la tensión de la cuerda y la densidad lineal de masa

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{18.8}$$

La más baja frecuencia f_1, que corresponde a $n = 1$, se llama ya sea la **fundamental** o la **frecuencia fundamental** y está dada por

Frecuencia fundamental de una cuerda tensa

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{18.9}$$

Las frecuencias de los restantes modos normales son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Las frecuencias de modos normales que exhiben una relación de múltiplo entero como ésta forman una **serie armónica,** y los modos normales se llaman **armónicas.**

© 1997 Richard Megna/Fundamental Photographs

Fotografías de destellos múltiples de figuras de onda estacionaria en una cuerda excitada por un vibrador en su extremo izquierdo. La figura de un solo lazo representa el primer modo normal (la fundamental, $n = 1$). La figura de doble lazo representa el segundo modo normal ($n = 2$), y la figura de tres lazos representa el tercer modo normal ($n = 3$).

Materiał chroniony prawem autorskim

La frecuencia fundamental f_1 es la frecuencia de la primera armónica; la frecuencia $f_2 = 2f_1$ es la frecuencia de la segunda armónica; y la frecuencia $f_n = nf_1$ es la frecuencia de la n-ésima armónica. Otros sistemas oscilatorios, por ejemplo un parche de tambor, exhiben modos normales, pero las frecuencias no están relacionadas como múltiplos enteros de una fundamental. En consecuencia, no usamos el término *armónica* en asociación con estos tipos de sistemas.

Para obtener la ecuación 18.6 empleamos una técnica basada en la distancia de separación entre nodos y antinodos. Podemos obtener esta expresión de un modo alternativo. Debido a que pedimos que la cuerda esté fija en $x = 0$ y $x = L$, la función de onda $y(x, t)$ dada por la ecuación 18.3 debe ser cero en estos puntos para todos los tiempos. Esto es, las *condiciones en la frontera* requieren que $y(0, t) = 0$ y $y(L, t) = 0$ para todos los valores de t. Como la onda estacionaria está descrita por $y = 2A(\text{sen } kx) \cos \omega t$, la primera condición en la frontera, $y(0, t) = 0$ se satisface automáticamente porque sen $kx = 0$ en $x = 0$. Para satisfacer la segunda condición en la frontera, $y(L,t) = 0$, requerimos que sen $kL = 0$. Esta condición se satisface cuando el ángulo kL es igual a un múltiplo entero de π rad. Por lo tanto, los valores permitidos de k están dados por[1]

$$k_n L = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{18.10}$$

Como $k_n = 2\pi/\lambda_n$, encontramos que

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}\right) L = n\pi \qquad \text{o} \qquad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

que es idéntica a la ecuación 18.6.

Examinemos más la forma en que estas diversas armónicas se crean en una cuerda. Si deseamos excitar sólo una armónica, debemos distorsionar la cuerda de modo tal que su forma distorsionada corresponda a la de la armónica deseada. Después de soltarla, la cuerda vibra a la frecuencia de esa armónica. Esta maniobra es difícil de realizar, sin embargo, y no es la forma en que excitamos una cuerda de un instrumento musical. Si la cuerda es distorsionada de manera que su forma distorsionada no es la de una sola armónica, la vibración resultante incluye varias armónicas. Esta distorsión existe en instrumentos musicales cuando la cuerda es pulsada (como en una guitarra), tocada por un arco (como en un violonchelo) o golpeada (como en un piano). Cuando la cuerda es distorsionada en una forma no senoidal, sólo ondas que satisfacen las condiciones en la frontera pueden persistir en la cuerda. Éstas son las armónicas.

La frecuencia de una cuerda que define la nota musical que ejecuta es la de la fundamental. La frecuencia de la cuerda se puede hacer variar al cambiar ya sea la tensión o la longitud de la cuerda. Por ejemplo, la tensión en las cuerdas de guitarra o violín se hace variar por medio de un mecanismo de tornillo de ajuste, o por clavijas de sintonía situadas en el cuello del instrumento. Cuando aumenta la tensión, la frecuencia de los modos normales aumenta de acuerdo con la ecuación 18.8. Una vez que el instrumento se encuentre "afinado", el ejecutando varía la frecuencia al mover sus dedos a lo largo del cuello del instrumento, con lo cual cambia la longitud de la parte oscilante de la cuerda. Cuando la longitud se acorta, aumenta la frecuencia porque, como indica la ecuación 18.8, las frecuencias de modo normal son inversamente proporcionales a la longitud de la cuerda.

Pregunta rápida 18.5 Cuando una onda estacionaria se forma en una cuerda fija en ambos extremos, (a) el número de nodos es igual al número de antinodos, (b) la longitud de onda es igual a la longitud de la cuerda dividida entre un entero, (c) la frecuencia es igual al número de nodos por la frecuencia fundamental, (d) la forma de la cuerda en cualquier tiempo es simétrica más o menos en el punto medio de la cuerda.

[1] Excluimos $n = 0$ porque este valor corresponde al caso trivial en el que no existe onda ($k = 0$).

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 18.3 ¡Dame una nota do!

Una nota do mayor en un piano tiene una frecuencia fundamental de 262 Hz, y la primera nota la arriba de la do mayor tiene una frecuencia fundamental de 440 Hz.

(A) Calcule las frecuencias de las siguientes dos armónicas de la cuerda de do.

Solución Sabiendo que las frecuencias de armónicas más altas son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental $f_1 = 262$ Hz, encontramos que

$$f_2 = 2f_1 = \mathbf{524\ Hz}$$

$$f_3 = 3f_1 = \mathbf{786\ Hz}$$

(B) Si las cuerdas de las notas la y do tienen la misma densidad lineal de masa μ y longitud L, determine la razón entre las tensiones de las dos cuerdas.

Solución Usando la ecuación 18.9 para las dos cuerdas que vibran a sus frecuencias fundamentales da

$$f_{1A} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_A}{\mu}} \quad \text{y} \quad f_{1C} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_C}{\mu}}$$

Estableciendo la razón entre estas frecuencias, encontramos que

$$\frac{f_{1A}}{f_{1C}} = \sqrt{\frac{T_A}{T_C}}$$

$$\frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{f_{1A}}{f_{1C}}\right)^2 = \left(\frac{440}{262}\right)^2 = \mathbf{2.82}$$

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si vemos dentro de un piano real? En este caso, la suposición que hicimos en la parte (B) es sólo parcialmente cierta. Las densidades de cuerdas son iguales, pero la longitud de la cuerda de la nota la es sólo 64% de la longitud de la cuerda de la nota do. ¿Cuál es la razón entre sus tensiones?

Respuesta Con el uso de la ecuación 18.8 otra vez, establecemos la razón entre frecuencias:

$$\frac{f_{1A}}{f_{1C}} = \frac{L_C}{L_A}\sqrt{\frac{T_A}{T_C}} = \left(\frac{100}{64}\right)\sqrt{\frac{T_A}{T_C}}$$

$$\frac{T_A}{T_C} = (0.64)^2\left(\frac{440}{262}\right)^2 = 1.16$$

Ejemplo 18.4 Fundamentos de guitarra

La cuerda de la nota mi alta en una guitarra mide 64.0 cm de largo, y tiene una frecuencia fundamental de 330 Hz. Al presionar para que la cuerda esté en contacto con el primer traste (figura 18.12), la cuerda se acorta para que emita una nota fa que tiene una frecuencia de 350 Hz. ¿A qué distancia está el traste desde el extremo del cuello de la cuerda?

Solución La ecuación 18.7 relaciona la longitud de la cuerda con la frecuencia fundamental. Con $n = 1$, podemos despejar la rapidez de la onda en la cuerda,

$$v = \frac{2L}{n}f_n = \frac{2(0.640\ \text{m})}{1}(330\ \text{Hz}) = 422\ \text{m/s}$$

Como no hemos ajustado la clavija de sintonía, la tensión en la cuerda, y por lo tanto la rapidez de la onda, permanece constante. De nuevo podemos usar la ecuación 18.7, esta vez para despejar L y sustituir la nueva frecuencia para hallar la longitud acortada de la cuerda:

$$L = n\frac{v}{2f_n} = (1)\frac{422\ \text{m/s}}{2(350\ \text{Hz})} = 0.603\ \text{m} = 60.3\ \text{cm}$$

La diferencia entre esta longitud y la longitud medida de 64.0 cm es la distancia del traste al extremo del cuello de la cuerda, o sea, **3.7 cm.**

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si deseamos ejecutar una nota en fa sostenido, lo cual hacemos al presionar el segundo traste desde el cuello en la figura 18.12? La frecuencia de la nota fa sostenido es 370 Hz. ¿Tiene este traste otros 3.7 cm desde el cuello?

Respuesta Si inspeccionamos el diapasón, encontramos que los trastes *no están* igualmente espaciados. Están más separados cerca del cuello y más juntos cerca del extremo opuesto. En consecuencia, de esta observación, no esperaríamos que el traste de fa sostenido tenga otros 3.7 cm desde el extremo.

Repitamos el cálculo de la longitud de la cuerda, esta vez para la frecuencia de fa sostenido:

$$L = n\frac{v}{2f_n} = (1)\frac{422\ \text{m/s}}{2(370\ \text{Hz})} = 0.571\ \text{m}$$

Esto da una distancia de 0.640 m − 0.571 m = 0.069 m = 6.9 cm desde el cuello. Al restar la distancia desde el cuello al primer traste, la distancia de separación entre los trastes primero y segundo es 6.9 cm − 3.7 cm = 3.2 cm.

Charles D. Winters

Figura 18.12 (Ejemplo 18.4) Tocando la nota fa.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 18.5 Cambiando, con agua, la vibración de una cuerda

Un extremo de una cuerda horizontal está atado a un vibrador y el otro extremo pasa sobre una polea como se ve en la figura 18.13a. Una esfera de masa 2.00 kg cuelga del extremo de la cuerda. La cuerda está vibrando en su segunda armónica. Un recipiente de agua se eleva bajo la esfera para que la esfera quede sumergida por completo. Después de hacer esto, la cuerda vibra en su quinta armónica, como se ve en la figura 18.13b. ¿Cuál es el radio de la esfera?

Solución Para conceptualizar el problema, imagine lo que ocurre cuando la esfera se sumerge en el agua. El empuje hidrostático actúa hacia arriba sobre la esfera, reduciendo la tensión en la cuerda. El cambio en tensión produce un cambio en la rapidez de las ondas en la cuerda, que a su vez causa un cambio en la longitud de onda. Esta longitud de onda alterada resulta en la cuerda vibratoria en su quinto modo normal más que el segundo. Clasificamos el problema como uno en el que necesitaremos combinar nuestro conocimiento de la segunda Ley de Newton, empujes hidrostáticos y ondas estacionarias en cuerdas. Comenzamos por analizar el problema al estudiar la figura 18.13a. La segunda ley de Newton aplicada a la esfera nos dice que la tensión en la cuerda es igual al peso de la esfera:

$$\Sigma F = T_1 - mg = 0$$

$$T_1 = mg = (2.00\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 19.6\ \text{N}$$

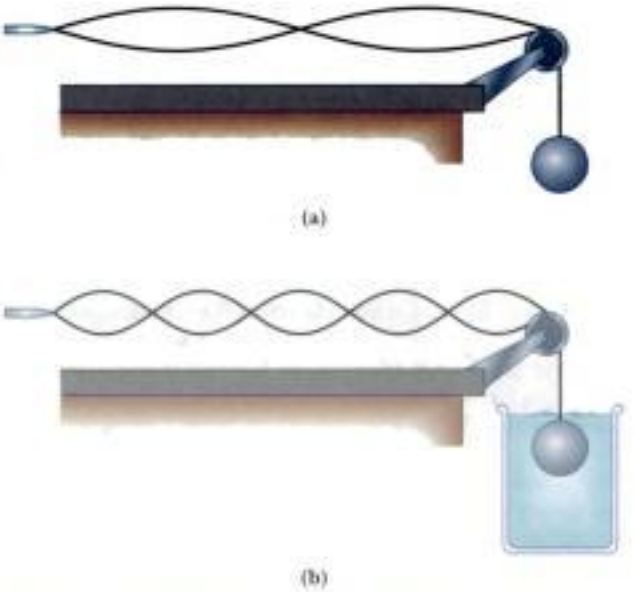


Figura 18.13 (Ejemplo 18.5) Cuando la esfera cuelga en aire, la cuerda vibra en su segunda armónica. Cuando la esfera se sumerge en agua, la cuerda vibra en su quinta armónica.

donde el subíndice 1 se usa para indicar variables iniciales antes de sumergir la esfera en agua. Una vez que la esfera se sumerge en agua, la tensión en la cuerda disminuye a T_2. Al aplicar la segunda ley de Newton a la esfera de nuevo en esta situación, tenemos

$$T_2 + B - mg = 0$$

$$(1) \qquad B = mg - T_2$$

La cantidad deseada, el radio de la esfera, aparecerá en la expresión para el empuje hidrostático B. Antes de continuar en esta dirección, sin embargo, debemos evaluar T_2. Hacemos esto a partir de la información de onda estacionaria. Escribimos la ecuación para la frecuencia de una onda estacionaria en una cuerda (ecuación 18.8) dos veces, una antes de sumergir la esfera y una después de sumergirla, y dividimos las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{n_1}{2L}\sqrt{\frac{T_1}{\mu}} \\ f &= \frac{n_2}{2L}\sqrt{\frac{T_2}{\mu}} \end{aligned}\right. \longrightarrow \quad 1 = \frac{n_1}{n_2}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

donde la frecuencia f es igual en ambos casos, porque está determinada por el vibrador. Además, la densidad lineal de masa μ y la longitud L de la porción vibratoria de la cuerda son iguales en ambos casos. Al despejar T_2, tenemos

$$T_2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 T_1 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 (19.6\ \text{N}) = 3.14\ \text{N}$$

Al sustituir esto en la ecuación (1), podemos evaluar el empuje hidrostático en la esfera:

$$B = mg - T_2 = 19.6\ \text{N} - 3.14\ \text{N} = 16.5\ \text{N}$$

Por último, expresando el empuje hidrostático (ecuación 14.5) en términos del radio de la esfera, despejamos el radio:

$$B = \rho_{\text{agua}}\, g V_{\text{esfera}} = \rho_{\text{agua}} g \left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3B}{4\pi\rho_{\text{agua}} g}} = \sqrt[3]{\frac{3(16.5\ \text{N})}{4\pi(1\,000\ \text{kg/m}^3)(9.80\ \text{m/s}^2)}}$$

$$= 7.38 \times 10^{-2}\ \text{m} = \mathbf{7.38\ cm}$$

Para finalizar este problema, nótese que sólo ciertos radios de la esfera resultarán en la cuerda vibratoria en un modo normal. Esto es porque la rapidez de ondas en la cuerda debe ser cambiada a un valor tal que la longitud de la cuerda sea un múltiplo entero de medias longitudes de onda. Ésta es una característica de la *cuantización* que introdujimos ya antes en este capítulo; los radios de la esfera que pueden hacer que la cuerda vibre en un modo normal están *cuantizados*.

Materiał chroniony prawem autorskim

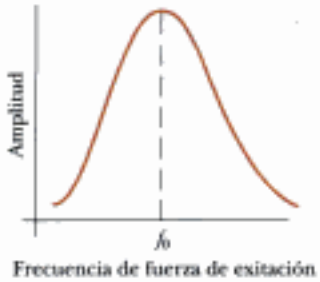


Figura 18.14 Gráfica de la amplitud (respuesta) contra frecuencias de excitación para un sistema oscilatorio. La amplitud es máxima a la frecuencia de resonancia f_0.

18.4 Resonancia

Hemos visto que un sistema como una cuerda tensa es capaz de oscilar en uno o más modos normales de oscilación. **Si se aplica una fuerza periódica a uno de estos sistemas, la amplitud del movimiento resultante es mayor cuando la frecuencia de la fuerza aplicada es igual a una de las frecuencias naturales del sistema.** Estudiamos este fenómeno, conocido como *resonancia*, brevemente en la sección 15.7. Aun cuando un sistema formado por un bloque y un resorte o un péndulo simple tiene sólo una frecuencia natural, los sistemas de onda estacionaria tienen un conjunto completo de frecuencias naturales, como el que se da en la ecuación 18.7 para una cuerda. Como un sistema oscilatorio exhibe una gran amplitud cuando se excita a cualquiera de sus frecuencias naturales, estas frecuencias a veces se conocen como **frecuencias de resonancia.**

La figura 18.14 muestra la respuesta de un sistema oscilatorio a varias frecuencias de excitación, donde una de las frecuencias de resonancia del sistema está denotada por f_0. Nótese que la amplitud de oscilación del sistema es máxima cuando la frecuencia de la fuerza de excitación es igual a la frecuencia de resonancia. La máxima amplitud está limitada por fricción en el sistema. Si una fuerza de excitación realiza trabajo sobre un sistema oscilatorio que está inicialmente en reposo, la energía de entrada se utiliza para aumentar la amplitud de la oscilación y para vencer la fuerza de fricción. Una vez alcanzada la amplitud máxima, el trabajo realizado por la fuerza de excitación se emplea sólo para compensar la pérdida de energía mecánica debida a la fricción.

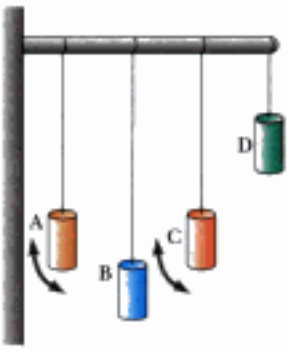


Figura 18.15 Ejemplo de resonancia. Si el péndulo A se pone en oscilación, sólo el péndulo C, cuya longitud es igual a la de A, oscila finalmente con amplitud grande, y resuena. Las flechas indican movimiento en un plano perpendicular a la página.

Ejemplos de resonancia

Un columpio de un parque infantil es un péndulo que tiene una frecuencia natural que depende de su longitud. Siempre que usemos una serie de impulsos regulares para empujar un niño en un columpio, el columpio sube a más altura si la frecuencia de la fuerza periódica es igual a la frecuencia natural del columpio. Podemos demostrar un efecto similar al suspender péndulos de longitudes diferentes de un soporte horizontal, como se ve en la figura 18.15. Si el péndulo A se pone en oscilación, los otros péndulos empiezan a oscilar como resultado de ondas transmitidas a lo largo de la viga. No obstante, el péndulo C, cuya longitud es cerca de la longitud de A, oscila con mucha mayor amplitud que los péndulos B y D, cuyas longitudes son muy diferentes a las del péndulo A. El péndulo C se mueve en la forma que lo hace debido a que su frecuencia natural es casi igual a la frecuencia de excitación asociada con el péndulo A.

A continuación, considere una cuerda tensa fija en un extremo y conectada en el extremo opuesto a un generador de ondas, como se ve en la figura 18.16. El extremo fijo es un nodo, y el extremo conectado al generador es casi un nodo porque la amplitud del movimiento del vibrador es pequeña en comparación con el de los elementos de la cuerda. Cuando el vibrador oscila, las ondas transversales enviadas por la cuerda se reflejan desde el extremo fijo. Como ya vimos en la sección 18.3, la cuerda tiene frecuencias naturales que están determinadas por su longitud, tensión y densidad lineal de masa (vea la ecuación 18.8). Cuando la frecuencia de la hoja es igual a una de las frecuencias naturales de la cuerda, se producen ondas estacionarias y la cuerda oscila con una gran amplitud. En este caso de resonancia, la onda generada por el vibrador está en fase con la onda reflejada, y la cuerda absorbe energía del generador Si la cuerda es excitada a una frecuencia que no es una de sus frecuencias naturales, entonces las oscilaciones son de baja amplitud y no exhibe una figura estable.

Figura 18.16 Se forman ondas estacionarias en una cuerda cuando un extremo está conectado a un vibrador. Cuando el vibrador agita a una de las frecuencias naturales de la cuerda, se forman ondas estacionarias de gran amplitud.

Una vez que la amplitud de las oscilaciones de onda estacionaria sea máxima, la energía mecánica entregada por la hoja y absorbida por el sistema, se transforma en energía interna debido a las fuerzas de amortiguamiento causadas por la fricción en el sistema. Si la frecuencia aplicada difiere de una de las frecuencias naturales, al principio se transfiere energía a la cuerda, pero más tarde la fase de la onda es tal que obliga al vibrador hoja a recibir energía de la cuerda, con lo cual se reduce la energía en la cuerda.

La resonancia es muy importante en la excitación de instrumentos musicales basados en columnas de aire. Estudiaremos esta aplicación de resonancia en la sección 18.5.

Materiał chroniony prawem autorskim

Pregunta rápida 18.6 Un vaso de vino se puede romper mediante resonancia si se mantiene cierta frecuencia de una onda de sonido de alta intensidad. La figura 18.17a muestra una vista lateral de un vaso de vino que vibra en respuesta a esta onda de sonido. Trace la figura de la onda estacionaria en el borde del vidrio como se vería desde arriba. Si un número entero de ondas "ajusta" alrededor de la circunferencia del borde en vibración, ¿cuántas longitudes de onda ajustan alrededor del borde de la figura 18.17a?

(a) (b)

Figura 18.17 (Pregunta rápida 18.6) (a) Onda estacionaria en un vaso de vino en vibración. El vaso se rompe si la amplitud de vibración se hace demasiado grande. (b) Un vaso de vino roto por el sonido amplificado de una voz humana.

18.5 Ondas estacionarias en columnas de aire

Es posible formar ondas estacionarias en un tubo de aire, como el que hay en el interior de un tubo de órgano, como resultado de interferencia entre ondas de sonido longitudinales que se desplazan en direcciones opuestas. La relación de fase entre la onda incidente y la onda reflejada desde un extremo del tubo depende de si ese extremo está abierto o cerrado. Esta relación es análoga a las relaciones de fase entre ondas transversales incidentes y reflejadas en el extremo de una cuerda cuando el extremo está fijo o libre para moverse (vea las figuras 16.14 y 16.15).

En un tubo cerrado en un extremo, **el extremo cerrado es un nodo de desplazamiento, porque la pared de este extremo no permite el movimiento longitudinal del aire.** Como resultado de esto, en un extremo cerrado de un tubo, la onda de sonido reflejada está 180° fuera de fase con la onda incidente. Además, como la onda de presión está 90° fuera de fase con la onda de desplazamiento (vea la figura 17.2), **el extremo cerrado de una columna de aire corresponde a un antinodo de presión** (esto es, un punto de máxima variación de presión).

El extremo abierto de una columna de aire es aproximadamente un antinodo[2] de desplazamiento y un nodo de presión. Podemos entender por qué no hay variación de presión en un extremo abierto al observar que el extremo de la columna de aire está abierto a la atmósfera; por lo tanto, la presión en este extremo debe permanecer constante a la presión atmosférica.

Uno se puede preguntar cómo es que una onda de sonido se puede reflejar de un extremo abierto, ya que no parece haber cambio en el medio en este punto. En verdad es cierto que el medio en el que se mueve la onda de sonido es aire tanto dentro como fuera

[2] Estrictamente hablando, el extremo abierto de una columna de aire no es exactamente un antinodo de desplazamiento. Una compresión que llega a un extremo abierto no se refleja sino hasta que pasa más allá del extremo. Para un tubo de sección transversal circular, una corrección de extremo igual a aproximadamente $0.6R$, donde R es el radio del tubo, debe agregarse a la longitud de la columna de aire. Por lo tanto, la longitud efectiva de la columna de aire es más larga que la longitud verdadera L. En este análisis hacemos caso omiso de esta corrección de extremo.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 18.6 Viento en una alcantarilla

Una sección de alcantarilla de drenaje de 1.23 m de largo produce un aullido cuando sopla el viento.

(A) Determine las frecuencias de las primeras tres armónicas de la alcantarilla si es de forma cilíndrica y abierta en ambos extremos. Tome $v = 343$ m/s como la rapidez del sonido en aire.

Solución La frecuencia de la primera armónica de un tubo abierto en ambos extremos es

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{343 \text{ m/s}}{2(1.23 \text{ m})} = \mathbf{139 \text{ Hz}}$$

Como ambos extremos están abiertos, todas las armónicas están presentes; por lo tanto,

$$f_2 = 2f_1 = \mathbf{278 \text{ Hz}} \quad \text{y} \quad f_3 = 3f_1 = \mathbf{417 \text{ Hz}}$$

(B) ¿Cuáles son las tres frecuencias naturales más bajas de la alcantarilla si está bloqueada en un extremo?

Solución La frecuencia fundamental de un tubo cerrado en un extremo es

$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{343 \text{ m/s}}{4(1.23 \text{ m})} = \mathbf{69.7 \text{ Hz}}$$

En este caso, sólo están presentes armónicas impares; por lo tanto, las siguientes dos armónicas tienen frecuencias $f_3 = 3f_1 =$ **209 Hz** y $f_5 = 5f_1 =$ **349 Hz.**

(C) Para la alcantarilla abierta en ambos extremos, ¿cuántas de las armónicas presentes caen dentro de los límites normales auditivos de una persona (20 a 20 000 Hz)?

Solución Como todas las armónicas están presentes para un tubo abierto en ambos extremos, podemos expresar la frecuencia de la armónica más alta escuchada como $f_n = nf_1$ donde n es el número de armónicas que podemos escuchar. Para $f_n = 20\,000$ Hz, encontramos que el número de armónicas presentes en el límite auditivo es

$$n = \frac{20\,000 \text{ Hz}}{139 \text{ Hz}} = \mathbf{143}$$

Sólo las primeras tres armónicas son de suficiente amplitud para ser escuchadas.

Ejemplo 18.7 Medición de la frecuencia de un diapasón

En la figura 18.19 se ilustra un sencillo aparato para demostrar la resonancia en una columna de aire. Un tubo vertical abierto en ambos extremos está parcialmente sumergido en agua, y un diapasón en vibración a una frecuencia desconocida se coloca cerca de la parte superior del tubo. La longitud L de la columna de aire se puede ajustar al mover verticalmente el tubo. Las ondas de sonido generadas por el diapasón se refuerzan cuando L corresponde a una de las frecuencias de resonancia del tubo.

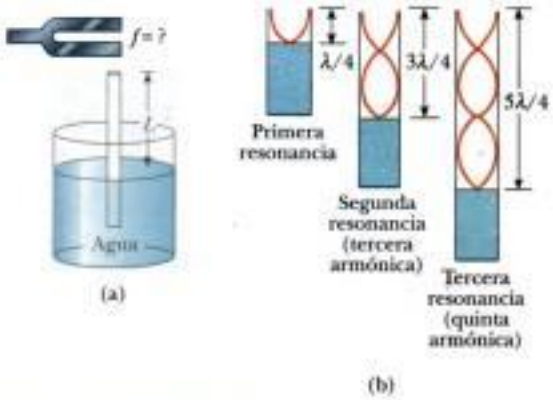


Figura 18.19 (Ejemplo 18.7) (a) Aparato para demostrar la resonancia de ondas de sonido en un tubo cerrado en un extremo. La longitud L de la columna de aire se hace variar al mover verticalmente al tubo mientras que está parcialmente sumergido en agua. (b) Los primeros tres modos normales del sistema mostrados en la parte (a).

Para cierto tubo, el valor más pequeño de L para el cual ocurre un pico en la intensidad del sonido es 9.00 cm. ¿Cuáles son

(A) la frecuencia del diapasón,

(B) los valores de L para las siguientes dos frecuencias de resonancia?

Solución

(A) Aun cuando el tubo está abierto en su extremo más bajo para permitir que entre el agua, la superficie del agua actúa como pared en un extremo. Por lo tanto, este montaje se puede modelar como una columna de aire cerrada en un extremo, y por ello la frecuencia fundamental está dada por $f_1 = v/4L$. Tomando $v = 343$ m/s para la rapidez del sonido en aire y $L = 0.090\,0$ m, obtenemos

$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{343 \text{ m/s}}{4(0.090\,0 \text{ m})} = \mathbf{953 \text{ Hz}}$$

Como el diapasón hace que la columna de aire resuene a esta frecuencia, ésta también debe ser la frecuencia del diapasón.

(B) Como el tubo está cerrado en un extremo, sabemos de la figura 18.18b que la longitud de onda del modo fundamental es $\lambda = 4L = 4(0.090\,0 \text{ m}) = 0.360$ m. Debido a que la frecuencia del diapasón es constante, los siguientes dos modos normales (véase la figura 18.19b) corresponden a longitudes de

$$L = 3\lambda/4 = \mathbf{0.270 \text{ m}} \quad \text{y } L = 5\lambda/4 = \mathbf{0.450 \text{ m}}.$$

Materiał chroniony prawem autorskim

18.6 Ondas estacionarias en varillas y membranas

Las ondas estacionarias también se pueden formar en varillas y membranas. Una varilla sujeta en su parte media, y a la que se le pasa una mano en forma paralela en un extremo, oscila como se describe en la figura 18.20a. Las oscilaciones de los elementos de la varilla son longitudinales, por lo cual las líneas interrumpidas de la figura 18.20 representan desplazamientos *longitudinales* de varias partes de la varilla. Para mayor claridad, los hemos dibujado en la dirección transversal igual que como lo hicimos para columnas de aire. El punto medio es un nodo de desplazamiento porque está fijo por el tornillo, mientras que los extremos son antinodos de desplazamiento porque están libres para oscilar. Las oscilaciones en este montaje son análogas a las presentes en un tubo abierto en ambos extremos. Las líneas interrumpidas en la figura 18.20a representan el primer modo normal, para el cual la longitud de onda es $2L$ y la frecuencia es $f = v/2L$, donde v es la rapidez de ondas longitudinales en la varilla. Otros modos normales pueden ser excitados al sujetar la varilla en puntos diferentes. Por ejemplo, el segundo modo normal (figura 18.20b) se excita al sujetar la varilla a una distancia $L/4$ alejada de un extremo.

Los instrumentos musicales que dependen de ondas estacionarias en varillas incluyen triángulos, marimbas, xilófonos, glockenspiels y vibráfonos. Otros dispositivos que producen sonidos desde barras incluyen cajas musicales y vibráfonos de viento.

Se pueden formar oscilaciones bidimensionales en una membrana flexible estirada sobre un arillo circular, como el de un parche de tambor. Cuando la membrana es golpeada en algún punto, las ondas que llegan a la frontera fija se reflejan muchas veces. El sonido resultante no es armónico porque las ondas estacionarias tienen frecuencias que *no están* relacionadas por múltiplos enteros. Sin esta relación, el sonido puede ser más correctamente descrito como *ruido* que como música. Esto es en contraste con la situación en instrumentos de viento y de cuerda, que producen sonidos que describimos como musicales.

Algunos posibles modos normales de oscilación para una membrana circular bidimensional se ilustran en la figura 18.21. Mientras que los nodos son *puntos* en ondas estacionarias unidimensionales en cuerdas y en columnas de aire, un oscilador bidimensional tiene

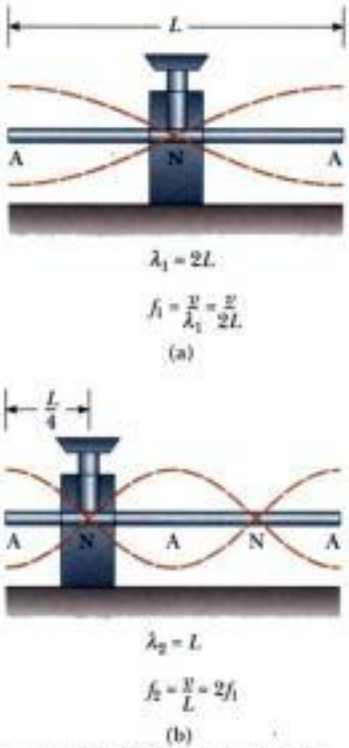


Figura 18.20 Vibraciones longitudinales de modo normal de una varilla de longitud L (a) sujeta en su parte media para producir el primer modo normal y (b) sujeto a una distancia $L/4$ de un extremo para producir el segundo modo normal. Nótese que las líneas interrumpidas representan oscilaciones paralelas a la varilla (ondas longitudinales).

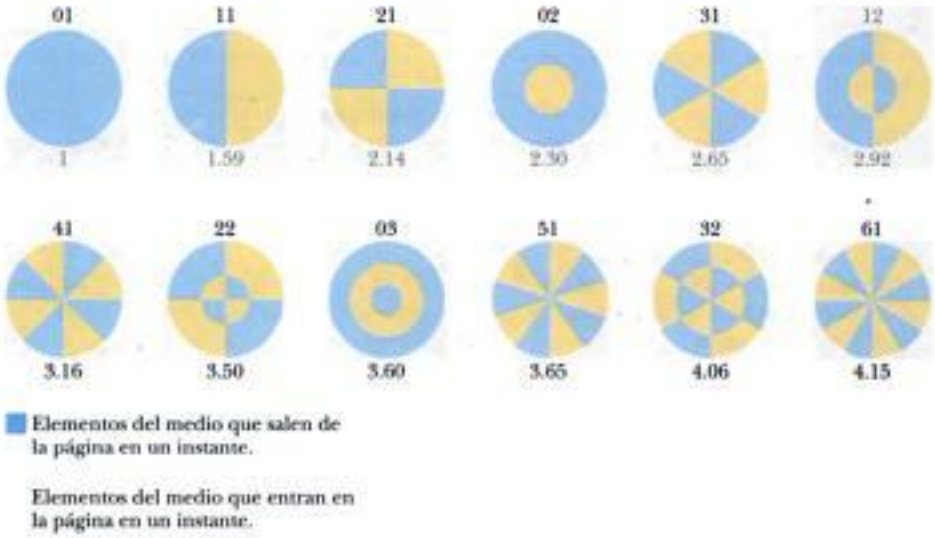


Figura 18.21 Representación de algunos de los posibles modos normales en una membrana circular fija en su perímetro. El par de números arriba de cada figura corresponde al número de nodos radiales y al número de nodos circulares. Abajo de cada figura está un factor por el cual la frecuencia del modo es mayor que el del modo 01. Las frecuencias de oscilación no forman una serie armónica porque estos factores no son enteros. En cada diagrama, elementos de la membrana en cualquiera de los lados de una línea nodal se mueven en direcciones opuestas, como lo indican los colores. (*Adaptado de T. D. Rossing.* The Science of Sound, 2nd ed, *Reading, Massachusets, Addison-Wesley Publishing Co., 1990.*)

Materiał chroniony prawem autorskim

curvas a lo largo de las que no hay desplazamiento de los elementos del medio. El modo normal más bajo, que tiene una frecuencia f_1, contiene sólo una curva nodal; esta curva corre alrededor del borde exterior de la membrana. Los otros posibles modos normales muestran curvas nodales adicionales que son círculos y rectas que corren por el diámetro de la membrana.

18.7 Batimientos: interferencia en el tiempo

Los fenómenos de interferencia de los que hemos estado tratando hasta aquí comprenden la superposición de dos o más ondas que tienen la misma frecuencia. Como la amplitud de la oscilación de elementos del medio varía con la posición en el espacio del elemento, a este fenómeno lo llamamos *interferencia espacial*. Las ondas estacionarias en cuerdas y tubos son ejemplos comunes de interferencia espacial.

Ahora consideremos otro tipo de interferencia, uno que resulta de la superposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente *diferentes*. En este caso, cuando las dos ondas se observan en el punto de superposición, están periódicamente en fase y fuera de fase. Esto es, hay una alternación *temporal* (de tiempo) entre interferencia constructiva y destructiva. Como consecuencia de esto, a este fenómeno le damos el nombre de *interferencia en tiempo* o *interferencia temporal*. Por ejemplo, si dos diapasones de frecuencias ligeramente diferentes son pulsados, se escucha un sonido de amplitud que varía periódicamente. Este fenómeno se llama **batimiento:**

Definición de batimiento

Batimiento es la variación periódica en amplitud en un punto dado debido a la superposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente diferentes.

El número de máximos de amplitud que escuchamos por segundo, o *frecuencia de batimiento*, es igual a la diferencia en frecuencia entre las dos fuentes, como demostraremos a continuación. La máxima frecuencia de batimiento que el oído humano puede captar es de unos 20 batimientos por segundo. Cuando la frecuencia de batimiento excede de este valor, los batimientos se mezclan con los sonidos que las producen, de modo que no se pueden distinguir.

Un afinador de pianos puede usar batimientos para afinar un instrumento de cuerdas al "pulsar" una nota contra un tono de referencia de frecuencia conocida. El afinador puede entonces ajustar la tensión de la cuerda hasta que la frecuencia del sonido que emita sea igual a la frecuencia del tono de referencia. El afinador hace esto al apretar o aflojar la cuerda hasta que los pulsos producidos por ella y la fuente de referencia sean demasiado poco frecuentes para distinguirlas.

Considere dos ondas de sonido de igual amplitud que se desplazan por un medio con frecuencias ligeramente diferentes f_1 y f_2. Usamos las ecuaciones semejantes a la ecuación 16.10 para representar las funciones de onda para estas dos ondas en un punto que escogemos como $x = 0$:

$$y_1 = A\cos\omega_1 t = A\cos 2\pi f_1 t$$
$$y_2 = A\cos\omega_2 t = A\cos 2\pi f_2 t$$

Al usar el principio de superposición, encontramos que la función de onda resultante en este punto es

$$y = y_1 + y_2 = A(\cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t)$$

La identidad trigonométrica

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Materiał chroniony prawem autorskim

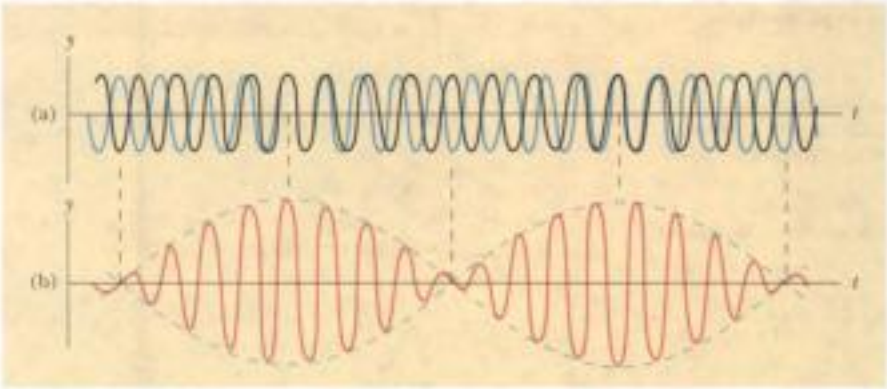


Figura activa 18.22 Se forman batimientos por la combinación de dos ondas de frecuencias ligeramente diferentes. (a) Ondas individuales. (b) La onda combinada tiene una amplitud (línea interrumpida) que oscila en el tiempo.

En el vínculo **Active Figures** *en* **http://www.pse6.com,** *usted podrá seleccionar las dos frecuencias y ver los pulsos correspondientes.*

nos permite escribir la expresión para y como

$$y = \left[2A \cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right) t\right] \cos 2\pi \left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right) t \tag{18.13}$$

Resultante de dos ondas de frecuencias diferentes pero igual amplitud

Las gráficas de ondas individuales y la onda resultante se muestran en la figura 18.22. De los factores en la ecuación 18.13, vemos que el sonido resultante para un escucha que esté de pie en cualquier punto dado tiene una frecuencia efectiva igual a la frecuencia promedio $(f_1 + f_2)/2$ y una amplitud dada por la expresión en paréntesis rectangulares:

$$A_{\text{resultante}} = 2A \cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right) t \tag{18.14}$$

Esto es, la **amplitud y por lo tanto la intensidad del sonido resultante varían en el tiempo.** La línea azul interrumpida en la figura 18.22b es una representación gráfica de la ecuación 18.14 y es una onda senoidal que varía con frecuencia $(f_1 - f_2)/2$.

Nótese que un máximo en la amplitud de la onda de sonido resultante se detecta siempre que

$$\cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right) t = \pm 1$$

Esto significa que hay *dos* máximos en cada periodo de la onda resultante. Como la amplitud varía con la frecuencia como $(f_1 - f_2)/2$, el número de batimientos por segundo, o frecuencia de batimientos f_{pulso}, es el doble de este valor. Esto es,

$$f_{\text{pulso}} = |f_1 - f_2| \tag{18.15}$$

Frecuencia de batimiento

Por ejemplo, si un diapasón vibra a 438 Hz y un segundo diapasón vibra a 442 Hz, la onda de sonido resultante de la combinación tiene una frecuencia de 440 Hz (la nota musical la) y una frecuencia de batimiento de 4 Hz. Un escucha podría oír una onda de sonido de 440 Hz por medio de un máximo de intensidad cuatro veces cada segundo.

Pregunta rápida 18.9 Una persona está afinando una guitarra al comparar el sonido de la cuerda con la de un diapasón estacionario. Observa una frecuencia de batimiento de 5 Hz cuando ambos sonidos están presentes. Aprieta la cuerda de la guitarra y la frecuencia de batimiento sube a 8 Hz. Para afinar la cuerda exactamente al diapasón, debe (a) continuar apretando la cuerda, (b) aflojar la cuerda, (c) imposible de determinar.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 18.8 Las cuerdas de piano desafinadas

Dos cuerdas idénticas de piano, de longitud 0.750 m, están afinadas cada una exactamente a 440 Hz. La tensión en una de las cuerdas se aumenta luego en 1.0%. Si ahora son golpeadas, ¿cuál es la frecuencia de batimiento entre las fundamentales de las dos cuerdas?

Solución Encontramos la razón entre frecuencias si la tensión en una cuerda es 1.0% mayor que la otra:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{(v_2/2L)}{(v_1/2L)} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{T_2/\mu}}{\sqrt{T_1/\mu}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{\frac{1.010T_1}{T_1}}$$
$$= 1.005$$

Por lo tanto, la frecuencia de la cuerda apretada es

$$f_2 = 1.005f_1 = 1.005(440\text{ Hz}) = 442\text{ Hz}$$

y la frecuencia de pulsación es

$$f_{\text{pulso}} = 442\text{ Hz} - 440\text{ Hz} = \mathbf{2\ Hz.}$$

18.8 Patrones de onda no senoidales

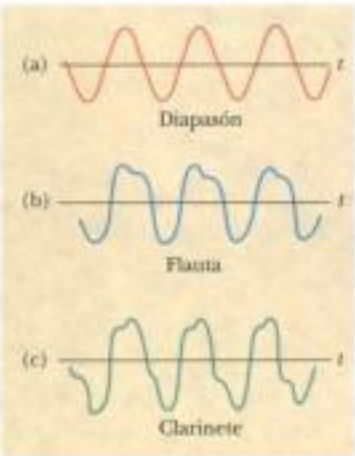


Figura 18.23 Figuras de onda de sonido producidas por (a) un diapasón, (b) una flauta, y (c) un clarinete, cada una de aproximadamente la misma frecuencia. (*Adaptado de C. A. Culver,* Musical Acoustics, 4th ed., *New York, McGraw-Hill Company, 1956,* p.128.)

Los patrones de onda de sonido producidas por la mayor parte de instrumentos musicales son no senoidales. Las figuras características producidas por un diapasón, una flauta y un clarinete, cada uno ejecutando la misma nota, se ilustran en la figura 18.23. Cada instrumento tiene su propio patrón característico. Nótese, sin embargo, que a pesar de la diferencia en patrones, cada patrón es periódico. Este punto es importante para nuestro análisis de estas ondas.

Es relativamente fácil distinguir los sonidos de un violín y un saxófono incluso cuando estén ejecutando la misma nota. Por otra parte, una persona no capacitada en música puede tener dificultad para distinguir una nota ejecutada en un clarinete de la misma nota ejecutada en un oboe. Podemos usar el patrón de las ondas de sonido de varias fuentes para explicar estos efectos.

Esto es en contraste con un instrumento musical que hace un ruido, por ejemplo un tambor, en el que la combinación de frecuencias no forman una serie armónica. Cuando se combinan las frecuencias que son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental, el resultado es un sonido *musical.* Un escucha puede asignar un tono al sonido, con base en la frecuencia fundamental. El tono es una reacción psicológica a un sonido que permite al escucha poner el sonido en una escala de bajo o alto (grave o agudo). Las combinaciones de frecuencias que no son múltiplos enteros de una fundamental resultan en un *ruido,* más que un sonido musical. Es mucho más difícil para un escucha asignar un tono a un ruido que a un sonido musical.

Los patrones de onda producidos por un instrumento musical son el resultado de la superposición de varias armónicas. Esta superposición resulta en la correspondiente sonoridad de tonos musicales. La respuesta perceptiva humana asociada con varias mezclas de armónicas es la *calidad* o *timbre* del sonido. Por ejemplo, el sonido de la trompeta se percibe que tiene una calidad "metálica" (es decir, hemos aprendido a asociar el adjetivo *metálico* con ese sonido); esta calidad hace posible que distingamos el sonido de una trompeta del de un saxófono, cuya calidad se percibe como "agudo". El clarinete y oboe, sin embargo, contienen columnas de aire excitadas por lengüetas; por esta similitud, es más difícil que el oído los distinga con base en la calidad de su sonido.

El problema de analizar figuras de onda no senoidales aparece a primera vista como una tarea formidable. No obstante, si la onda es periódica, es posible representarla tan cercanamente como se desee por la combinación de un gran número de ondas senoidales que forman una serie armónica. De hecho, podemos representar cualquier función periódica como una serie de términos seno y coseno al usar una técnica matemática basada en el **teorema de Fourier.**[3] La correspondiente suma de términos que representa la onda periódica

[3] Creado por Jean Baptiste Joseph Fourier (1786-1830).

Materiał chroniony prawem autorskim

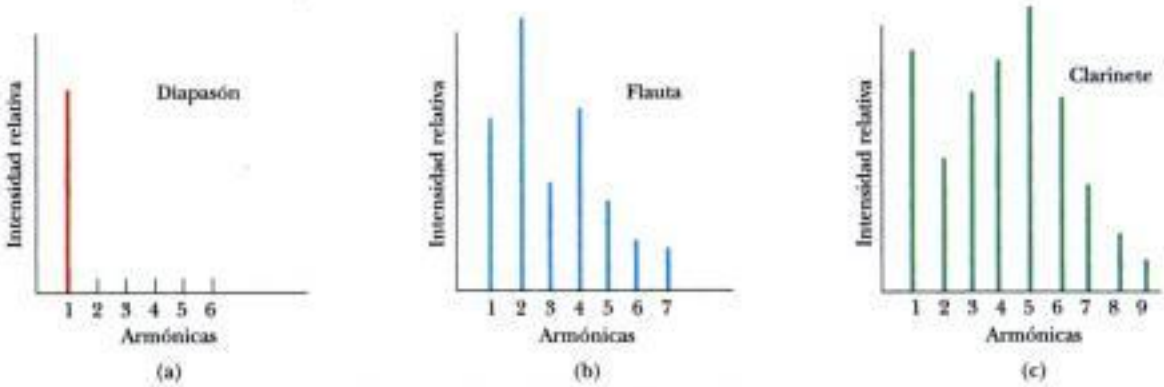


Figura 18.24 Armónicas de ondas mostradas en la figura 18.23. Nótense las variaciones en intensidad de las diversas armónicas. (*Adaptado de C. A. Culver,* Musical Acoustics, 4th ed., *New York, McGraw-Hill Company, 1956.*)

se llama **serie de Fourier.** Sea $y(t)$ cualquier función que es periódica en tiempo con periodo T, tal que $y(t + T) = y(t)$. El teorema de Fourier expresa que esta función se puede escribir como

$$y(t) = \sum_n (A_n \operatorname{sen} 2\pi f_n t + B_n \cos 2\pi f_n t) \tag{18.16}$$

Teorema de Fourier

donde la frecuencia más baja es $f_1 = 1/T$. Las frecuencias más altas son múltiplos enteros de la fundamental, $f_n = nf_1$, y los coeficientes A_n y B_n representan las amplitudes de las diversas ondas. La figura 18.24 representa un análisis armónico de las ondas que se ven en la figura 18.23. Nótese que un diapasón al que se le dé un toque produce sólo una armónica (la primera) mientras que la flauta y el clarinete producen la primera armónica y muchas más altas.

Nótese la variación en intensidad relativa de las diversas armónicas para la flauta y el clarinete. En general, cualquier sonido musical está formado por una frecuencia fundamental f más otras frecuencias que son múltiplos enteros de f, todos con intensidades diferentes.

¡ADVERTENCIA!

18.4 Tono vs. frecuencia

No confundir el término *tono* con *frecuencia.* La frecuencia es la medición física del número de oscilaciones por segundo. El tono es una reacción psicológica al sonido que hace posible que una persona ponga el sonido en una escala de alta a baja, o de agudo a grave. En consecuencia, la frecuencia es el estímulo y el tono es la respuesta. Aun cuando el tono está relacionado en su mayor parte (pero no por completo) con la frecuencia, no son lo mismo. Una frase como "el tono del sonido" es incorrecta porque el tono no es una propiedad física del sonido.

(a) (b) (c)

Cada instrumento musical tiene su propio sonido característico y mezcla de armónicas. Los instrumentos ilustrados son (a) violín, (b) saxófono, y (c) trompeta.

Fotografías cortesía de (a) © 1989 Gary Buss/FPG; (b) y (c) © 1989 Richard Laird/FPG

Materiał chroniony prawem autorskim

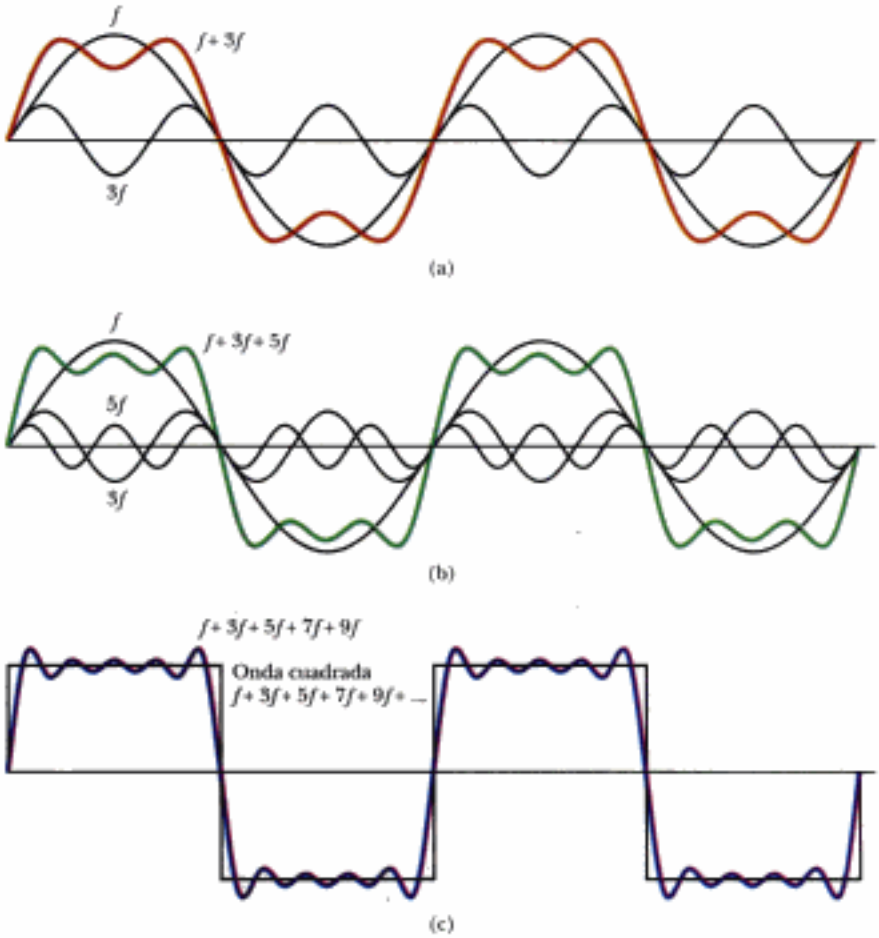


Figura activa 18.25 Síntesis de Fourier de una onda cuadrada, que está representada por la suma de múltiplos impares de la primera armónica, que tiene una frecuencia f. (a) Se suman ondas de frecuencia f y $3f$. (b) Se suma una armónica impar más de frecuencia $5f$. (c) La curva de síntesis se aproxima más cercanamente a la onda cuadrada cuando se suman frecuencias impares hasta $9f$.

En el vínculo* Active Figures *en* http://www.pse6.com, *usted podrá sumar armónicas con frecuencias más altas a 9f para tratar de sintetizar una onda cuadrada.

Hemos estudiado el *análisis* de una onda usando para ello el teorema de Fourier. El análisis comprende la determinación de los coeficientes de las armónicas de la ecuación 18.16 a partir del conocimiento de la onda. También es posible realizar el proceso inverso, llamado *síntesis de Fourier*. En este proceso, las diversas armónicas se suman para formar una onda resultante. Como ejemplo de la síntesis de Fourier, considere la construcción de una onda cuadrada, como se ve en la figura 18.25. La simetría de la onda cuadrada resulta en sólo múltiplos impares de la frecuencia fundamental que se combinan en su síntesis. En la figura 18.25a, la curva anaranjada muestra la combinación de f y $3f$. En la figura 18.25b, hemos sumado $5f$ a la combinación y obtenido la curva verde. Nótese cómo se aproxima la forma general de la onda cuadrada, aun cuando las porciones superiores e inferiores no son planas como deberían ser.

La figura 18.25c muestra el resultado de sumar frecuencias impares hasta $9f$. Esta aproximación (curva color violeta) a la onda cuadrada es mejor que las aproximaciones de las partes a y b. Para aproximar la onda cuadrada tanto como sea posible, necesitaríamos sumar todos los múltiplos impares de la frecuencia fundamental, hasta la frecuencia infinita.

Con el uso de tecnología moderna, electrónicamente podemos generar sonidos musicales al mezclar diferentes amplitudes de cualquier número de armónicas. Estos sintetizadores electrónicos musicales de uso tan generalizado son capaces de producir una variedad infinita de tonos musicales.

Materiał chroniony prawem autorskim

RESUMEN

El **principio de superposición** especifica que cuando dos o más ondas se mueven en un medio, el valor de la función de onda resultante es igual a la suma algebraica de los valores de las funciones de onda individuales.

Cuando se superponen dos ondas viajeras que tienen amplitudes y frecuencias iguales, la onda resultante tiene una amplitud que depende del ángulo de fase ϕ entre las dos ondas. Se presenta **interferencia constructiva** cuando las dos ondas están en fase, correspondiente a $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ rad. Existe **interferencia destructiva** cuando las dos ondas están 180° fuera de fase, correspondiente a $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ rad.

Se forman **ondas estacionarias** por la superposición de dos ondas senoidales que tengan frecuencia, amplitud y longitud de onda iguales pero que se desplazan en direcciones opuestas. La onda estacionaria resultante está descrita por la función de onda

$$y = (2A \operatorname{sen} kx) \cos \omega t \tag{18.3}$$

En consecuencia, la amplitud de la onda estacionaria es $2A$, y la amplitud del movimiento armónico simple de cualquier partícula del medio varía de acuerdo con su posición como $2A \operatorname{sen} kx$. Los puntos de cero amplitud (llamados **nodos**) se presentan en $x = n\lambda/2$ ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$). Los puntos de máxima amplitud (llamados **antinodos**) se presentan en $x = n\lambda/4$ ($n = 1, 3, 5, \ldots$). Los antinodos adyacentes están separados por una distancia $\lambda/2$. Los nodos adyacentes también están separados por una distancia $\lambda/2$.

Las frecuencias naturales de vibración de una cuerda tensa de longitud L y fija en ambos extremos están cuantizadas y dadas por

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{18.8}$$

donde T es la tensión de la cuerda y μ es su densidad lineal de masa. Las frecuencias naturales de vibración $f_1, 2f_1, 3f_1, \ldots$ forman una **serie armónica.**

Un sistema oscilatorio está en **resonancia** con alguna fuerza de excitación siempre que la frecuencia de la fuerza de excitación sea igual a una de las frecuencias naturales del sistema. Cuando el sistema es resonante, responde al oscilar con una amplitud relativamente grande.

Pueden producirse ondas estacionarias en una columna de aire dentro de un tubo. Si el tubo está abierto en ambos extremos, todas las armónicas están presentes, y las frecuencias naturales de oscilación son

$$f_n = n\frac{v}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{18.11}$$

Si el tubo está abierto en un extremo y cerrado en el otro, sólo las armónicas impares están presentes y las frecuencias naturales de oscilación son

$$f_n = n\frac{v}{4L} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{18.12}$$

El fenómeno de **batimiento** es la variación periódica en intensidad en un punto dado debida a la superposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente diferentes.

PREGUNTAS

1. El fenómeno de interferencia de onda, ¿se aplica sólo a ondas senoidales?

2. Cuando pulsos de la misma forma que se mueven en direcciones opuestas en una cuerda se pasan el uno al otro, hay un instante en el que la cuerda no muestra desplazamiento desde la posición de equilibrio en ningún punto. ¿Ha desaparecido en este instante la energía llevada por los pulsos? Si no es así, ¿dónde está?

3. ¿Dos pulsos que se desplazan en direcciones opuestas en la misma cuerda, ¿pueden reflejarse entre sí?

4. Cuando dos ondas interfieren, ¿puede la amplitud de la onda resultante ser mayor que cualquiera de las ondas originales? ¿Bajo qué condiciones?

5. Para ciertas posiciones de la sección movible que se ilustra en la figura 18.5 no se detecta sonido en el receptor, situación que co-

Materiał chroniony prawem autorskim

3. Dos pulsos que se desplazan en la misma cuerda están descritos por

$$y_1 = \frac{5}{(3x - 4t)^2 + 2} \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{-5}{(3x + 4t - 6)^2 + 2}$$

(a) ¿En qué dirección se desplaza cada pulso? (b) ¿En qué tiempo se cancelan los dos en todas partes? (c) ¿En qué punto se cancelan siempre los dos puntos?

4. Dos ondas se desplazan en la misma dirección a lo largo de una cuerda estirada. Las ondas están 90.0° fuera de fase. Cada onda tiene una amplitud de 4.00 cm. Encuentre la amplitud de la onda resultante.

5. Dos ondas viajeras senoidales están descritas por las funciones de onda

$$y_1 = (5.00 \text{ m}) \operatorname{sen}[\pi(4.00x - 1\,200t)]$$

y

$$y_2 = (5.00 \text{ m}) \operatorname{sen}[\pi(4.00x - 1\,200t - 0.250)]$$

donde x, y_1 y y_2 están en metros y t está en segundos. (a) ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante? (b) ¿Cuál es la frecuencia de la onda resultante?

6. Dos ondas senoidales idénticas con longitudes de onda de 3.00 m se desplazan en la misma dirección a una rapidez de 2.00 m/s. La segunda onda se origina desde el mismo punto que la primero, pero en un tiempo posterior. Determine el mínimo intervalo posible entre los momentos de inicio de las dos ondas si la amplitud de la onda resultante es la misma que la de cada una de las dos ondas iniciales.

7. **Problema de repaso.** Una serie de pulsos, cada uno de amplitud 0.150 m, es enviado por una cuerda que está atada a un poste en un extremo. Los pulsos se reflejan en el poste y se regresan a lo largo de la cuerda sin pérdida de amplitud. ¿Cuál es el desplazamiento neto en un punto de la cuerda donde dos pulsos se están cruzando, (a) si la cuerda está rígidamente atada al poste? (b) si el extremo en el que ocurre la reflexión está libre para deslizarse?

8. Dos altavoces se colocan en una pared a 2.00 m uno del otro. Un escucha está de pie a 3.00 m de la pared directamente frente a uno de los altavoces. Un solo oscilador excita los dos altavoces a una frecuencia de 300 Hz. (a) ¿Cuál es la diferencia de fase entre las dos ondas cuando llegan al observador? (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es la frecuencia más cercana a 300 Hz a la que el oscilador puede ajustarse de modo que el observador escuche un sonido mínimo?

9. Dos altavoces están excitados por el mismo oscilador cuya frecuencia es de 200 Hz. Están colocados en un poste vertical a una distancia de 4.00 m entre sí. Un hombre camina directamente hacia el altavoz más bajo en una dirección perpendicular al poste, como se ve en la figura P18.9. (a) ¿Cuántas veces escuchará un mínimo en intensidad de sonido, y (b) a qué distancia estará él del poste en estos momentos? Tome la rapidez del sonido como 330 m/s y no haga caso de ningunas reflexiones de sonido provenientes del suelo.

10. Dos altavoces están excitados por el mismo oscilador cuya frecuencia es f. Están colocados en un poste vertical a una distancia d entre sí. Un hombre camina directamente hacia el altavoz más bajo en una dirección perpendicular al poste, como se ve en la figura P18.9. (a) ¿Cuántas veces escuchará un mínimo en intensidad de sonido, y (b) a qué distancia estará él del poste en estos momentos? Represente con v la rapidez del sonido, y suponga que el suelo no refleja sonido.

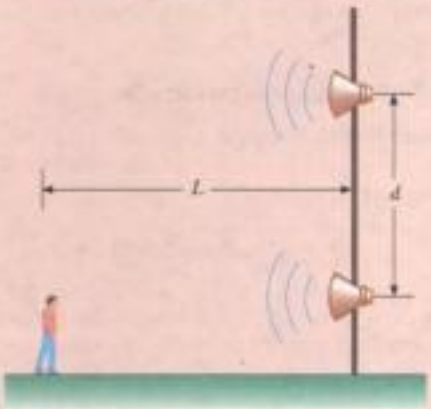


Figura P18.9 Problemas 9 y 10.

11. Dos ondas senoidales en una cuerda están definidas por las funciones

$$y_1 = (2.00 \text{ cm}) \operatorname{sen}(20.0x - 32.0t)$$

y

$$y_2 = (2.00 \text{ cm}) \operatorname{sen}(25.0x - 40.0t)$$

donde y_1, y_2 y x es en centímetros y t es en segundos. (a) ¿Cuál es la diferencia de fase entre estas dos ondas en el punto $x = 5.00$ cm en $t = 2.00$ s? (b) ¿Cuál es el valor x positivo más cercano al origen para el cual las dos fases difieren en $\pm\pi$ en $t = 2.00$ s? (Aquí es donde las dos ondas se suman a cero.)

12. Dos altavoces idénticos colocados a 10.0 m uno del otro son excitados por el mismo oscilador con una frecuencia de $f = 21.5$ Hz (figura P18.12). (a) Explique por qué un receptor en el punto A registra un mínimo en intensidad de sonido desde los dos altavoces. (b) Si el receptor se mueve en el plano de los altavoces, ¿qué trayectoria debe tomar para que la intensidad continúe en un mínimo? Esto es, determine la relación entre x y y (las coordenadas

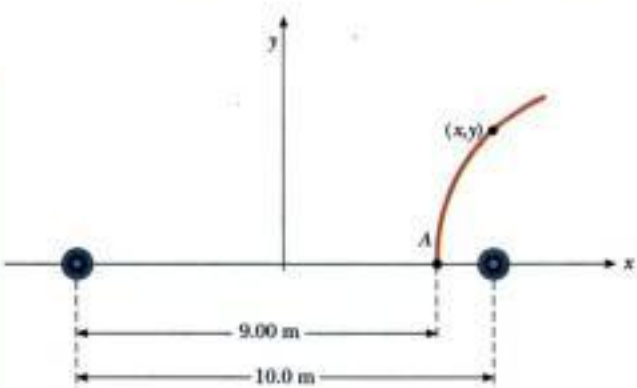


Figura P18.12

Materiał chroniony prawem autorskim

24. La cuerda superior de una guitarra tiene una frecuencia fundamental de 330 Hz cuando se la deja vibrar en toda su longitud, desde el cuello hasta el puente. Un traste se instala para limitar la vibración a exactamente los dos tercios inferiores de la cuerda. (a) Si la cuerda se presiona en este traste y se pulsa, ¿cuál es la nueva frecuencia fundamental? (b) **¿Qué pasaría si?** El guitarrista puede ejecutar una "armónica natural" al tocar ligeramente la cuerda en el lugar de este traste y pulsar la cuerda alrededor de un sexto de la longitud desde el puente. ¿Qué frecuencia se escuchará entonces?

25. Una cuerda de longitud L, masa por unidad de longitud μ, y tensión T está vibrando a su frecuencia fundamental. ¿Qué efecto tendrá lo siguiente en la frecuencia fundamental? (a) La longitud de la cuerda se duplica, con todos los otros factores mantenidos igual. (b) La masa por longitud unitaria se duplica, con todos los otros factores mantenidos constantes. (c) La tensión se duplica, con todos los otros factores mantenidos constantes.

26. Una cuerda de guitarra de 60.000 cm bajo una tensión de 50.000 N tiene una masa por longitud unitaria de 0.100 00 g/cm. ¿Cuál es la frecuencia resonante más alta que puede escuchar una persona capaz de escuchar frecuencias hasta de 20 000 Hz?

27. Una cuerda de la nota la de un violonchelo vibra en su primer modo normal con una frecuencia de 220 Hz. El segmento en vibración mide 70.0 cm de largo y tiene una masa de 1.20 g. (a) Encuentre la tensión en la cuerda. (b) Determine la frecuencia de vibración cuando la cuerda vibra en tres segmentos.

28. Una cuerda de violín tiene una longitud de 0.350 m y está afinada en la nota de sol de concierto, con $f_{sol} = 392$ Hz. ¿Dónde debe poner su dedo una violinista para ejecutar una nota la de concierto, con $f_{la} = 440$ Hz? Si esta posición ha de permanecer correcta a la mitad del ancho de un dedo (es decir, a no más de 0.600 cm), ¿cuál es el máximo cambio permisible en porcentaje en la tensión de la cuerda?

29. **Problema de repaso.** Una esfera de masa M está sostenida por una cuerda que pasa sobre una varilla ligera horizontal de longitud L (figura P18.29). Dado que el ángulo es θ y que f representa la frecuencia fundamental de las ondas estacionarias en la porción de la cuerda que está sobre la varilla, determine la masa de esta porción de la cuerda.

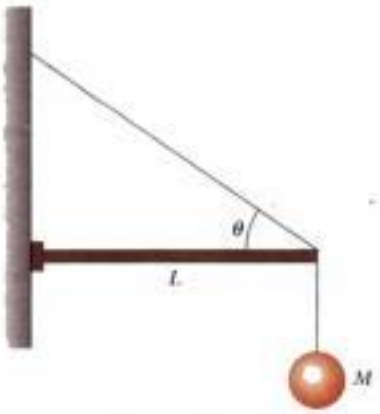


Figura P18.29

30. **Problema de repaso.** Un cilindro de cobre cuelga en el fondo de un alambre de acero de masa insignificante. El extremo superior del alambre está fijo. Cuando se pulsa el alambre, emite sonido con una frecuencia fundamental de 300 Hz. Si el cilindro de cobre se sumerge entonces en agua, de modo que la mitad de su volumen quede bajo la superficie del agua, determine la nueva frecuencia fundamental.

31. Una onda estacionaria se observa en un alambre delgado con una longitud de 3.00 m. La ecuación de la onda es

$$y = (0.002 \text{ m}) \operatorname{sen}(\pi x) \cos(\pi t)$$

donde x está en metros y t está en segundos. (a) ¿Cuántas ondas exhibe esta figura? (b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de vibración del alambre? (c) **¿Qué pasaría si?** Si la frecuencia original se mantiene constante y la tensión del alambre se aumenta en un factor de 9, ¿cuántas ondas están presentes en la nueva figura?

Sección 18.4 Resonancia

32. Las cadenas que sujetan el columpio de un niño miden 2.00 m de largo. ¿A qué frecuencia debe empujar su hermano mayor para que el niño se columpie con la máxima amplitud?

33. Un temblor de tierra puede producir un *seiche* (variación anormal rítmica de la altura de la marea o del nivel de lagos por el viento) en un lago, en el que el agua chapotea de un lado para otro con amplitud sorprendentemente grande y largos periodos. Considere un *seiche* producido en un charco rectangular de una granja, como se ve en la sección transversal de la figura P18.33. (La figura no está dibujada a escala). Suponga que el charco mide 9.15 m de largo y de ancho y profundidad uniformes. Se mide que un pulso producido en un extremo llega al otro extremo en 2.50 s. (a) ¿Cuál es la rapidez de la onda? (b) Para producir el *seiche*, varias personas están de pie en la margen en un extremo y escarban con sus palas, moviéndolas en movimiento armónico simple. ¿Cuál debe ser la frecuencia de este movimiento?

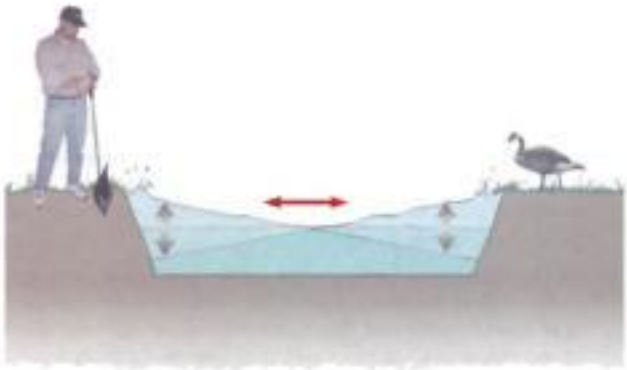


Figura P18.33

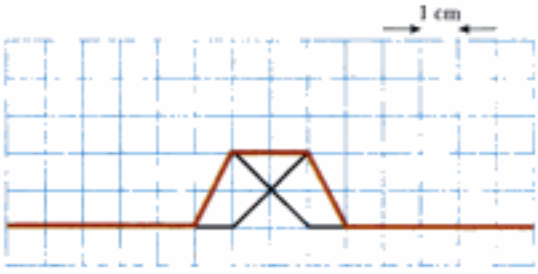
34. La bahía de Fundy, Nova Scotia, tiene las mareas más altas del mundo, como se sugiere en las fotografías de la página 452. Suponga que enmedio del océano y en la boca de la bahía, el gradiente de gravedad de la Luna y la rotación de la Tierra hacen que la superficie del agua oscile con una amplitud de unos pocos centí-

Materiał chroniony prawem autorskim

70. Un reloj de cuarzo contiene un oscilador de cristal en la forma de un bloque de cuarzo que vibra al contraerse y expandirse. Dos caras opuestas del bloque, a 7.05 mm de separación, son antinodos que se mueven alternadamente uno hacia el otro y alejándose entre sí. La mitad plana entre estas dos caras es un nodo de la vibración. La rapidez del sonido en cuarzo es 3.70 km/s. Encuentre la frecuencia de la vibración. Un voltaje eléctrico oscilante acompaña la oscilación mecánica, es decir, el cuarzo se describe como *piezoeléctrico*. Un circuito eléctrico alimenta energía para mantener la oscilación y también cuenta los pulsos de voltaje para llevar el tiempo.

Respuestas a las *preguntas rápidas*

18.1 La forma de la cuerda en $t = 0.6$ s se ilustra a continuación.



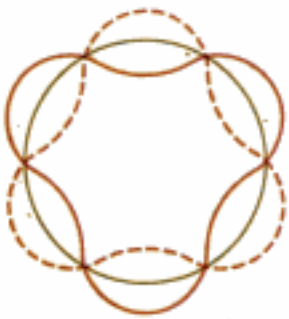
18.2 (c) Los pulsos se cancelan por completo uno al otro en términos de desplazamiento de elementos de la cuerda desde el equilibrio, pero la cuerda todavía está en movimiento. Un corto tiempo después, la cuerda será desplazada una vez más y los pulsos se habrán pasado mutuamente.

18.3 (a) La onda que se ilustra en la parte baja de la figura 18.9a corresponde a la posición extrema de la cuerda. Todos los elementos de la cuerda momentáneamente están en reposo.

18.4 (d) Cerca de un punto nodal, elemento de un lado del punto se mueven hacia arriba en este instante y elementos del otro lado se mueven hacia abajo.

18.5 (d) La opción (a) es incorrecta porque el número de nodos es uno mayor que el número de antinodos. La opción (b) es verdadera sólo para la mitad de los nodos; no es verdadera para ningún modo de número impar. La opción (c) será correcta si sustituimos la palabra *nodos* con *antinodos*.

18.6 Para cada frecuencia natural del vaso, la onda estacionaria debe "ajustar" exactamente alrededor del borde. En la figura 18.17a vemos tres antinodos en el lado cercano del vaso, y por lo tanto debe haber otros tres en el lado lejano. Esto corresponde a tres ondas completas. En una vista superior, la onda se asemeja a esto (aun cuando hemos exagerado grandemente la amplitud):



18.7 (b) Con ambos extremos abiertos, el tubo tiene una frecuencia fundamental dada por la ecuación 18.11. $f_{\text{abierto}} = v/2L$. Con un extremo cerrado, el tubo tiene una frecuencia fundamental dada por la ecuación 18.12:

$$f_{\text{cerrado}} = \frac{v}{4L} = \frac{1}{2}\frac{v}{2L} = \frac{1}{2}f_{\text{abierto}}$$

18.8 (c) El aumento en temperatura hace que la rapidez del sonido aumente. De acuerdo con la ecuación 18.11, esto resultará en un aumento en la frecuencia fundamental de un tubo de órgano dado.

18.9 (b) Apretar la cuerda ha causado que las frecuencias se alejen, con base en el aumento en la frecuencia de batimientos.

Materiał chroniony prawem autorskim

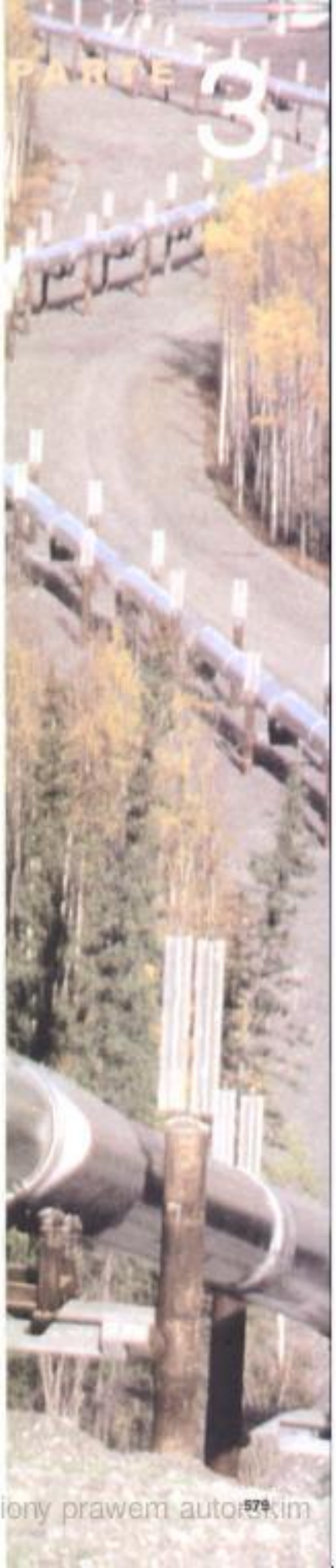
Termodinámica

PARTE 3

Ahora dirigimos nuestra atención al estudio de la termodinámica, que comprende situaciones en las que la temperatura o estado (sólido, líquido, gaseoso) de un sistema cambia debido a transferencias de energía. Como veremos, la termodinámica es muy satisfactoria para explicar las propiedades generales de la materia y la correlación entre estas propiedades y la mecánica de átomos y moléculas.

Históricamente, el perfeccionamiento de la termodinámica estuvo paralelo al de la teoría atómica de la materia. En la década de 1820, experimentos químicos realizados habían dado una sólida evidencia de la existencia de los átomos. En aquel tiempo, los científicos reconocieron que debía existir un enlace entre termodinámica y la estructura de la materia. En 1827, el botánico Robert Brown reportó que granos de polen suspendidos en un líquido se movían erráticamente de un lugar a otro, como si estuvieran bajo agitación constante. En 1905, Albert Einstein utilizó la teoría cinética para explicar la causa de este errático movimiento, que hoy se conoce como *movimiento browniano*. Einstein explicó este fenómeno al suponer que los granos están bajo constante bombardeo por moléculas "invisibles" del líquido, que a su vez se movían erráticamente. Esta explicación dio a otros sabios el conocimiento del concepto de movimiento molecular y dio crédito a la idea de que la materia está formada por átomos. Se formó así un enlace entre el mundo de hoy y el de elementos diminutos, invisibles, que forman este mundo.

La termodinámica también aborda problemas más prácticos. ¿Se ha preguntado el lector cómo es que un refrigerador enfría su contenido, qué tipos de transformaciones se presentan en una planta generadora de electricidad o en el motor de un automóvil, o qué ocurre a la energía cinética de un objeto en movimiento cuando éste llega al reposo? Las leyes de la termodinámica se pueden usar para dar explicaciones para éstos y otros fenómenos. ■



◄ *Oleoducto Alyeska cerca del río Tazlina en Alaska. El petróleo del oleoducto es caliente y la energía que se transfiere de la tubería podría derretir el suelo permanentemente helado y que es muy sensible al ambiente. Las estructuras con aletas en la parte superior de los postes de soporte son radiadores térmicos que permiten que se transfiera energía al aire para proteger el suelo. (Topham Picturepoint/The Image Works)*

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 19

Temperatura

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

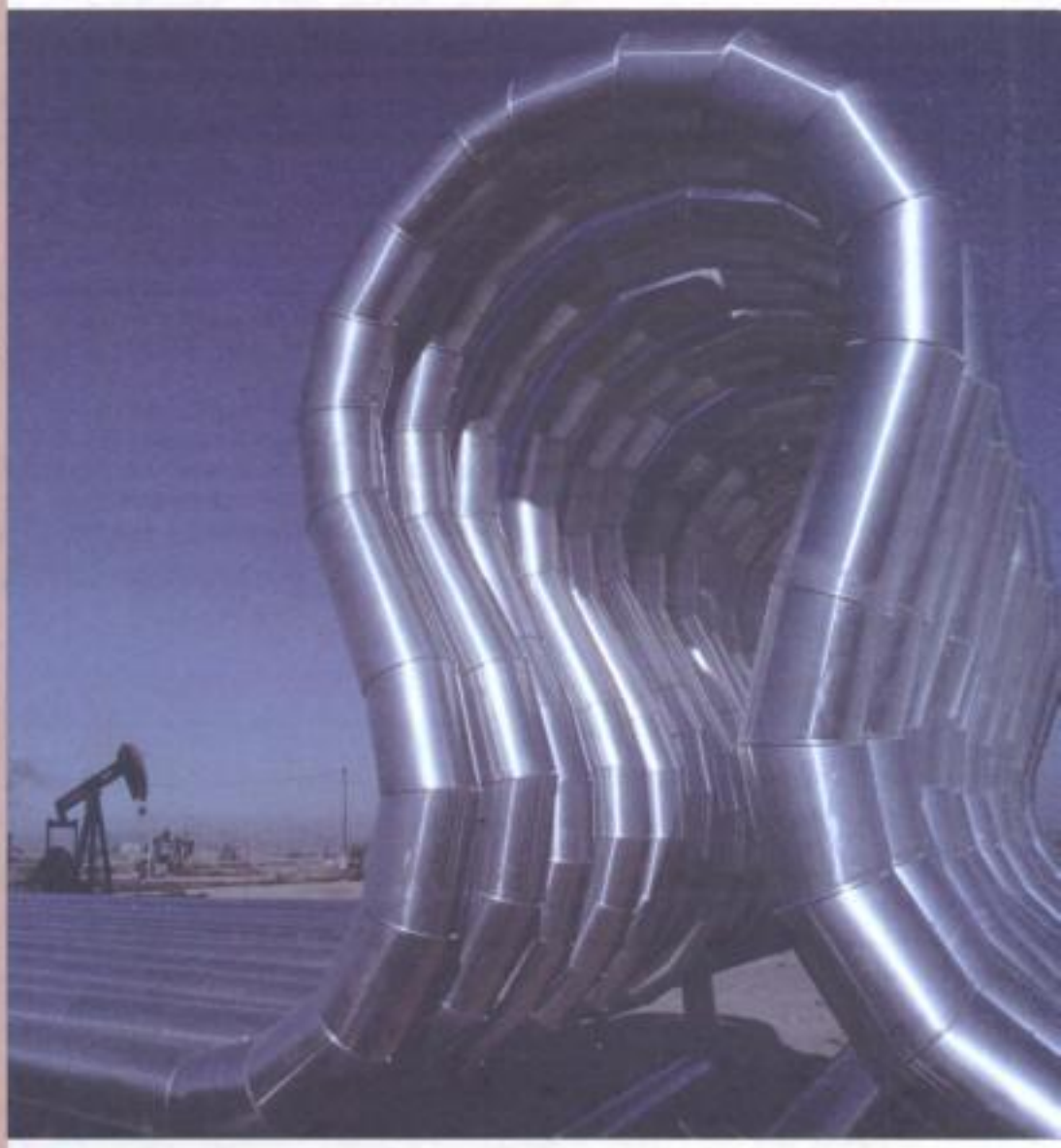
19.1 Temperatura y la ley cero de la termodinámica

19.2 Termómetros y la escala Celsius de temperatura

19.3 El termómetro de gas de volumen constante y la escala absoluta de temperatura

19.4 Expansión térmica de sólidos y líquidos

19.5 Descripción macroscópica de un gas ideal



▲ *¿Por qué alguien que diseñe un oleoducto instala estas extrañas vueltas? Los oleoductos que transportan líquidos a veces están equipados con vueltas como éstas para compensar la expansión y contracción cuando cambia la temperatura. En este capítulo estudiaremos la expansión térmica. (Lowell Georgia/CORBIS)*

Materiał chroniony prawem autorskim

En nuestro estudio de la mecánica, con todo cuidado definimos conceptos como masa, fuerza y energía cinética para facilitar nuestro método cuantitativo de estudio. De igual modo, una descripción cuantitativa de fenómenos térmicos requiere de cuidadosas definiciones de importantes términos como temperatura, calor y energía interna. Este capítulo se inicia con un análisis de la temperatura y con la descripción de una de las leyes de la termodinámica (la llamada "ley cero").

A continuación consideramos por qué un factor importante, cuando hablamos de fenómenos términos, es la sustancia particular que estamos investigando. Por ejemplo, los gases se dilatan en forma considerable cuando se calientan, mientras que líquidos y sólidos se dilatan sólo ligeramente.

Este capítulo concluye con un estudio de gases ideales en escala macroscópica. Aquí nos interesan las relaciones entre cantidades como presión, volumen y temperatura. En el capítulo 21 examinaremos gases a escala microscópica, usando un modelo que representa los componentes de un gas como pequeñas partículas.

19.1 Temperatura y la ley cero de la termodinámica

A veces asociamos el concepto de temperatura con qué tan caliente o frío se siente un objeto cuando lo tocamos. Así, nuestros sentidos nos dan indicación cualitativa de temperatura. Sin embargo, nuestros sentidos no son confiables y a veces nos confunden. Por ejemplo, si sacamos una charola metálica de cubos de hielo y una caja de cartón de legumbres congeladas del frigorífico, la charola de hielos se siente más fría que la caja, aun cuando ambas están a la misma temperatura. Los dos objetos se sienten diferentes, porque el metal transfiere energía por calor a una escala más alta que el cartón. Lo que necesitamos es un método confiable y reproducible para medir el grado de calor o de frío relativos de objetos en lugar de la rapidez de transferencia de energía. Los científicos han perfeccionado varios termómetros para hacer estas mediciones cuantitativas.

Todos estamos familiarizados con el hecho de que dos objetos que están a diferentes temperaturas iniciales finalmente alcanzan una temperatura intermedia cuando se ponen en contacto uno con otro. Por ejemplo, cuando se mezclan agua caliente y agua fría en una tina de baño, la temperatura final de la mezcla es entre las dos temperaturas. Análogamente, cuando un cubo de hielo se pone en una taza de café caliente, se derrite y baja la temperatura del café.

Para entender el concepto de temperatura, es útil definir dos frases que se usan con frecuencia: contacto térmico y equilibrio térmico. Para captar el significado de contacto térmico, imagine que dos cuerpos se colocan en un recipiente aislado de modo que interactúan entre ellos, pero no con el medio ambiente. Si los cuerpos están a diferentes temperaturas, entre ellos se intercambia energía, incluso si no están inicialmente en contacto físico uno con el otro. Los mecanismos de transferencia de energía del capítulo 7 en los que nos concentraremos son calor y radiación electromagnética. Para los fines de este análisis, suponemos que los dos cuerpos están en **contacto térmico** uno con otro si se puede intercambiar energía mediante estos procesos, debido a una diferencia de temperatura.

Materiał chroniony prawem autorskim

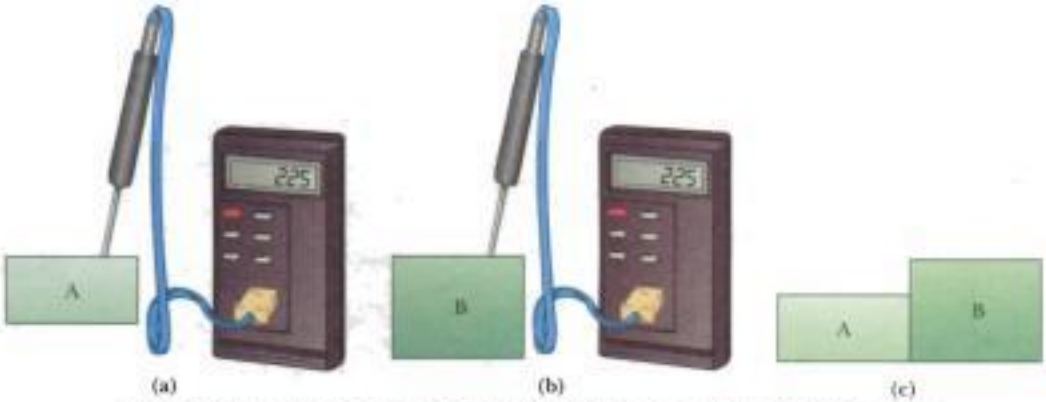


Figura 19.1 Ley cero de la termodinámica. (a) y (b) Si las temperaturas de A y B se miden como iguales al ponerlos en contacto térmico con un termómetro (objeto C), no se intercambia energía entre ellos cuando se colocan en contacto térmico entre sí (c).

El **equilibrio térmico** es una situación en la que dos objetos no intercambian energía por calor o radiación electromagnética si se ponen en contacto térmico.

Consideremos dos objetos A y B, que no estén en contacto térmico, y un tercer objeto C, que es nuestro termómetro. Deseamos determinar si A y B están en equilibrio térmico entre sí. El termómetro (objeto C) se coloca primer en contacto térmico con el objeto A hasta alcanzar equilibrio térmico[1], como se muestra en la figura 19.1a. Desde ese momento, la lectura del termómetro permanece constante y la registramos. El termómetro se retira luego del objeto A y se pone en contacto térmico con el objeto B, como se ve en la figura 19.1b. La lectura se registra de nuevo después de alcanzar equilibrio térmico. Si las dos lecturas son iguales, entonces el objeto A y el objeto B están en equilibrio térmico entre sí. Si se colocan en contacto uno con otro, como se ve en la figura 19.1c, entre ellos no hay intercambio de energía.

Podemos resumir estos resultados en un enunciado conocido como la **Ley Cero de la Termodinámica** (la ley de equilibrio):

Ley Cero de la Termodinámica

Si los objetos A y B están separadamente en equilibrio térmico con un tercer objeto C, entonces A y B están en equilibrio térmico entre sí.

Este enunciado puede demostrarse experimentalmente con toda facilidad, y es muy importante porque hace posible que definamos la temperatura. Podemos considerar la **temperatura** como la propiedad que determine si un objeto está en equilibrio térmico con otros objetos. **Dos objetos en equilibrio térmico entre sí, están a la misma temperatura.** Por el contrario, si dos objetos tienen temperaturas diferentes, entonces no están en equilibrio térmico entre sí.

Pregunta rápida 19.5 Dos objetos, con diferentes tamaños, masas y temperaturas diferentes, se colocan en contacto térmico. La energía se transfiere (a) del objeto más grande al objeto más pequeño, (b) del objeto con más masa al de menos masa, (c) del objeto a temperatura más alta al de temperatura más baja.

[1] Suponemos que se transfiere una energía insignificante entre el termómetro y el objeto A durante el proceso de equilibrio. Sin esta suposición, que también se hace para el termómetro y el objeto B, la medición de la temperatura de un objeto altera el sistema de modo que la temperatura medida es diferente respecto de la temperatura inicial del objeto. En la práctica, siempre que se mida temperatura con un termómetro, se mide el sistema alterado, no el sistema original.

Materiał chroniony prawem autorskim

19.2 Termómetros y la escala Celsius de temperatura

Los termómetros son aparatos que se usan para medir la temperatura de un sistema. Todos los termómetros están basados en el principio de que alguna propiedad física de un sistema cambia cuando modifica la temperatura del sistema. Algunas propiedades físicas que cambian con la temperatura son (1) el volumen de un líquido, (2) las dimensiones de un sólido, (3) la presión de un gas a volumen constante, (4) el volumen de un gas a presión constante, (5) la resistencia eléctrica de un conductor, y (6) el color de un objeto. Se puede establecer una escala de temperatura con base en cualquiera de estas propiedades físicas.

Un termómetro común de uso diario está formado por una masa de líquido, por lo general mercurio o alcohol, que se dilata en un tubo capilar de vidrio cuando se calienta (figura 19.2). En este caso, la propiedad física que cambia es el volumen de un líquido. Cualquier cambio de temperatura entre los límites del termómetro se puede definir como que es proporcional al cambio en longitud de la columna del líquido. El termómetro se puede calibrar al ponerlo en contacto térmico con algunos sistemas naturales que permanecen a temperatura constante. Uno de esos sistemas es una mezcla de agua y hielo en equilibrio térmico a presión atmosférica. En la **escala Celsius de temperatura,** esta mezcla se define como que tiene una temperatura de cero grados Celsius, que se escribe como 0°C; esta temperatura se denomina *punto de congelación* del agua. Otro sistema que por lo común se utiliza es una mezcla de agua y vapor en equilibrio térmico a presión atmosférica; su temperatura es 100°C, que es la *temperatura de ebullición* del agua. Una vez que los niveles del líquido del termómetro se hayan establecido en estos dos puntos, la longitud de la columna del líquido entre los dos puntos, se divide en 100 segmentos iguales para crear la escala Celsius. Por lo tanto, cada segmento denota un cambio en temperatura de un grado Celsius.

Los termómetros calibrados de este modo presentan problemas cuando se necesitan lecturas extremadamente precisas. Por ejemplo, las lecturas dadas por un termómetro de alcohol calibrado en los puntos de congelación y de ebullición del agua podrían concordar con los dados por un termómetro de mercurio sólo en los puntos de calibración. Como el mercurio y el alcohol tienen propiedades diferentes de expansión térmica, cuando un termómetro indica una temperatura de 50°C, por ejemplo, el otro puede indicar un valor lige-

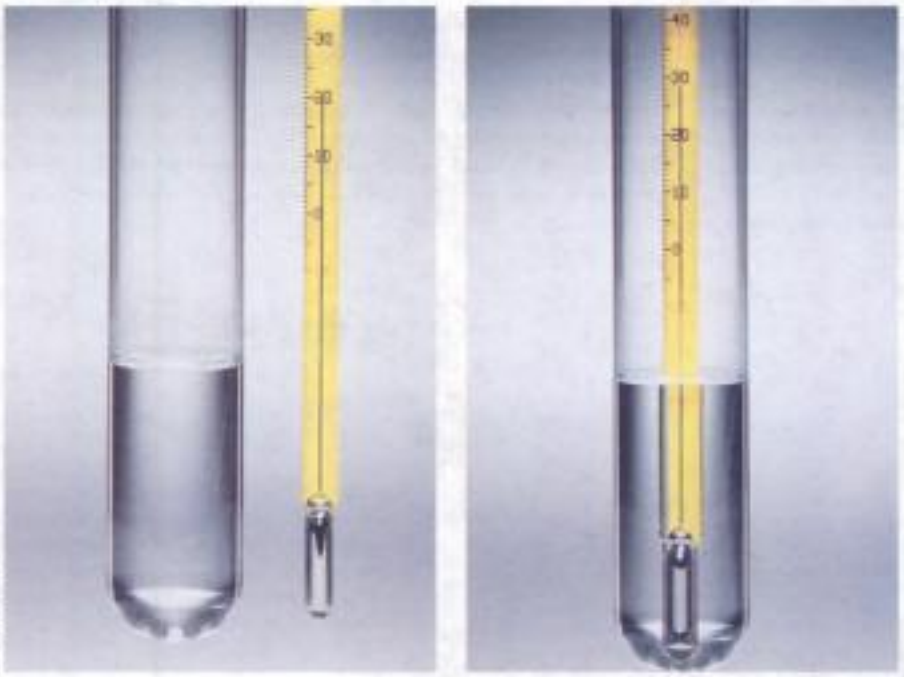


Figura 19.2 Como resultado de la expansión térmica, el nivel del mercurio en el termómetro sube cuando el mercurio es calentado por agua en el tubo de prueba.

Materiał chroniony prawem autorskim

(a) (b)

Figura 19.7 (a) Se usan juntas de expansión térmica para separar secciones de pavimento en puentes. Sin estas juntas, las superficies se pandearían debido a la expansión térmica en días muy calurosos, o se agrietarían debido a la contracción en días muy fríos. (b) La junta vertical larga se llena con material suave que permite que la pared se expanda y se contraiga cuando cambia la temperatura de los ladrillos.

menta la temperatura del sólido, los átomos oscilan con mayores amplitudes; por lo tanto, el promedio de separación entre ellos aumenta.[4] En consecuencia, el cuerpo se expande.

Si la expansión térmica es suficientemente pequeña con respecto a las dimensiones iniciales de un cuerpo, el cambio en cualquier dimensión es, a una buena aproximación, proporcional a la primera potencia del cambio de temperatura. Suponga que un cuerpo tiene una longitud inicial L_i a lo largo de alguna dirección a cierta temperatura y que la longitud aumenta en una cantidad ΔL para un cambio en temperatura ΔT. En vista que es conveniente considerar el cambio fraccionario en longitud por grado de cambio de temperatura, definimos el **coeficiente promedio de expansión lineal** como

$$\alpha = \frac{\Delta L / L_i}{\Delta T}$$

Experimentos realizados demuestran que α es constante para pequeños cambios en temperatura. Para fines de cálculo, esta ecuación suele rescribirse como

$$\Delta L = \alpha L_i \Delta T \tag{19.4}$$

o como

$$L_f - L_i = \alpha L_i (T_f - T_i) \tag{19.5}$$

donde L_f es la longitud final, T_i y T_f son las temperaturas inicial y final, y la constante de proporcionalidad α es el coeficiente promedio de expansión lineal para un material dado y tiene unidades de $(°C)^{-1}$.

Puede ser útil pensar en la expansión térmica como una amplificación efectiva o como la amplificación fotográfica de un cuerpo. Por ejemplo, cuando una rondana metálica se calienta (figura 19.8), todas las dimensiones, incluyendo el radio del agujero, aumentan de acuerdo con la ecuación 19.4. Nótese que esto equivale a decir que **una cavidad en una pieza de material se expande en la misma forma como si la cavidad estuviera llena con el material.**

La tabla 19.1 es una lista del coeficiente promedio de expansión lineal para varios materiales. Nótese que para estos materiales α es positiva, lo cual indica un aumento en longitud con una temperatura creciente. Éste no es siempre el caso. Algunas sustancias, la calcita ($CaCO_3$) es un ejemplo, se expande a lo largo de una dimensión (α positiva) y se contrae a lo largo de otra (α negativa) cuando sus temperaturas aumentan.

[4] En forma más precisa, la expansión térmica surge de la naturaleza *asimétrica* de la curva potencial-energía para los átomos en un sólido, como se ve en la figura 15.12a. Si los osciladores fueran verdaderamente armónicos, el promedio de separaciones atómicas no cambiaría cualquiera que fuera la amplitud de vibración.

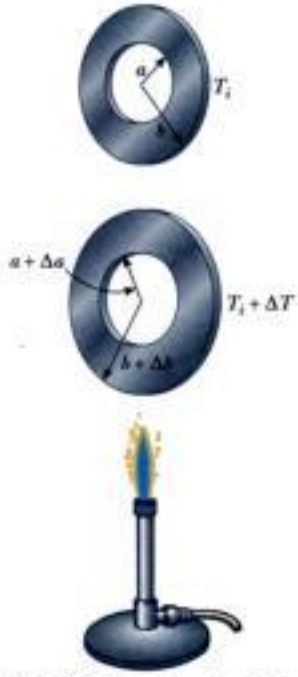


Figura 19.8 Expansión térmica de una rondana metálica de expansión. Cuando se calienta la rondana, todas las dimensiones aumentan. (La expansión está exagerada en esta figura.)

¡ADVERTENCIA!

19.2 ¿Los agujeros se hacen más grandes o más pequeños?

Cuando la temperatura de un cuerpo se eleva, cada dimensión lineal aumenta en tamaño. Esto incluye cualesquier agujeros en el material, que se expanden en la misma forma como si el agujero estuviera lleno del material, como se ve en la figura 19.8. Recuerde la noción de expansión térmica como similar a una amplificación fotográfica.

Materiał chroniony prawem autorskim

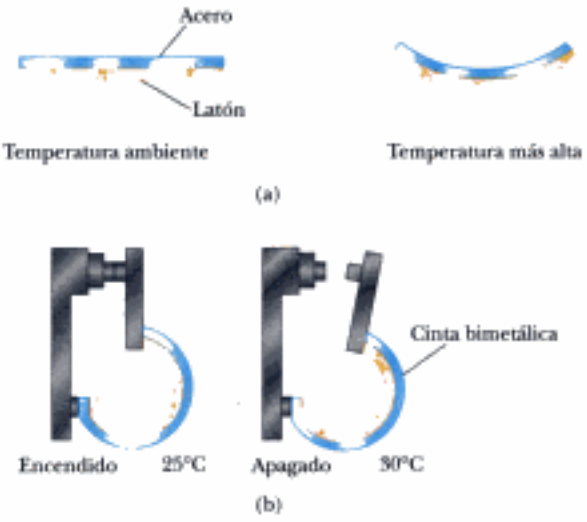


Figura 19.9 (a) Una cinta bimetálica se dobla cuando cambia la temperatura, porque los dos metales tienen diferentes coeficientes de expansión. (b) Cinta bimetálica empleada en un termostato para abrir o cerrar un contacto eléctrico.

barra de acero de igual longitud se elevan en la misma cantidad desde algún valor inicial común, la barra de latón se expande más que la barra de acero, porque el latón tiene un mayor coeficiente promedio de expansión que el acero. Un mecanismo sencillo llamado *cinta bimetálica* utiliza este principio y se encuentra en aparatos prácticos como son los termostatos. Está formado por dos tiras delgadas de metales diferentes unidos. Cuando aumenta la temperatura de la cinta, los dos metales se expanden en cantidades diferentes y la cinta se dobla, como se ilustra en la figura 19.9.

Pregunta rápida 19.3 Si al lector le piden hacer un termómetro de vidrio muy sensible, ¿cuál de los siguientes líquidos de trabajo escogería? (a) mercurio, (b) alcohol, (c) gasolina, (d) glicerina.

Pregunta rápida 19.4 Dos esferas están hechas del mismo metal y tienen el mismo radio, pero una es hueca y la otra es sólida. Las esferas son llevadas al mismo aumento de temperatura. ¿Cuál esfera se expande más? (a) la esfera sólida (b) la esfera hueca, (c) se expanden la misma cantidad, (d) no hay suficiente información para decirlo

Ejemplo 19.3 Expansión de una vía de ferrocarril

Un segmento de vía de acero para ferrocarril tiene una longitud de 30 000 m cuando la temperatura es 0.0°C.

(A) ¿Cuál es la longitud cuando la temperatura sea 40.0°C?

Solución Con el uso de la tabla 19.1 y si observamos que el cambio en temperatura es 40.0°C, encontramos que el aumento en longitud es

$$\Delta L = \alpha L_i \, \Delta T = [11 \times 10^{-6}(°C)^{-1}](30.000 \text{ m})(40.0°C)$$
$$= 0.013 \text{ m}$$

Si la vía mide 30.000 m de largo a 0.0°C, su longitud a 40.0° es **30.013 m.**

(B) Suponga que los extremos del riel están rígidamente sujetos a 0.0°C de modo que se impide su expansión. ¿Cuál es el esfuerzo térmico establecido en el riel si su temperatura se eleva a 40.0°C?

Solución El esfuerzo térmico será el mismo al de la situación en la que dejamos que el riel se expanda libremente y luego se comprima con una fuerza mecánica F otra vez a su longitud original. De la definición del módulo de elasticidad para un sólido (vea la ecuación 12.6), tenemos

$$\text{Esfuerzo de tensión} = \frac{F}{A} = Y\frac{\Delta L}{L_i}$$

Debido a que Y para el acero es 20×10^{10} N/m^2 (vea la tabla 12.1), tenemos

Materiał chroniony prawem autorskim

$$\frac{F}{A} = (20 \times 10^{10}\ \mathrm{N/m^2})\left(\frac{0.013\ \mathrm{m}}{30.000\ \mathrm{m}}\right) = \mathbf{8.7 \times 10^7\ N/m^2}$$

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si la temperatura baja a −40.0°C? ¿Cuál es la longitud del segmento no sujeto?

La expresión para el cambio en longitud en la ecuación 19.4 es igual si la temperatura aumenta o disminuye. Por lo tanto, si hay un aumento en longitud de 0.013 m cuando la temperatura aumenta en 40°C, entonces hay una disminución en longitud de 0.013 m cuando la temperatura disminuye en 40°C. (Suponemos que α es constante sobre todo el intervalo de temperaturas). La nueva longitud a la temperatura más fría es 30.000 m − 0.013 m = 29.987 m.

Ejemplo 19.4 El corto electrotérmico

Un dispositivo electrónico ha sido diseñado en forma deficiente de modo que dos tornillos unidos a piezas diferentes del dispositivo casi se tocan entre sí en su interior, como se ve en la figura 19.10. Los tornillos de acero y bronce están a diferentes potenciales eléctricos y si se tocan se produce un cortocircuito, lo cual daña al dispositivo. (Estudiaremos el potencial eléctrico en el capítulo 3 del volumen II.) Si la distancia entre los extremos de los tornillos es 5.0 μm a 27°C, ¿a qué temperatura se tocarán los tornillos?

Solución Podemos conceptualizar la situación si imaginamos que los extremos de ambos tornillos se expanden hacia la distancia entre ellos cuando aumenta la temperatura. Clasificamos éste como un problema de expansión térmica, en el que la *suma* de los cambios en longitud de los dos tornillos debe ser igual a la longitud de la distancia inicial entre los extremos. Para analizar el problema, escribimos esta condición matemáticamente:

$$\Delta L_{br} + \Delta L_{ac} = \alpha_{br} L_{i,br} \Delta T + \alpha_{ac} L_{i,ac} \Delta T = 5.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}$$

Al despejar ΔT, encontramos

$$\Delta T = \frac{5.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}}{\alpha_{br} L_{i,br} + \alpha_{ac} L_{i,ac}}$$

$$= \frac{5.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}}{(19 \times 10^{-6}\,°\mathrm{C}^{-1})(0.030\ \mathrm{m}) + (11 \times 10^{-6}\,°\mathrm{C}^{-1})(0.010\ \mathrm{m})}$$

$$= 7.4°\mathrm{C}$$

Por lo tanto, la temperatura a la que los tornillos se tocan es 27°C + 7.4°C = **34°C** Para finalizar este problema, nótese que esta temperatura es posible si el clima artificial del edificio donde se encuentre el dispositivo falla durante un largo periodo en un día caluroso de verano.

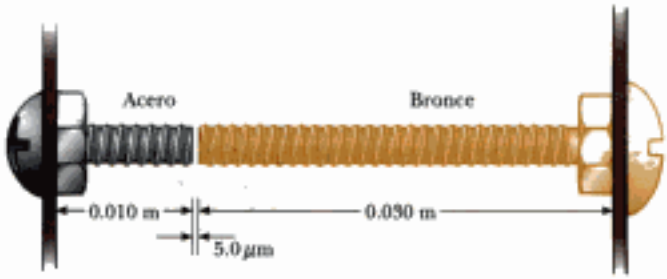


Figura 19.10 (Ejemplo 19.4) Dos tornillos unidos a diferentes piezas de un dispositivo eléctrico casi se tocan cuando la temperatura es 27°C. Cuando aumenta la temperatura, los extremos de los tornillos se mueven uno hacia el otro.

El comportamiento poco común del agua

Por lo general los líquidos aumentan en volumen con la temperatura creciente y tienen coeficientes promedio de expansión de volumen diez veces mayores que los de sólidos. El agua fría es una excepción a esta regla, como podemos ver por su curva de densidad contra temperatura, que se muestra en la figura 19.11. Cuando aumenta la temperatura de 0°C a 4°C, el agua se contrae y por lo tanto aumenta su densidad. Arriba de 4°C, el agua se expande con la temperatura creciente y por ello disminuye su densidad. En consecuencia, la densidad del agua alcanza un valor máximo de 1 000 g/cm^3 a 4°C.

Podemos usar este comportamiento poco común de expansión térmica del agua para explicar por qué una charca empieza a congelarse en la superficie en lugar de en el fondo. Cuando la temperatura atmosférica baja de, por ejemplo, 7°C a 6°C, el agua de la superficie también se enfría y en consecuencia disminuye en volumen. Esto significa que el agua de la superficie es más densa que el agua de abajo, que no se ha enfriado ni disminuido en volumen. Como resultado de esto, el agua de la superficie se hunde y el agua más caliente de abajo es forzada a la superficie para enfriarse. No obstante, cuando la temperatura atmosférica está entre 4°C y 0°C, el agua de la superficie se expande cuando se enfría, haciéndose menos densa que el agua de abajo. El proceso de mezcla se detiene y finalmente el agua de

Materiał chroniony prawem autorskim

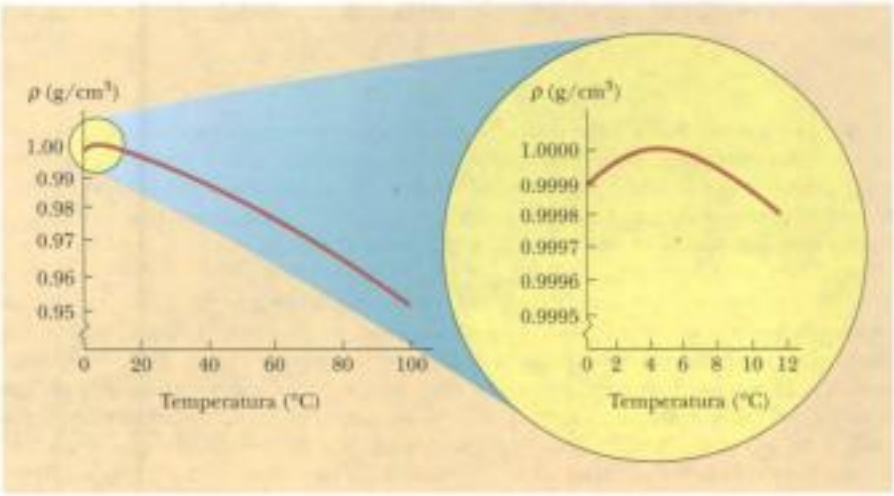


Figura 19.11 Variación en la densidad del agua a presión atmosférica con la temperatura. El recuadro de la derecha muestra que la máxima densidad del agua ocurre a 4°C.

la superficie se congela. Cuando se congela el agua, el hielo permanece en la superficie porque el hielo es menos denso que el agua. El hielo continúa aumentando en la superficie, mientras que el agua cerca del fondo permanece a 4°C. Si éste no fuera el caso, entonces los peces y otras formas de fauna marina no sobrevivirían.

19.5 Descripción macroscópica de un gas ideal

La ecuación de expansión de un volumen, $\Delta V = \beta V_i \Delta T$ está basada en la suposición de que el material tiene un volumen inicial V_i antes que ocurra el cambio de temperatura. Éste es el caso para sólidos y líquidos, porque tienen un volumen fijo a una temperatura dada.

El caso para gases es completamente diferente. Las fuerzas interatómicas dentro de gases son muy débiles y, en muchos casos, podemos imaginar que estas fuerzas no existen, y aun así haremos aproximaciones muy buenas. Nótese que *no hay separación de equilibrio* para los átomos y, por lo tanto, no hay volumen "estándar" a una temperatura dada. Por lo tanto, no podemos expresar cambios en volumen ΔV en un proceso en un gas con la ecuación 19.6 porque no tenemos volumen V_i definido al principio del proceso. Para un gas, el volumen está determinado por entero por el recipiente que contiene al gas. De esta forma, las ecuaciones que se refieran a gases contendrán el volumen V como variable, más que concentrarse en un cambio en el volumen a partir de un valor inicial.

Para un gas, es útil saber la forma en que las cantidades volumen V, presión P y temperatura T están relacionadas para una muestra de gas de masa m. En general, la ecuación que relaciona estas cantidades, llamada *ecuación de estado*, es muy complicada pero, si el gas se mantiene a presión muy baja (o baja densidad), la ecuación de estado es muy sencilla y se puede hallar experimentalmente. Este gas de baja densidad se conoce por lo general como *gas ideal*[5].

Es conveniente expresar la cantidad de gas en un volumen dado en términos del número de moles n. Un **mol** de cualquier sustancia es la cantidad de la sustancia que contiene el **número de Avogadro** $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ de partículas constitutivas (átomos o moléculas).

[5] Para ser más específicos, la suposición aquí es que la temperatura del gas no debe ser demasiado baja (el gas no debe condensarse en un líquido) ni demasiado alta, y que la presión debe ser baja. El concepto de un gas ideal implica que las moléculas de gas no interactúan excepto al colisionarse, y que el volumen molecular es insignificante en comparación con el volumen del recipiente. En realidad, un gas ideal no existe pero el concepto de un gas ideal es muy útil, porque los gases reales a bajas presiones se comportan como los gases ideales.

Materiał chroniony prawem autorskim

El número de moles n de una sustancia está relacionada con su masa m por medio de la expresión

$$n = \frac{m}{M} \tag{19.7}$$

donde M es la masa molar de la sustancia. La masa molar de cada elemento químico es la masa atómica (de la tabla periódica, apéndice C) expresada en g/mol. Por ejemplo, la masa de un átomo de He es 4.00 u (unidades de masa atómica), de modo que la masa molar del He es 4.00 g/mol. Para una sustancia molecular o un compuesto químico, se puede sumar la masa molar desde su fórmula molecular. La masa molar del oxígeno diatómico estable (O_2) es 32.0 g/mol.

Ahora supongamos que un gas ideal está confinado a un recipiente cilíndrico cuyo volumen puede hacerse variar por medio de un émbolo móvil, como en la figura 19.12. Si suponemos que el cilindro no tiene fugas, la masa (o el número de moles) del gas permanece constante. Para este sistema, experimentos realizados dan la siguiente información. Primero, cuando el gas se mantiene a temperatura constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen (ley de Boyle). Segundo, cuando la presión del gas se mantiene constante, su volumen es directamente proporcional a su temperatura (la ley de Charles y Gay-Lussac). Estas observaciones están resumidas por la **ecuación de estado para un gas ideal:**

Ecuación de estado para un gas ideal

$$PV = nRT \tag{19.8}$$

En esta expresión, conocida como la **ley de un gas ideal,** R es una constante y n es el número de moles de gas de la muestra. Experimentos en numerosos gases demuestran que cuando la presión se aproxima a cero, la cantidad PV/nT se aproxima al mismo valor R para todos los gases. Por esta razón, R se denomina **constante universal de los gases.** En unidades del SI, en el que la presión se expresa en pascale (1 Pa = 1 N/m^2) y el volumen en metros cúbicos, el producto PV tiene unidades de newton · metro, o joules, y R tiene el valor

$$R = 8.314\ \text{J/mol}\cdot\text{K} \tag{19.9}$$

Si la presión se expresa en atmósferas y el volumen en litros (1 L = 10^3 cm^3 = 10^{-3} m^3), entonces R tiene el valor

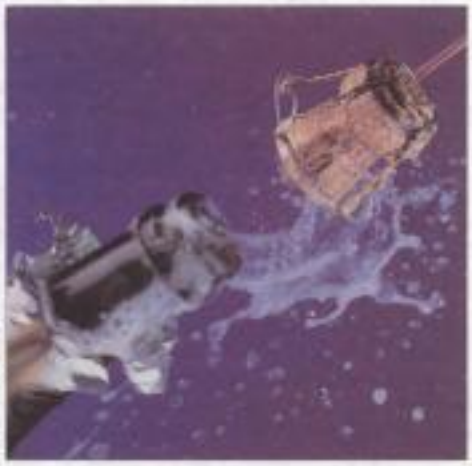
$$R = 0.082\,14\ \text{L}\cdot\text{atm/mol}\cdot\text{K}$$

Con el uso de este valor de R y la ecuación 19.8, encontramos que el volumen ocupado por 1 mol de cualquier gas a presión atmosférica y a 0°C (273 K) es 22.4 L.

La ley de un gas ideal expresa que si no cambian el volumen y la temperatura de una cantidad fija de gas, entonces la presión también permanece constante. Considere una bo-

Figura activa 19.12 Gas ideal confinado en un cilindro cuyo volumen puede hacerse variar por medio de un émbolo móvil.

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, usted podrá mantener constantes ya sea la temperatura o la presión y verificar la ley de Boyle y la ley de Charles y Gay-Lussac.



Steve Bloom/Gettty Images

Figura 19.13 Se agita y se abre una botella de champaña. El líquido sale por la abertura. Un malentendido común es que la presión del interior de la botella aumenta debido a la agitación.

Materiał chroniony prawem autorskim

un día de invierno, cuando la temperatura es −20.0°C. ¿Cuánto más largo es el alambre en un día de verano cuando T_C = 35.0°C?

10. Las secciones de concreto de cierta supercarretera están diseñadas para tener una longitud de 25.0 m. Las secciones son vaciadas y curadas a 10.0°C. ¿Qué separación mínima debe dejar el ingeniero entre las secciones para eliminar el pandeo si el concreto puede alcanzar una temperatura de 50.0°C?

11. La montadura de unos lentes está hecha de plástico epóxico. A temperatura ambiente (20°C), la montadura tiene agujeros circulares de 2.20 cm de radio para los lentes. ¿A qué temperatura debe calentarse la montadura si unos lentes de 2.21 cm de radio se han de insertar en ella? El coeficiente promedio de expansión lineal para la resina epóxica es de 1.30×10^{-4} (°C)$^{-1}$.

12. Cada año, miles de niños sufren graves quemaduras con agua caliente. La figura P19.12 muestra una vista en sección transversal de un aditamento antiquemaduras para llave de agua, diseñado para evitar estos accidentes. Dentro del aparato, un resorte hecho de material con alto coeficiente de expansión térmica controla un émbolo movible. Cuando la temperatura del agua sube por encima de un valor seguro, la expansión del resorte hace que el émbolo cierre el flujo de agua. Si la longitud inicial L del resorte no estirado es 2.40 cm y su coeficiente de expansión lineal es 22.0×10^{-6} (°C)$^{-1}$, determine el aumento en longitud del resorte cuando la temperatura del agua suba 30.0°C. (Puede hallarse que el aumento en longitud sea pequeño. Por esta razón, los equipos reales tienen un diseño mecánico más complicado, para dar una mayor variación en abertura de válvula para el cambio anticipado de temperatura.)

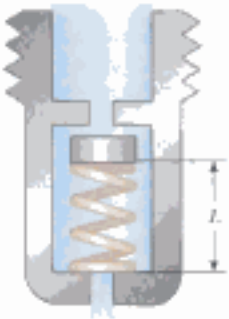


Figura P19.12

13. El elemento activo de cierto láser está hecho de una barra de vidrio de 30.0 cm de largo por 1.50 cm de diámetro. Si la temperatura de la barra aumenta en 65.0°C, ¿cuál es el aumento en (a) su longitud, (b) su diámetro, y (c) su volumen? Suponga que el coeficiente promedio de expansión lineal del vidrio es 9.00×10^{-6}(°C)$^{-1}$.

14. **Problema de repaso.** Dentro de la pared de una casa, una sección en forma de L de tubo de agua caliente está hecho de una pieza horizontal recta de 28.0 cm de largo, un codo y una pieza vertical recta de 134 cm de largo (figura P19.14). Un montante y una tabla de piso mantienen estacionarios los extremos de esta sección de tubería de cobre. Hállese la magnitud y dirección del desplazamiento del codo cuando se abra la llave del agua caliente, con lo cual sube la temperatura del tubo de 18.0°C a 46.5°C.

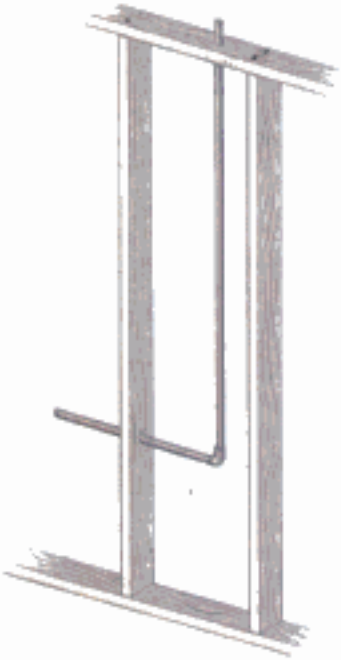


Figura P19.14

15. Un anillo de bronce de 10.00 cm de diámetro a 20.0°C se calienta y desliza sobre una varilla de aluminio de 10.01 cm de diámetro a 20.0°C. Suponiendo que el coeficiente promedio de expansión lineal es constante, (a) ¿a qué temperatura debe enfriarse esta combinación para separarlos? ¿Es esto posible? (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Qué pasaría si la varilla de aluminio fuera de 10.02 de diámetro?

16. Un agujero cuadrado de 8.00 cm por lado se corta en una lámina de cobre. (a) Calcule el cambio en el área de este agujero si la temperatura de la lámina se aumenta en 50.0 K. (b) ¿Representa este cambio un aumento o una disminución en el área encerrada por el agujero?

17. El coeficiente promedio de expansión de volumen para el tetracloruro de carbono es 5.81×10^{-4}(°C)$^{-1}$. Si un recipiente de acero de 50.0 galones se llena por completo de tetracloruro de carbono cuando la temperatura es 10.0°C, ¿cuánto se derramará cuando la temperatura suba a 30.0°C?

18. A 20.0°C, un anillo de aluminio tiene un diámetro interior de 5.000 0 cm y una varilla de bronce tiene un diámetro de 5.050 0 cm. (a) Si se calienta sólo el anillo, ¿qué temperatura debe alcanzar para que apenas se deslice sobre la varilla? (b) **¿Qué pasaría si?** Si ambos se calientan juntos, ¿qué temperatura deben alcanzar para que el anillo apenas se deslice sobre la varilla? ¿Funcionaría este último proceso?

19. Un frasco volumétrico hecho de Pirex está calibrado a 20.0°C. Se llena a la marca de 100 mL con acetona a 35.0°C. (a) ¿Cuál es el

Materiał chroniony prawem autorskim

volumen de la acetona cuando se enfría a 20.0°C? (b) ¿Qué tan significativo es el cambio en volumen del frasco?

20. Se cuela una banqueta de concreto en un día cuando la temperatura es de 20.0°C en forma tal que los extremos no se pueden mover. (a) ¿Cuál es el esfuerzo del cemento en un día caluroso de 50.0°C? (b) ¿Se fractura el concreto? Tome el módulo de elasticidad para el concreto como 7.00×10^9 N/m² y la resistencia a la compresión como 2.00×10^9 N/m².

21. Un cilindro hueco de aluminio de 20.0 cm de profundidad tiene una capacidad interna de 2.00 L a 20.0°C. Se llena por completo con aguarrás y luego se calienta lentamente a 80.0°C. (a) ¿Cuánto aguarrás se derrama? (b) Si el cilindro se enfría otra vez a 20.0°C, ¿a qué distancia bajo el borde del cilindro bajará la superficie del aguarrás?

22. Un vaso hecho de vidrio ordinario contiene una esfera de plomo de 4.00 cm de diámetro firmemente unida a su fondo. A una temperatura uniforme de −10.0°C, el vaso se llena hasta el borde con 118 cm³ de mercurio, que cubre por completo la esfera. ¿Cuánto mercurio se derrama del vaso si la temperatura se eleva a 30.0°C?

23. Una varilla de acero se somete a una fuerza de estiramiento de 500 N. Su área de sección transversal es 2.00 cm². Encuentre el cambio en temperatura que alargaría la varilla la misma cantidad que lo hace la fuerza de 500 N. Las tablas 12.1 y 19.1 pueden ayudar.

24. El puente Golden Gate de San Francisco tiene una longitud de 1.28 km en su distancia principal entre apoyos, uno de los más grandes del mundo. Imagine que un alambre tenso de acero con esta longitud y un área de sección transversal de 4.00×10^{-6} m² se coloca en la cubierta del puente con sus extremos unidos a las torres del puente, en un día de verano cuando la temperatura del alambre es 35.0°C. (a) Cuando llega el invierno, las torres permanecen a la misma distancia de separación y la cubierta del puente mantiene la misma forma cuando se abren sus uniones de expansión. Cuando la temperatura baja a −10.0°C, ¿cuál es la tensión en el alambre? Tome el módulo de elasticidad para el acero como de 20.0×10^{10} N/m². (b) Ocurre una deformación permanente si el esfuerzo en el acero excede su límite elástico de 3.00×10^8 N/m². ¿A qué temperatura ocurrirá esto? (c) **¿Qué pasaría si?** ¿Cómo cambiarían sus respuestas a (a) y (b) si el puente Golden Gate fuera del doble de largo?

25. Cierto telescopio forma una imagen de parte de un cúmulo de estrellas en un chip detector acoplado a carga de silicio cuadrado (CCD), de 2.00 cm por lado. Un campo de estrellas se enfoca en el chip CCD cuando se energizó primero y su temperatura es de 20.0°C. El campo de estrellas contiene 5 342 estrellas uniformemente dispersas. Para hacer más sensible el detector, se enfría a −100°C. ¿Cuántas imágenes de estrellas caben en el chip? El promedio de coeficiente de expansión lineal del silicio es 4.68×10^{-6}(°C)$^{-1}$.

Sección 19.5 Descripción macroscópica de un gas ideal

Nota: El problema 8 del capítulo 1 se puede asignar con esta sección.

26. Un recipiente de 8.00 L contiene gas a una temperatura de 20.0°C y una presión de 9.00 atm. (a) Determine el número de moles de gas en el recipiente. (b) ¿Cuántas moléculas hay en el vaso?

27. Una llanta de automóvil se infla con aire originalmente a 10.0°C y presión atmosférica normal. Durante el proceso, el aire se comprime a 28.0% de su volumen original y la temperatura se aumenta a 40.0°C. (a) ¿Cuál es la presión de la llanta? (b) Después que el auto corre a alta velocidad, la temperatura del aire de la llanta sube a 85.0°C y el volumen interior de la llanta aumenta en 2.00%. ¿Cuál es la nueva presión de la llanta (absoluta) en pascales?

28. Un tanque que tiene un volumen de 0.100 m³ contiene helio a 150 atm. ¿Cuántos globos se pueden llenar con el gas del tanque si cada globo llenado es una esfera de 0.300 m de diámetro a una presión absoluta de 1.20 atm?

29. Un auditorio tiene dimensiones de 10.0 m × 20.0 m × 30.00 m. ¿Cuántas moléculas de aire llenan el auditorio a 20.0°C y una presión de 101 kPa?

30. Imagine una bebé extraterrestre que juega con un globo esférico del tamaño de la Tierra en el sistema solar exterior. El helio dentro del globo tiene una temperatura uniforme de 50.0 K debido a la radiación del Sol. La presión uniforme del helio es igual a la presión atmosférica normal en la Tierra. (a) Encuentre la masa del gas del globo. (b) La bebé sopla una masa adicional de 8.00×10^{20} kg de helio en el globo. Al mismo tiempo, ella vaga más cerca del Sol y la presión del globo se duplica. Encuentre la nueva temperatura dentro del globo, cuyo volumen permanece constante.

31. Precisamente 9.00 g de agua se ponen en una olla de presión de 2.00 L y se calienta a 500°C. ¿Cuál es la presión dentro del recipiente?

32. Un mol de oxígeno está a una presión de 6.00 atm y una temperatura de 27.0°C. (a) Si el gas se calienta a volumen constante hasta que se triplica la presión, ¿cuál es la temperatura final? (b) Si el gas se calienta hasta que se duplican la presión y el volumen, ¿cuál es la temperatura final?

33. La masa de un globo de aire caliente y su carga (sin incluir el aire del interior) es de 200 kg. El aire del exterior está a 10.0°C y 101 kPa. El volumen del globo es de 400 m³. ¿A qué temperatura debe calentarse el aire del globo antes que el globo despegue del suelo? (La densidad del aire a 10.0°C es 1.25 kg/m³.)

34. Su padre y su pequeño hermano se enfrentan al mismo enigma. El aspersor del jardín de su padre y el cañón de agua de su hermano tienen tanques con capacidad de 5.00 L (figura P19.34). Su padre inserta una cantidad insignificante de insecticida en su tanque. Ambos ponen 4.00 L de agua y sellan sus tanques, de modo que también contienen aire a presión atmosférica. A continuación, cada uno utiliza una bomba manual de émbolo para inyectar más aire, hasta que la presión absoluta del tanque llega a 2.40 atm y se hace demasiado difícil mover la manija de la bomba. Ahora cada uno emplea su aparato para regar agua, no aire, hasta que la corriente se hace muy pequeña, cuando la presión del tanque llega a 1.20 atm. Entonces él debe bombearlo de nuevo, regar otra vez, y así sucesivamente. Para regar toda el agua, cada uno encuentra que debe bombear el tanque tres ve-

Materiał chroniony prawem autorskim

ces. Éste es un enigma: casi toda el agua se riega como resultado del segundo bombeo. Los procesos primer y tercero de bombeo parecen iguales de difíciles, pero resulta que sale una cantidad de agua tan pequeña que es decepcionante. Explique este fenómeno.

Figura P19.34

35. (a) Encuentre el número de moles en un metro cúbico de un gas ideal a 20.0°C y presión atmosférica. (b) Para aire, el número de Avogadro de moléculas tiene masa de 28.9 g. Calcule la masa de un metro cúbico de aire. Compare el resultado con la densidad tabulada de aire.

36. La *fracción vacía* de un medio poroso es la razón entre el volumen vacío y el volumen total del material. El vacío es el espacio hueco dentro del material; puede ser llenado con un fluido. Una lata cilíndrica de 2.54 cm de diámetro y 20.0 cm de altura se llena con carbón activado que tiene una fracción vacía de 0.765. Luego se descarga y lava con un gas ideal a 25.0°C y presión de 12.5 atm. ¿Cuántos moles de gas están contenidos en el cilindro al final de este proceso?

37. Un cubo de 10.0 cm en cada arista contiene aire (con masa molar equivalente de 28.9 g/mol) a presión atmosférica y temperatura de 300 K. Encuentre (a) la masa del gas, (b) su peso, y (c) la fuerza que ejerce sobre cada cara del cubo. (d) Comente sobre la razón física por la que una muestra tan pequeña puede ejercer una fuerza tan grande.

38. A 25.0 m bajo la superficie del mar (ρ = 1 025 kg/m^3), donde la temperatura es de 5.00°C, un buzo exhala una burbuja de aire que tiene un volumen de 1.00 cm^3. Si la temperatura de la superficie del mar es de 20.0°C, ¿cuál es el volumen de la burbuja justo antes de llegar a la superficie?

39. El manómetro de un tanque registra la presión manométrica, que es la diferencia entre la presión interior y la exterior. Cuando el tanque está lleno de oxígeno (O_2), contiene 12.0 kg del gas a una presión manométrica de 40.0 atm. Determine la masa de oxígeno que se ha sacado del tanque cuando la lectura de presión es de 25.0 atm. Suponga que la temperatura del tanque permanece constante.

40. Estime la masa de aire en su alcoba. Exprese las cantidad que tome como datos y el valor que mida o estime para cada una.

41. Una marca popular de refresco de cola contiene 6.50 g de dióxido de carbono disuelto en 1.00 L de bebida sin gas. Si el dióxido de carbono que se evapora es atrapado en un cilindro a 1.00 atm y 20.0°C, ¿qué volumen ocupa el gas?

42. En sistemas de vacío de alta tecnología, se alcanzan presiones de sólo 10^{-9} Pa. Calcule el número de moléculas en un recipiente de 1.00 m^3 a esta presión si la temperatura es de 27.0°C.

43. Un cuarto de volumen V contiene aire que tiene masa molar equivalente M (en g/mol). Si la temperatura del cuarto sube de T_1 a T_2, qué masa de aire sale del cuarto? Suponga que la presión de aire del cuarto se mantiene en P_0.

44. Una campana de inmersión en forma de cilindro con altura de 2.50 m se cierra en el extremo superior y se abre en el extremo inferior. La campana es bajada desde aire al agua de mar (ρ = 1.025 g/cm^3). El aire de la campana está inicialmente a 20.0°C. La campana es bajada a una profundidad (medida en el fondo de la campana) de 45.0 brazas, o sea 82.3 m. A esta profundidad, la temperatura del agua es de 4.0°C y la campana está en equilibrio térmico con el agua. (a) ¿A qué altura sube el agua de mar en la campana? (b) ¿A qué presión mínima debe elevarse el aire de la campana para expulsar el agua que entró?

Problemas adicionales

45. Un estudiante mide la longitud de una varilla de bronce con una cinta de acero a 20.0°C. La lectura es 95.00 cm. ¿Qué indicará la cinta para la longitud de la varilla cuando ésta y la cinta estén a (a) −15.0°C y (b) 55.0°C?

46. La densidad de la gasolina es de 750 kg/m^3 a 0°C. Su coeficiente promedio de expansión de volumen es 9.60×10^{-4}/°C. Si 1.00 galón de gasolina ocupa 0.003 80 m^3, ¿cuántos kilogramos extra de gasolina se obtendrían si se compran 10.0 galones de gasolina a 0°C en lugar de a 20.0°C de una bomba que no está compensada en temperatura?

47. Un termómetro de mercurio se construye como se muestra en la figura P19.47. El tubo capilar tiene un diámetro de 0.004 00 cm,

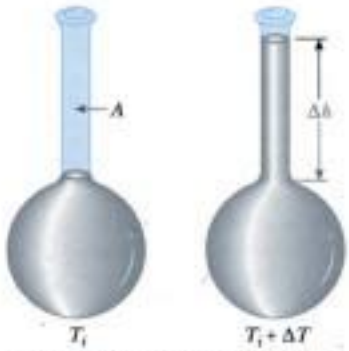


Figura P19.47 Problemas 47 y 48.

Materiał chroniony prawem autorskim

(a)

(b)

Figura P19.54

55. La placa rectangular que se muestra en la figura P19.55 tiene un área A_i igual a ?w. Si la temperatura aumenta en ΔT, cada dimensión aumenta de acuerdo con la ecuación $\Delta L = \alpha L_i \Delta T$, donde α es el coeficiente promedio de expansión lineal. Demuestre que el aumento en área es $\Delta A = 2\alpha A_i \Delta T$. ¿Qué aproximación supone esta expresión?

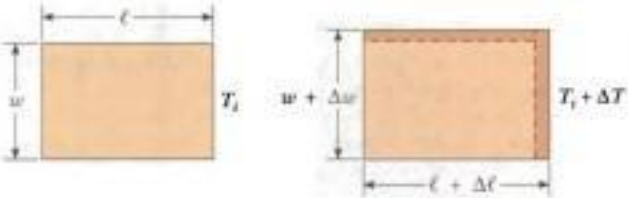


Figura P19.55

56. **Problema de repaso.** Un reloj con péndulo de bronce tiene un periodo de 1.000 s a 20.0°C. Si la temperatura aumenta a 30.0°C, (a) ¿cuánto cambia el periodo, y (b) cuánto se adelanta o se atrasa en una semana?

57. **Problema de repaso.** Considere un cuerpo con cualquiera de las formas que se ven en la tabla 10.2. ¿Cuál es el porcentaje de aumento del momento de inercia del cuerpo cuando se calienta de 0°C a 100°C si está compuesto de (a) cobre o (b) aluminio? Suponga que el coeficiente promedio de expansión lineal que se ven en la tabla 19.1 no varían entre 0°C y 100°C.

58. (a) Deduzca una expresión para hallar el empuje hidrostático sobre un globo esférico, sumergido en agua, como función de la profundidad bajo la superficie, el volumen del globo en la superficie, la presión en la superficie y la densidad del agua. (Suponga que la temperatura del agua no cambia con la profundidad). (b) ¿Aumenta o disminuye el empuje hidrostático cuando el globo se sumerge? (c) ¿A qué profundidad es que el empuje hidrostático es la mitad de su valor en la superficie?

59. Un alambre de cobre y un alambre de plomo se unen, extremo con extremo. El alambre combinado tiene un coeficiente efectivo de expansión lineal de $20.0 \times 10^{-6}(°C)^{-1}$. ¿Qué fracción de la longitud del alambre combinado es de cobre?

60. **Problema de repaso.** Después de una colisión en el espacio exterior, un disco de cobre a 850°C está girando alrededor de su eje con una rapidez angular de 25.0 rad/s. Cuando el disco irradia luz infrarroja, su temperatura baja a 20.0°C. No hay par de torsión externo que actúe sobre el disco. (a) ¿Cambia la rapidez angular cuando se enfría el disco? Explique por qué. (b) ¿Cuál es la rapidez angular a la temperatura más baja?

61. Dos tramos de concreto de un puente de 250 m de largo se colocan extremo con extremo de modo que no se compensa la expansión (figura P19.61a). Si ocurre un aumento de temperatura de 20.0°C, ¿cuál es la altura y a la que suben los tramos cuando se pandean (figura P19.61b)?

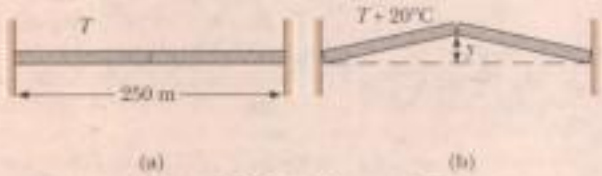


Figura P19.61 Problemas 61 y 62.

62. Dos tramos de concreto de un puente de longitud L se colocan extremo con extremo de modo que no se compensa la expansión (figura P19.61a). Si ocurre un aumento de temperatura ΔT, ¿cuál es la altura y a la que suben los tramos cuando se pandean (figura P19.61b)?

63. (a) Demuestre que la densidad de un gas ideal que ocupa un volumen V está dada por $\rho = PM/RT$, donde M es la masa molar. (b) Determine la densidad del oxígeno a presión atmosférica y 20.0°C.

64. (a) Utilice la ecuación de estado para un gas ideal y la definición del coeficiente de expansión de volumen, en la forma $\beta = (1/V)dV/dt$, para demostrar que el coeficiente de expansión de volumen para un gas ideal a presión constante está dado por $\beta = 1/T$, donde T es la temperatura absoluta. (b) ¿Qué valor predice esta expresión para β a 0°C? Compare este resultado con los valores experimentales para helio y aire en la tabla 19.1. Nótese que éstos son mucho mayores que los coeficientes de expansión de volumen para la mayor parte de líquidos y sólidos.

65. Comenzando con la ecuación 19.10, demuestre que la presión total P en un recipiente lleno con una mezcla de varios gases ideales es $P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$, donde $P_1, P_2, \ldots$, son las presiones que cada gas ejercería si por sí solo llenara el recipiente (estas

Materiał chroniony prawem autorskim

cionaria bajan con respecto al techo y sienten una fuerza de fricción cinética que actúa sobre el techo. Elementos de área arriba de la línea estacionaria se deslizan hacia arriba en el techo y sobre ellos la fricción cinética actúa hacia abajo paralela al techo. La línea estacionaria actúa sobre la placa mientras que la temperatura está cambiando. La placa como un todo está muy cerca del equilibrio, de modo que la fuerza neta de fricción sobre ella debe ser igual al componente de su peso que actúa hacia abajo en el plano inclinado. (a) Demuestre que la línea estacionaria está a una distancia de

$$\frac{L}{2}\left(1 - \frac{\tan\theta}{\mu_k}\right)$$

abajo del borde superior de la placa. (b) Analice las fuerzas que actúan sobre la placa cuando la temperatura está bajando, y demuestre que la línea estacionaria está a la misma distancia arriba del borde inferior de la placa. (c) Demuestre que la placa baja del techo como si fuera gusano, moviéndose cada día una distancia de

$$\frac{L(\alpha_2 - \alpha_1)(T_h - T_c)\tan\theta}{\mu_k}$$

(d) Evalúe la distancia que una placa de aluminio se mueve cada día si su longitud es 1.20 m, si la temperatura tiene ciclos entre 4.00°C y 36.0°C, y si el techo tiene una pendiente de 18.5°, el coeficiente de expansión lineal es $1.50 \times 10^{-5}(°C)^{-1}$ y el coeficiente de fricción es 0.420 con la placa. (e) **¿Qué pasaría si?** ¿Qué pasaría si el coeficiente de expansión de la placa es menor que el del techo? ¿Subirá la placa por el techo?

Respuestas a las *preguntas rápidas*

19.1 (c) La dirección de la transferencia de energía depende sólo de la temperatura y no del tamaño del cuerpo o de cuál objeto tiene más masa.

19.2 (c) La frase "dos veces más caliente" se refiere a la razón entre temperaturas. Cuando las temperaturas dadas se convierten a kelvin, sólo las de la parte (c) están en la razón correcta.

19.3 (c) La gasolina tiene el mayor coeficiente promedio de expansión de volumen.

19.4 (c) Una cavidad en un material se expande en la misma forma como si todo estuviera lleno de material.

19.5 (a) En un día frío, el aire atrapado en las burbujas está reducido en presión, según la ley de un gas ideal. Por lo tanto, el volumen de las burbujas puede ser menor que en un día caluroso, y el contenido del paquete puede moverse más.

19.6 (b) Debido a la menor temperatura del helio, la presión del globo se reduce. La presión atmosférica alrededor del globo lo comprime a un tamaño menor.

19.7 (b) Debido a la mayor temperatura, el aire se expande. En consecuencia, parte del aire se fuga al exterior, dejando menos aire en la casa.

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 20

El calor y la primera ley de la termodinámica

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

20.1 Calor y energía interna

20.2 Calor específico y calorimetría

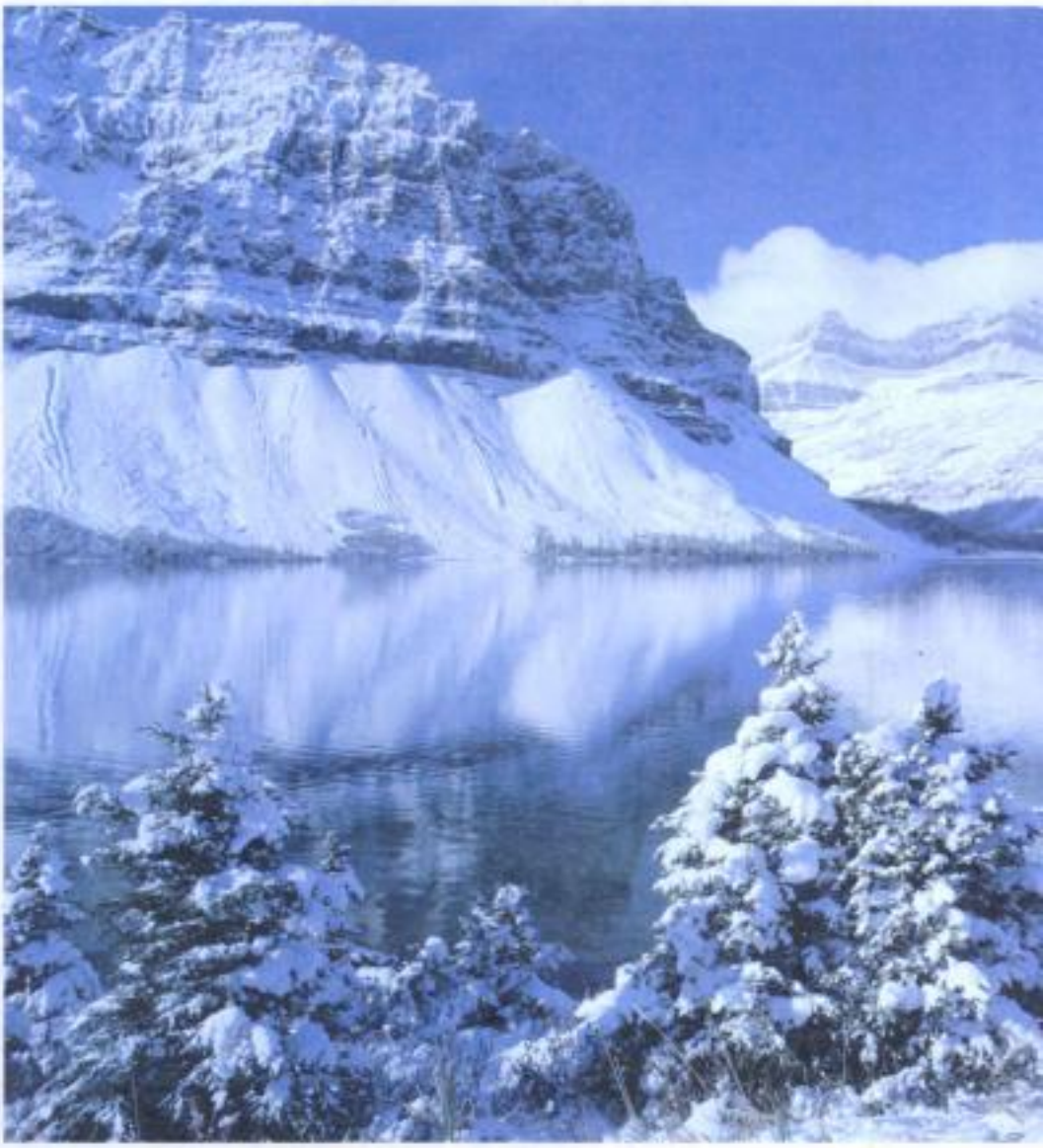
20.3 Calor latente

20.4 Trabajo y calor en procesos termodinámicos

20.5 Primera ley de la termodinámica

20.6 Algunas aplicaciones de la primera ley de la termodinámica

20.7 Mecanismos de transferencia de energía



▲ *En esta fotografía del lago Bow del Parque Nacional Banff, Alberta, Canadá, vemos evidencia del agua en sus tres fases. En el lago hay agua en estado líquido, y en el suelo aparece agua en estado sólido en forma de nieve; las nubes en el cielo están formadas por gotitas de agua líquida que se han condensado del vapor de agua en estado gaseoso del aire. Los cambios de una sustancia, de una fase a otra, son resultado de la transferencia de energía. (Jacob Taposchaner/Getty Images)*

Materiał chroniony prawem autorskim

Hacia 1850, se consideraba que los campos de la termodinámica y mecánica eran dos ramas distintas de la ciencia, y la ley de conservación de la energía parecía describir sólo ciertas clases de sistemas mecánicos. Poco después, experimentos realizados a mediados del siglo XIX por el inglés James Joule, y otros, demostraron que había un fuerte enlace entre la transferencia de energía por calor en procesos térmicos y la transferencia de energía por trabajo en procesos mecánicos. Ahora sabemos que la energía interna, que formalmente definimos en este capítulo, puede transformarse en energía mecánica. Una vez generalizado el concepto de energía mecánica para abarcar también energía interna, la ley de la conservación de la energía emergió como ley universal de la naturaleza.

Este capítulo se concentra en el concepto de energía interna, en los procesos por medio de los cuales se transfiere energía, en la primera ley de la termodinámica y en algunas de las más importantes aplicaciones de la primera ley. La primera ley de la termodinámica es un enunciado de la conservación de la energía. Describe sistemas en los que el único cambio de energía es el de energía interna y las transferencias de energía son por calor y trabajo. Una diferencia importante de nuestro estudio del trabajo en este capítulo, con respecto a los capítulos sobre mecánica, es que consideraremos el trabajo realizado sobre sistemas *deformables*.

20.1 Calor y energía interna

Desde el principio, es importante que hagamos una distinción mayor entre energía interna y calor. **Energía interna es toda la energía de un sistema que está asociada con sus componentes microscópicos, átomos y moléculas, cuando se ve desde un marco de referencia en reposo con respecto al centro de masa del sistema.** La última parte de esta oración asegura que cualquier energía cinética volumétrica del sistema, debida a su movimiento por el espacio, no está incluida en energía interna. La energía interna incluye energía cinética de movimiento aleatorio de traslación, rotación y vibración de moléculas, energía potencial dentro de moléculas y energía potencial entre moléculas. Es útil relacionar energía interna con la temperatura de un cuerpo, pero esta relación es limitada; en la sección 20.3 demostramos que pueden ocurrir cambios en energía interna en ausencia de cambios de temperatura.

El calor se define como la transferencia de energía a través de la frontera de un sistema debido a la diferencia de temperatura entre el sistema y su entorno. Cuando *calentamos* una sustancia, a ella transferimos energía al ponerla en contacto con el entorno de una temperatura más alta. Éste es el caso, por ejemplo, cuando se pone una sartén con agua fría en el quemador de una estufa; el quemador está a una temperatura más alta que el agua, de modo que el agua gana energía. También usaremos el término *calor* para representar la cantidad de energía transferida por este método.

Los científicos consideraban el calor como un fluido llamado *calórico*, que pensaban se transfería entre cuerpos; así, definieron el calor en términos de los cambios de temperatura producidos en un cuerpo durante el calentamiento. En la actualidad, reconocemos la diferencia distintiva entre energía interna y calor. Sin embargo, hablamos de cantidades con

¡ADVERTENCIA!

20.1 Energía interna, energía térmica y energía de enlace

Al leer otros libros de física, el estudiante puede ver términos como *energía térmica* y *energía de enlace*. La energía térmica se puede interpretar como la parte de la energía interna asociada con el movimiento aleatorio de moléculas y, en consecuencia, relacionado con la temperatura. La energía de enlace es energía potencial intermolecular. Por lo tanto,

$$\text{energía interna} = \text{energía térmica} + \text{energía de enlace}$$

Si bien esta división se presenta aquí como aclaración con respecto a otros textos, no usaremos estos términos porque no hay necesidad de ellos.

Materiał chroniony prawem autorskim

¡ADVERTENCIA!

20.2 Calor, temperatura y energía interna son diferentes

Al leer el periódico o escuchar la radio, debemos estar alertas respecto a frases incorrectamente empleadas que contengan la palabra *calor*, y debemos pensar en la palabra apropiada a usar en lugar de *calor*. Ejemplos incorrectos son, "Cuando el camión frenó hasta detenerse, una gran cantidad de calor se generó por fricción" y "El calor de un caluroso día de verano. . ."

nombres que no definen correctamente las cantidades, pero que se han incrustado en la tradición de la física con base en estas viejas ideas. Ejemplos de estas cantidades son *capacidad calorífica* y *calor latente* (secciones 20.2 y 20.3).

Como analogía a la distinción entre calor y energía interna, considere la distinción entre trabajo y energía mecánica estudiada en el capítulo 7. El trabajo realizado sobre un sistema es una medida de la cantidad de energía transferida al sistema desde su entorno, mientras que la energía mecánica del sistema (cinética más potencial) es una consecuencia del movimiento y configuración del sistema. Por lo tanto, cuando una persona realiza trabajo sobre un sistema, se transfiere energía de la persona al sistema. No tiene sentido hablar de trabajo *de* un sistema; se puede hablar sólo del trabajo realizado *sobre* el sistema o *por* el sistema cuando ha ocurrido algún proceso en el que se ha transferido energía hacia o desde el sistema. Análogamente, no tiene sentido hablar del calor *de* un sistema; se puede hablar de *calor* sólo cuando se ha transferido energía como resultado de una diferencia de temperatura. Calor y trabajo son formas de cambiar la energía de un sistema.

También es importante reconocer que la energía interna de un sistema se puede cambiar incluso cuando no se transfiera energía por calor. Por ejemplo, cuando un gas en un recipiente aislado es comprimido por un émbolo, aumentan la temperatura del gas y su energía interna, pero no ha ocurrido transferencia de energía por calor desde el entorno al gas. Si entonces el gas se expande rápidamente, se enfría y disminuye su energía interna, pero no ha tenido lugar transferencia de energía por calor desde él a su entorno. Los cambios de temperatura del gas se deben no a una diferencia en temperatura entre el gas y su entorno, sino más bien a la compresión y la expansión. En cada caso, se transfiere energía hacia o desde el gas por *trabajo*. Los cambios en energía interna en estos ejemplos están evidenciados por cambios correspondientes en la temperatura del gas.

James Prescott Joule
Físico inglés (1818–1889)

Joule recibió un poco de educación formal en matemáticas, filosofía y química de John Dalton, pero en gran parte fue autodidacta. La investigación de Joule le llevó al establecimiento del principio de conservación de la energía. Su estudio de la relación cuantitativa entre efectos eléctricos, mecánicos y químicos del calor, culminaron en su anuncio, en 1843, de la cantidad de trabajo necesaria para producir una unidad de energía, llamada equivalente mecánico del calor. *(Por amable permiso del Director y Consejo de la Royal Society.)*

Unidades de calor

Como ya hemos mencionado, los primeros estudios del calor se concentraron en el resultante aumento en temperatura de una sustancia, que con frecuencia era agua. Las primeras nociones de calor basadas en calórico sugerían que el flujo de este fluido de una sustancia a otra causaba cambios en temperatura. Del nombre de este mítico fluido tenemos una unidad de energía relacionada con procesos térmicos, la **caloría (cal),** que se define como **la cantidad de transferencia de energía necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua de 14.5°C a 15.5°C.**[1] (Nótese que la "Caloría," escrita con "C" mayúscula y que se usa para describir el contenido de energía de alimentos, es en realidad una kilocaloría). La unidad de energía en el sistema convencional en Estados Unidos es la **unidad térmica británica (Btu),** que se define como **la cantidad de transferencia de energía necesaria para elevar la temperatura de 1 lb de agua de 63°F a 64°F.**

En la comunidad científica se hace ahora un creciente uso de la unidad de energía del SI, el *joule*, para describir procesos térmicos. En este texto, el calor, trabajo y energía interna, suelen medirse en joules. (Nótese que el calor y el trabajo se miden en unidades de energía. No se confundan estos dos medios de *transferencia* de energía con la energía en sí, que también se mide en joules.)

El equivalente mecánico del calor

En los capítulos 7 y 8 encontramos que, siempre que haya fricción en un sistema mecánico, se pierde parte de la energía mecánica; en otras palabras, no se conserva energía mecánica en presencia de fuerzas no conservativas. Varios experimentos demuestran que esta energía mecánica perdida no desaparece simplemente, sino que se transforma en energía interna. Podemos realizar este experimento en casa con sólo meter un clavo en una pieza de madera, usando para esto un martillo. ¿Qué ocurre con toda la energía cinética del martillo una

[1] Originalmente, la caloría se definía como el "calor" necesario para elevar en 1°C la temperatura de 1 g de agua. Sin embargo, cuidadosas mediciones demostraron que la cantidad de energía necesaria para producir el cambio de 1°C depende en parte de la temperatura inicial; por lo tanto, evolucionó una definición más precisa.

Materiał chroniony prawem autorskim

nuestro ejemplo de transferencia de energía, pero téngase en mente que podríamos cambiar la temperatura de nuestro sistema por medio de cualquier método de transferencia de energía.

La **capacidad calorífica** C de una muestra particular de una sustancia se define como la cantidad de energía necesaria para elevar en 1°C la temperatura de esa muestra. De esta definición, vemos que si la energía Q produce un cambio ΔT en la temperatura de una muestra, entonces

$$Q = C\Delta T \tag{20.2}$$

El **calor específico** c de una sustancia es la capacidad calorífica por unidad de masa. Por lo tanto, si la energía Q se transfiere a una muestra de una sustancia con masa m y la temperatura de la muestra cambia en ΔT, entonces el calor específico de la sustancia es

Calor específico

$$c \equiv \frac{Q}{m\Delta T} \tag{20.3}$$

El calor específico es en esencia una medida de lo térmicamente insensible que es una sustancia a la suma de energía. Cuanto mayor es el calor específico de un material, más energía debe agregarse a una masa dada del material para causar un cambio particular de temperatura. La tabla 20.1 indica calores específicos representativos.

De esta definición, podemos relacionar la energía Q transferida entre una muestra de masa m de un material y su entorno a un cambio de temperatura ΔT como

$$Q = mc\Delta T \tag{20.4}$$

¡ADVERTENCIA!

20.3 Una desafortunada selección de terminología

El nombre *calor específico* es un desafortunado vestigio de los días cuando la termodinámica y la mecánica evolucionaban por separado. Un mejor nombre sería *transferencia específica de energía*, pero el término existente está demasiado atrincherado como para cambiarlo ahora.

Tabla 20.1

Calores específicos de algunas sustancias a 25°C y presión atmosférica

Sustancia	Calor específico c J/kg·°C	Calor específico c cal/g·°C
Sólidos elementales		
Aluminio	900	0.215
Berilio	1 830	0.436
Cadmio	230	0.055
Cobre	387	0.092 4
Germanio	322	0.077
Oro	129	0.030 8
Hierro	448	0.107
Plomo	128	0.030 5
Silicio	703	0.168
Plata	234	0.056
Otros sólidos		
Bronce	380	0.092
Vidrio	837	0.200
Hielo (−5°C)	2 090	0.50
Mármol	860	0.21
Madera	1 700	0.41
Líquidos		
Alcohol (etílico)	2 400	0.58
Mercurio	140	0.033
Agua (15°C)	4 186	1.00
Gas		
Vapor (100°C)	2 010	0.48

Materiał chroniony prawem autorskim

Por ejemplo, la energía necesaria para elevar en 3.00°C la temperatura de 0.500 kg de agua es $(0.500\ \text{kg})(4\ 186\ \text{J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(3.00^\circ\text{C}) = 6.28 \times 10^3$ J. Nótese que cuando aumenta la temperatura, Q y ΔT se toman como positivos y se transfiere energía hacia dentro del sistema. Cuando disminuye la temperatura, Q y ΔT son negativos y se transfiere energía hacia fuera del sistema.

El calor específico varía con la temperatura. No obstante, si los intervalos de temperatura no son demasiado grandes, la variación de temperatura se puede despreciar y c se puede tratar como una constante.[2] Por ejemplo, el calor específico del agua varía en sólo 1% de 0°C a 100°C a presión atmosférica. A menos que se indique otra cosa, despreciamos aquí estas variaciones.

Se encuentra que los valores medidos de calores específicos dependen de las condiciones del experimento. En general, las mediciones hechas en un proceso de presión constante son diferentes a las hechas en un proceso de volumen constante. Para sólidos y líquidos, la diferencia entre los dos valores suele ser no mayor de unos cuantos puntos porcentuales y con frecuencia se desecha. Casi todos los valores dados en la tabla 20.1 se midieron a presión atmosférica y temperatura ambiente. Los calores específicos para gases medidos a presión constante son muy diferentes de los valores medidos a volumen constante (véase el capítulo 21).

Pregunta rápida 20.1 Imaginemos tener, de cada uno, 1 kg de hierro, de vidrio y de agua, y que las tres muestras están a 10°C. Ordene las muestras de menor a mayor temperatura después de agregar 100 J de energía a cada muestra.

Pregunta rápida 20.2 Considerando las mismas muestras que en la Pregunta Rápida 20.1, ordénelas de menor a mayor por la cantidad de energía transferida por calor si cada muestra aumenta su temperatura en 20°C.

Es interesante observar de la tabla 20.1 que el agua tiene el más alto calor específico de los materiales comunes. Este alto calor específico es causante, en parte, de las moderadas temperaturas que se encuentran cerca de grandes masas de agua. Cuando disminuye la temperatura de una masa de agua durante el invierno, por medio de calor se transfiere energía del agua fría al aire, aumentando así la energía interna del aire. Debido al alto calor específico del agua, una cantidad relativamente grande de energía se transfiere al aire para incluso modestos cambios de temperatura del agua. El aire lleva esta energía interna hacia tierra cuando los vientos prevalecientes sean favorables. Por ejemplo, los vientos prevalecientes en la costa oeste de Estados Unidos son hacia tierra (hacia el este). Por lo tanto, la energía liberada por el océano Pacífico cuando se enfría mantiene las zonas costeras mucho más calientes de lo que serían de otro modo. Esto explica por qué los estados de la costa oeste generalmente tienen inviernos más favorables que los estados de la costa del este, donde los vientos prevalecientes no tienden a llevar la energía hacia tierra.

Conservación de la energía: calorimetría

Una técnica para medir calor específico comprende en calentar una muestra a una temperatura conocida T_x, poniéndola en un vaso que contenga agua de masa conocida y temperatura $T_w < T_x$, y midiendo la temperatura del agua después de alcanzar el equilibrio. Esta técnica se denomina **calorimetría,** y los dispositivos en los que se presenta esta transferencia de energía se llaman **calorímetros**. Si el sistema de la muestra y el agua está aislado, la ley de la conservación de la energía exige que la cantidad de energía que sale de la muestra (de calor específico desconocido) sea igual a la cantidad de energía que entre al agua.[3]

¡ADVERTENCIA!

20.4 Se puede transferir energía por cualquier método

Usaremos Q para representar la cantidad de energía transferida, pero recuérdese que la transferencia de energía en la ecuación 20.4 podría ser por *cualquiera* de los métodos introducidos en el capítulo 7; no tiene que ser calor. Por ejemplo, al doblar repetidamente el alambre de un gancho para colgar ropa, por *trabajo* se eleva la temperatura hasta el punto de doblarlo.

[2] La definición dada por la ecuación 20.3 supone que el calor específico no varía con la temperatura en el intervalo $\Delta T = T_f - T_i$. En general, si c varía con la temperatura en el intervalo, entonces la expresión correcta para Q es $Q = m\int_{T_i}^{T_f} c\, dT$.

[3] Para mediciones precisas, el recipiente de agua debe estar incluido en nuestros cálculos, porque también intercambia energía con la muestra. Sin embargo, hacer esto requiere un conocimiento de su masa y composición. Si la masa del agua es mucho mayor que la del recipiente, podemos despreciar los efectos del recipiente.

Materiał chroniony prawem autorskim

¡ADVERTENCIA!

20.5 Recuerde el signo negativo

Es *crítico* incluir el signo negativo en la ecuación 20.5. El signo negativo en la ecuación es necesario para consistencia con nuestra convención de signo para la transferencia de energía. La transferencia de energía Q_{sal} tiene un valor negativo porque sale energía de la sustancia caliente. El signo negativo en la ecuación asegura que el lado derecho sea un número positivo, consistente con el lado izquierdo, que es positivo porque entra energía en el agua fría.

La conservación de la energía nos permite escribir la representación matemática de este enunciado de energía como

$$Q_{frío} = -Q_{caliente} \tag{20.5}$$

El signo negativo de la ecuación es necesario para mantener consistencia con nuestra convención de signos para el calor.

Suponga que m_x es la masa de una muestra de alguna sustancia cuyo calor específico deseamos determinar. A su calor específico démosle el nombre de c_x y T_x a su temperatura inicial. De igual modo, representemos por m_w, c_w y T_w los valores correspondientes para el agua. Si T_f es la temperatura final de equilibrio después que todo está mezclado, entonces, de la ecuación 20.4, encontramos que la transferencia de energía para el agua es $m_w c_w(T_f - T_w)$, que es positiva por $T_f > T_w$, y que la transferencia de energía para la muestra de calor específico desconocido es $m_x c_x(T_f - T_x)$, que es negativa. La sustitución de estas expresiones en la ecuación 20.5 da

$$m_w c_w(T_f - T_w) = -m_x c_x(T_f - T_x)$$

Al despejar c_x tendremos

$$c_x = \frac{m_w c_w(T_f - T_w)}{m_x(T_x - T_f)}$$

Ejemplo 20.2 Enfriamiento de un lingote caliente

Un lingote de 0.050 0 kg de metal se calienta a 200.0°C y luego se pone en un vaso que contiene 0.400 kg de agua inicialmente a 20.0°C. Si la temperatura final de equilibrio del sistema mezclado es 22.4°C, encuentre el calor específico del metal.

Solución De acuerdo con la ecuación 20.5, podemos escribir

$$m_w c_w(T_f - T_w) = -m_x c_x(T_f - T_x)$$

$$(0.400\text{ kg})(4\,186\text{ J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(22.4^\circ\text{C} - 20.0^\circ\text{C}) = -(0.050\,0\text{ kg})(c_x)(22.4^\circ\text{C} - 200.0^\circ\text{C})$$

De aquí encontramos que

$$c_x = \mathbf{453\text{ J/kg}\cdot{}^\circ\text{C}}$$

Es muy probable que el lingote sea de hierro, como podemos ver al comparar este resultado con los datos presentados en la tabla 20.1. Nótese que la temperatura del lingote está inicialmente arriba del punto de 100°C. En consecuencia, parte del agua puede vaporizarse cuando ponemos el lingote en el agua. Suponemos que tenemos un sistema sellado y que este vapor no puede escapar. Como la temperatura final de equilibrio es menor a 100°C, cualquier vapor que resulte se vuelve a condensar en agua.

¿Qué pasa si? Suponga que estamos realizando un experimento en el laboratorio, que utiliza esta técnica para determinar el calor específico de una muestra, y usted desea conocer la incertidumbre total en su resultado final para c_x. De los datos dados en el texto de este ejemplo, ¿cuál valor sería más efectivo cambiar al disminuir la incertidumbre?

Respuesta La mayor incertidumbre experimental está asociada con la pequeña diferencia de temperatura de 2.4°C para $T_f - T_w$. Por ejemplo, una incertidumbre de 0.1°C en cada una de estas lecturas de temperatura lleva a una incertidumbre de 8% en la diferencia de ellas. Para que esta diferencia de temperatura sea experimentalmente más grande, el cambio más efectivo es *disminuir la cantidad de agua.*

Ejemplo 20.3 Hora de divertirse para un vaquero

Un vaquero dispara una bala de plata, con una rapidez en la boca de su arma de 200 m/s, que apunta a la pared de pino de una taberna. Suponga que toda la energía interna generada por el impacto permanece con la bala. ¿Cuál es el cambio de temperatura de la bala?

Solución La energía cinética de la bala es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2$$

Como nada en el ambiente está más caliente que la bala, ésta no gana energía por calor. Su temperatura aumenta porque la energía cinética se transforma en energía interna extra cuando la bala es detenida por la pared. El cambio de temperatura es igual que el que tendría lugar si la energía $Q = K$ fuera transferida por calor de una estufa a la bala. Si imaginamos que tiene lugar este último proceso, podemos calcular ΔT de la ecuación 20.4. Con el uso de 234 J/kg·°C como calor específico de la bala (véase la tabla 20.1), obtenemos

$$(1)\quad \Delta T = \frac{Q}{mc} = \frac{K}{mc} = \frac{\frac{1}{2}\cancel{m}(200\text{ m/s})^2}{\cancel{m}(234\text{ J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})} = \mathbf{85.5^\circ C}$$

Nótese que el resultado no depende de la masa de la bala.

Materiał chroniony prawem autorskim

¿Qué pasaría si? **Suponga que al vaquero se le agotan las balas de plata y dispara una bala de plomo a la misma velocidad hacia la pared. El cambio de temperatura de la bala, ¿será mayor o menor?**

Respuesta Si consultamos la tabla 20.1, encontramos que el calor específico del plomo es 128 J/kg·°C, que es menor que el de la plata. Por lo tanto, una cantidad dada de energía de entrada elevará el plomo a una temperatura más alta que la plata y la temperatura final de la bala de plomo será mayor. En la ecuación (1), sustituimos el nuevo valor para calor específico:

$$\Delta T = \frac{Q}{mc} = \frac{K}{mc} = \frac{\frac{1}{2}m(200\text{ m/s})^2}{m(128\text{ J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})} = 156^\circ\text{C}$$

Nótese que no hay requerimiento de que las balas de plata y plomo tengan la misma masa para determinar esta temperatura. El único requerimiento es que tengan la misma rapidez.

20.3 Calor latente

Es frecuente que una sustancia experimente un cambio de temperatura cuando se transfiere energía entre ella y su entorno. Hay situaciones, sin embargo, en las que la transferencia de energía no resulta en un cambio de temperatura. Éste es el caso siempre que las características físicas de la sustancia cambien de una forma a la otra; este cambio se conoce comúnmente como **cambio de fase**. Dos cambios de fase comunes son de sólido a líquido (fusión) y de líquido a gas (ebullición); otro es un cambio en la estructura cristalina de un sólido. Todos estos cambios de fase comprenden un cambio en energía interna, pero ningún cambio en temperatura. El aumento en energía interna en ebullición, por ejemplo, está representada por la rotura de enlaces entre moléculas en el estado líquido; esta rotura de enlaces permite que las moléculas se muevan a distancias más lejanas en el estado gaseoso, con un correspondiente aumento en energía potencial intermolecular.

Como es de esperarse, diferentes sustancias responden de manera diferente a la suma o retiro de energía cuando cambian de fase porque varían sus distribuciones moleculares internas. Del mismo modo, la cantidad de energía transferida durante un cambio de fase depende de la cantidad de sustancia de que se trate. (Se necesita menos energía para derretir un cubo de hielo de la necesaria para descongelar un lago.) Si la cantidad Q de transferencia de energía se necesita para cambiar la fase de una masa m de una sustancia, la razón $L \equiv Q/m$ caracteriza una importante propiedad térmica de esa sustancia. Debido a que esta energía agregada o eliminada no resulta en un cambio de temperatura, la cantidad L se denomina **calor latente** (literalmente, el calor "oculto") de la sustancia. El valor de L para una sustancia depende de la naturaleza del cambio de fase, así como de las propiedades de la sustancia.

De la definición de calor latente, y de nuevo seleccionando el calor como nuestro mecanismo de transferencia de energía, encontramos que la energía necesaria para cambiar la fase de una masa m dada de una sustancia pura es

$$Q = \pm mL \tag{20.6}$$

Calor latente de fusión L_f es el término empleado cuando el cambio de fase es de sólido a líquido (*fundir* significa "combinar por fusión"), y **calor latente de vaporización** L_v es el término que se emplea cuando el cambio de fase es de líquido a gas (el líquido "se vaporiza").[4] Los calores latentes de varias sustancias varían considerablemente, como se ve en los datos de la tabla 20.2. El signo positivo de la ecuación 20.6 se emplea cuando la energía entra a un sistema, causando fusión o vaporización. El signo negativo corresponde a la energía que sale de un sistema, de modo que el sistema se congela o se condensa.

Para comprender el papel del calor latente en cambios de fase, considere la energía necesaria para convertir un cubo de 1.00 g de hielo a −30.0°C en vapor a 120.0°C. La figura 20.2 indica los resultados experimentales obtenidos cuando gradualmente se agrega agua al hielo. Examinemos cada parte de la curva roja.

¡ADVERTENCIA!

20.6 Los signos son críticos

Con frecuencia hay errores de signo cuando el estudiante aplica ecuaciones de calorimetría, de modo que trataremos otra vez este punto. Para cambios de fase, use el correcto signo explícito de la ecuación 20.6, dependiendo de si está agregando o retirando energía de la sustancia. En la ecuación 20.4, no hay signo explícito a considerar, pero asegúrese que su ΔT sea *siempre* la temperatura final menos la temperatura inicial. Además, asegúrese que *siempre* incluya el signo negativo en el lado derecho de la ecuación 20.5.

Calor latente

[4] Cuando un gas se enfría, finalmente se *condensa*, es decir, regresa a la fase líquida. La energía cedida por unidad de masa se llama *calor latente de condensación* y es numéricamente igual al calor latente de vaporización. Del mismo modo, cuando un líquido se enfría, finalmente se solidifica, y el *calor latente de solidificación* es numéricamente igual al calor latente de fusión.

Materiał chroniony prawem autorskim

Tabla 20.2

Calores latentes de fusión y vaporización

Sustancia	Punto de fusión (°C)	Calor latente de fusión (J/kg)	Punto de ebullición (°C)	Calor latente de vaporización (J/kg)
Helio	−269.65	5.23×10^3	−268.93	2.09×10^4
Nitrógeno	−209.97	2.55×10^4	−195.81	2.01×10^5
Oxígeno	−218.79	1.38×10^4	−182.97	2.13×10^5
Alcohol etílico	−114	1.04×10^5	78	8.54×10^5
Agua	0.00	3.33×10^5	100.00	2.26×10^6
Azufre	119	3.81×10^4	444.60	3.26×10^5
Plomo	327.3	2.45×10^4	1 750	8.70×10^5
Aluminio	660	3.97×10^5	2 450	1.14×10^7
Plata	960.80	8.82×10^4	2 193	2.35×10^6
Oro	1 063.00	6.44×10^4	2 660	1.58×10^6
Cobre	1 083	1.34×10^5	1 187	5.06×10^6

Parte A. En esta parte de la curva, la temperatura del hielo cambia de −30.0°C a 0.0°C. Como el calor específico del hielo es 2 090 J/kg·°C, podemos calcular la cantidad de energía agregada si usamos la ecuación 20.4:

$$Q = m_i c_i \, \Delta T = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})(2\,090\ \text{J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(30.0^\circ\text{C}) = 62.7\ \text{J}$$

Parte B. Cuando la temperatura del hielo llega a 0.0°C, la mezcla de hielo y agua permanece a esta temperatura, aun cuando se está agregando energía, hasta que todo el hielo se derrite. La energía necesaria para derretir 1.00 g de hielo a 0.0°C es, de la ecuación 20.6,

$$Q = m_i L_f = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})(3.33 \times 10^5\ \text{J/kg}) = 333\ \text{J}$$

Por lo tanto, nos hemos movido a la marca de 396 J (= 62.7 J + 333 J) sobre el eje de energía de la figura 20.2.

Parte C. Entre 0.0°C y 100.0°, no pasa nada sorprendente. No hay cambio de fase y por ello toda la energía agregada al agua se utiliza para aumentar su temperatura. La cantidad de energía necesaria para aumentar la temperatura de 0.0°C a 100.0°C es

$$Q = m_w c_w \, \Delta T = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})(4.19 \times 10^3\ \text{J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(100.0^\circ\text{C}) = 419\ \text{J}$$

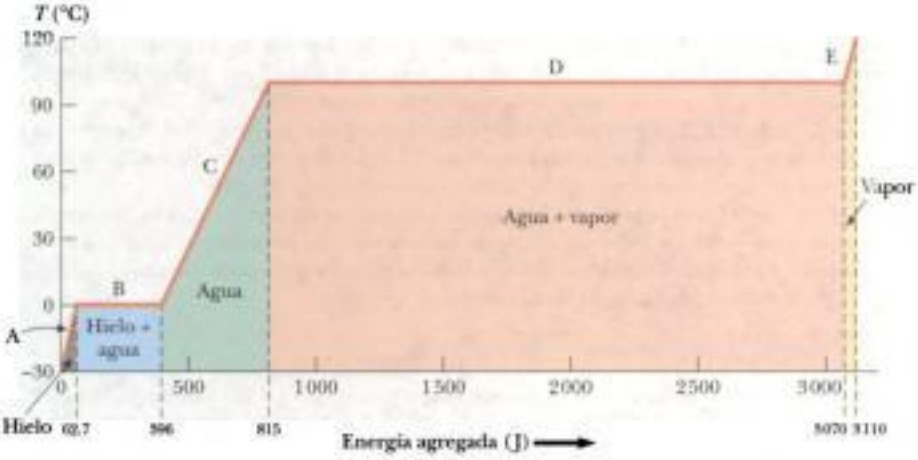


Figura 20.2 Gráfica de temperatura contra energía agregada cuando 1.00 g de hielo, inicialmente a −30.0°C, se convierte en vapor a 120.0°C.

Materiał chroniony prawem autorskim

¡ADVERTENCIA!

20.7 Celsius vs. Kelvin

En ecuaciones en las que T aparece, por ejemplo, como en la ley del gas ideal, *debe* usarse la temperatura Kelvin. En ecuaciones en donde aparece ΔT, como en las ecuaciones de calorimetría, es *posible* usar temperaturas Celsius, porque un cambio en temperatura es igual en ambas escalas. Es *más seguro*, sin embargo, usar *de manera consistente* temperaturas Kelvin en todas las ecuaciones donde aparezca T o ΔT.

Pregunta rápida 20.4 Calcule las pendientes para las partes A, C y E de la figura 20.2. Ordene las pendientes de menor a mayor y explique lo que significa este ordenamiento.

SUGERENCIAS PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Problemas de calorimetría

Si el estudiante tiene dificultad para resolver problemas de calorimetría, debe asegurarse de considerar los siguientes puntos:

- Las unidades de medida deben ser consistentes. Por ejemplo, si se usan calores específicos medidos en J/kg·°C, asegúrese que las masas sean en kilogramos y las temperaturas sean en grados Celsius.
- Las transferencias de energía están dadas por la ecuación $Q = mc\,\Delta T$ sólo para aquellos procesos en los que no ocurre cambio de fase. Utilice las ecuaciones $Q = \pm mL_f$ y $Q = \pm mL_v$ sólo cuando *tengan lugar* cambios de fase; asegúrese de seleccionar el signo apropiado para estas ecuaciones, dependiente de la dirección de transferencia de energía.
- A veces, se cometen errores en signo cuando se usa la ecuación $Q_{frío} = -Q_{cal}$. Asegúrese de usar el signo negativo en la ecuación, y recuerde que ΔT es siempre la temperatura final menos la temperatura inicial.

Ejemplo 20.4 Para enfriar el vapor

¿Qué masa de vapor, inicialmente a 130°C, se necesita para calentar 200 g de agua en un recipiente de vidrio de 100 g de 20.0°C a 50.0°C?

Solución El vapor pierde energía en tres etapas. En la primera, el vapor se enfría a 100°C. La transferencia de energía en el proceso es

$$Q_1 = m_v c_v\,\Delta T = m_v(2.01 \times 10^3\ \text{J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(-30.0^\circ\text{C})$$
$$= -m_v(6.03 \times 10^4\ \text{J/kg})$$

donde m_v es la masa desconocida del vapor.

En la segunda etapa, el vapor se convierte en agua. Para hallar la transferencia de energía durante este cambio de fase, usamos $Q = -mL_v$, donde el signo negativo indica que está saliendo energía del vapor:

$$Q_2 = -m_v(2.26 \times 10^6\ \text{J/kg})$$

En la tercera etapa, la temperatura del agua creada desde el vapor se reduce a 50.0°C. Este cambio requiere una transferencia de energía de

$$Q_3 = m_v c_w \Delta T = m_v(4.19 \times 10^3\ \text{J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(-50.0^\circ\text{C})$$
$$= -m_v(2.09 \times 10^5\ \text{J/kg})$$

Al sumar las transferencias de energía en estas tres etapas, obtenemos

$$Q_{cal} = Q_1 + Q_2 + Q_3$$
$$= -m_v[6.03 \times 10^4\ \text{J/kg} + 2.26 \times 10^6\ \text{J/kg} + 2.09 \times 10^5\ \text{J/kg}]$$
$$= -m_v(2.53 \times 10^6\ \text{J/kg})$$

Ahora, dirigimos nuestra atención al aumento de temperatura del agua y el recipiente. Con la ecuación 20.4, encontramos que

$$Q_{frío} = (0.200\ \text{kg})(4.19 \times 10^3\ \text{J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(30.0^\circ\text{C}) + (0.100\ \text{kg})(837\ \text{J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(30.0^\circ\text{C})$$
$$= 2.77 \times 10^4\ \text{J}$$

Si usamos la ecuación 20.5, podemos despejar la masa desconocida:

$$Q_{frío} = -Q_{cal}$$
$$2.77 \times 10^4\ \text{J} = -[-m_v(2.53 \times 10^6\ \text{J/kg})]$$
$$m_v = 1.09 \times 10^{-2}\ \text{kg} = \boxed{10.9\ \text{g}}$$

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si el estado final del sistema es agua a 100°C? ¿Necesitaremos más o menos vapor? ¿Cómo cambiaría el análisis de líneas antes?

Respuesta Se necesitaría más vapor para elevar la temperatura del agua y el recipiente a 100°C en lugar de a 50.0°C. Habría dos cambios importantes en el análisis. Primero, no tendríamos un término Q_3 para el vapor porque el agua que se condensa del vapor no se enfría abajo de 100°C. En segundo término, en $Q_{frío}$, el cambio de temperatura sería 80.0°C en lugar de 30.0°C. Por lo tanto, Q_{cal} se convierte en

$$Q_{cal} = Q_1 + Q_2$$
$$= -m_v(6.03 \times 10^4\ \text{J/kg} + 2.26 \times 10^6\ \text{J/kg})$$
$$= -m_v(2.32 \times 10^6\ \text{J/kg})$$

y $Q_{frío}$ se convierte en

$$Q_{frío} = (0.200\ \text{kg})(4.19 \times 10^3\ \text{J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(80.0^\circ\text{C}) + (0.100\ \text{kg})(837\ \text{J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(80.0^\circ\text{C})$$
$$= 7.37 \times 10^4\ \text{J}$$

lo que lleva a $m_v = 3.18 \times 10^{-2}\ \text{kg} = 31.8\ \text{g}$.

Materiał chroniony prawem autorskim

20.5 Primera ley de la termodinámica

Cuando introdujimos la ley de conservación de la energía en el capítulo 7, expresamos que el cambio en la energía de un sistema es igual a la suma de todas las transferencias de energía por la frontera del sistema. La primera ley de la termodinámica es un caso especial de la ley de conservación de la energía que comprende cambios en energía interna y transferencia de energía por calor y trabajo. Es una ley que se puede aplicar a numerosos procesos y proporciona un enlace entre los mundos microscópico y macroscópico.

Hemos estudiado dos formas en las que se puede transferir energía entre un sistema y su entorno. Una de ellas es trabajo realizado sobre el sistema, que especifica que haya un desplazamiento macroscópico desde el punto de aplicación de una fuerza. La otra es calor, que ocurre en un nivel molecular siempre que exista diferencia de temperatura por la frontera del sistema. Ambos mecanismos resultan en un cambio en la energía interna del sistema y, por lo tanto, suele resultar en cambios mensurables en las variables macroscópicas del sistema, como son presión, temperatura y volumen de un gas.

Para entender mejor estas ideas sobre base cuantitativa, supongamos que un sistema experimenta un cambio de un estado inicial a un estado final. Durante este cambio, ocurre transferencia de energía al sistema por medio de calor Q, y se realiza trabajo W sobre el sistema. Como ejemplo, suponga que el sistema es un gas en el que cambian presión y volumen de P_i y V_i a P_f y V_f. Si la cantidad $Q + W$ se mide para varias trayectorias que enlazan los estados inicial y final de equilibrio, encontramos que es igual para todas las trayectorias que enlazan los dos estados. Concluimos que la cantidad $Q + W$ está determinada por completo por los estados inicial y final del sistema, y llamamos a esta cantidad el **cambio en la energía interna** del sistema. Aun cuando Q y W dependen ambos de la trayectoria, **la cantidad Q + W es independiente de la trayectoria.** Si usamos el símbolo E_{int} para representar la energía interna, entonces el *cambio* en energía interna ΔE_{int} se puede expresar como[5]

Primera ley de la termodinámica

$$\Delta E_{int} = Q + W \tag{20.9}$$

donde todas las cantidades deben tener las mismas unidades de medida para energía. La ecuación 20.9 se conoce como **primera ley de la termodinámica.** Una de las consecuencias importantes de la primera ley de la termodinámica es que existe una cantidad conocida como energía interna cuyo valor está determinado por el estado del sistema. La energía interna es por lo tanto, una variable de estado como presión, volumen y temperatura.

Cuando un sistema experimenta un cambio infinitesimal en un estado en el que una pequeña cantidad de energía dQ es transferida por calor y se realiza una pequeña cantidad de trabajo dW, la energía interna cambia una pequeña cantidad dE_{int}. Por lo tanto, para procesos infinitesimales, podemos expresar la primera ley como[6]

$$dE_{int} = dQ + dW$$

La primera ley de la termodinámica es una ecuación de conservación de la energía que especifica que el único tipo de energía que cambia en el sistema es la energía interna E_{int}. Investiguemos algunos casos especiales en los que existe esta condición.

Primero, considere un *sistema aislado*, es decir, aquel que no interactúa con su entorno. En este caso, no tiene lugar transferencia de energía por calor y el trabajo realizado sobre

¡ADVERTENCIA!

20.8 Convenciones de doble signo

Algunos libros de texto de física e ingeniería presentan la primera ley como $\Delta E_{int} = Q - W$, con un signo menos entre calor y trabajo. La razón de esto es que el trabajo se define en estos tratamientos como el trabajo realizado *por* el gas, más que *sobre* el gas, como en nuestro tratamiento. La ecuación equivalente a la ecuación 20.8 en estos tratamientos define el trabajo como $W = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV$. En consecuencia, si el gas realiza trabajo positivo sale energía del sistema, lo que lleva al signo negativo en la primera ley. En los estudios en otros cursos de química o ingeniería, o en otros textos de física, el lector debe asegurarse de observar cuál convención de signo se emplea para la primera ley.

[5] Es un infortunado accidente de la historia que el símbolo tradicional para energía interna sea U, que es también el símbolo tradicional para energía potencial, como se introdujo en el capítulo 8. Para evitar confusión entre energía potencial y energía interna, usamos el símbolo E_{int} para energía interna en este libro. Si el lector toma un curso avanzado en termodinámica, sin embargo, debe estar preparado para ver U empleado como el símbolo para energía interna.

[6] Nótese que dQ y dW no son cantidades diferenciales verdaderas porque Q y W no son variables de estado; sin embargo, dE_{int} sí lo es. Como dQ y dW son *diferenciales inexactas*, con frecuencia son representadas por símbolos como $đQ$ y $đW$. Para más detalles sobre este punto, véase un texto avanzado sobre termodinámica, como el R. P. Bauman, *Modern Thermodynamics and Statistical Mechanics*, New York, Macmillan Publishing Co., 1992.

Materiał chroniony prawem autorskim

Solución De la primera ley, encontramos que

$$\Delta E_{int} = Q + W$$
$$0 = Q + W$$
$$Q = -W = \mathbf{2.7 \times 10^3\ J}$$

(C) Si el gas es devuelto al volumen original por medio de un proceso isobárico, ¿cuánto trabajo es realizado sobre el gas?

Solución El trabajo realizado en un proceso isobárico está dado por la ecuación 20.11. En este caso, el volumen inicial es 10.0 L y el volumen final es 3.0 L, el inverso de la situación de la parte (A). No nos dan la presión, de modo que necesitamos incorporar la ley de gases ideales:

$$W = -P(V_f - V_i) = -\frac{nRT_i}{V_i}(V_f - V_i)$$
$$= -\frac{(1.0\ \text{mol})(8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(273\ \text{K})}{10.0 \times 10^{-3}\ \text{m}^3} \times (3.0 \times 10^{-3}\ \text{m}^3 - 10.0 \times 10^{-3}\ \text{m}^3)$$
$$= \mathbf{1.6 \times 10^3\ J}$$

Nótese que usamos la temperatura y volumen iniciales para determinar el valor de la presión constante porque no conocemos la temperatura final. El trabajo realizado sobre el gas es positivo porque el gas está siendo comprimido.

Ejemplo 20.7 Agua en ebullición

Suponga que 1.00 g de agua se vaporiza isobáricamente a presión atmosférica (1.013×10^5 Pa). Su volumen en estado líquido es $V_i = V_{\text{líquido}} = 1.00\ \text{cm}^3$, y su volumen en el estado de vapor es $V_f = V_{\text{vapor}} = 1\,671\ \text{cm}^3$. Encuentre el trabajo realizado en la expansión y el cambio en energía interna del sistema. Pase por alto cualquier mezcla del vapor y el aire circundante; imagine que el vapor simplemente empuja el aire circundante fuera de su camino.

Solución Debido a que la expansión tiene lugar a presión constante, el trabajo realizado sobre el sistema (el agua que se vaporiza) cuando empuja el aire circundante es, de la ecuación 20.11,

$$W = -P(V_f - V_i)$$
$$= -(1.013 \times 10^5\ \text{Pa})(1\,671 \times 10^{-6}\ \text{m}^3 - 1.00 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)$$
$$= \mathbf{-169\ J}$$

Para determinar el cambio en energía interna, debemos conocer la transferencia de energía Q necesaria para vaporizar el agua. Con la ecuación 20.6 y el calor latente de vaporización para el agua, tenemos

$$Q = mL_v = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})(2.26 \times 10^6\ \text{J/kg}) = 2\,260\ \text{J}$$

Por lo tanto, de la primera ley, el cambio en energía interna es

$$\Delta E_{int} = Q + W = 2\,260\ \text{J} + (-169\ \text{J}) = \mathbf{2.09\ kJ}$$

El valor positivo para ΔE_{int} indica que aumenta la energía térmica del sistema. Vemos que casi toda la energía (2 090 J/2 260 J = 93%) transferida al líquido se va a aumentar la energía interna del sistema. El restante 7% de la energía transferida sale del sistema por trabajo realizado por el vapor sobre la atmósfera circundante.

Ejemplo 20.8 Calentamiento de un sólido

Una barra de cobre de 1.0 kg es calentada a presión atmosférica. Si su temperatura aumenta de 20°C a 50°C,

(A) ¿cuál es el trabajo realizado sobre la barra de cobre por la atmósfera circundante?

Solución Debido a que el proceso es isobárico, podemos hallar el trabajo realizado sobre la barra de cobre si usamos la ecuación 20.11, $W = -P(V_f - V_i)$. Podemos calcular el cambio en volumen de la barra de cobre si usamos la ecuación 19.6. Con el uso del coeficiente promedio de expansión lineal para el cobre que se da en la tabla 19.1, y si recordamos que $\beta = 3\alpha$, obtenemos

$$\Delta V = \beta V_i \Delta T$$
$$= [5.1 \times 10^{-5}\ (°\text{C})^{-1}](50°\text{C} - 20°\text{C})V_i = 1.5 \times 10^{-5}\ V_i$$

El volumen V_i es igual a m/ρ, y la tabla 14.1 indica que la densidad del cobre es $8.92 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$. Por lo tanto,

$$\Delta V = (1.5 \times 10^{-3})\left(\frac{1.0\ \text{kg}}{8.92 \times 10^3\ \text{kg/m}^3}\right)$$
$$= 1.7 \times 10^{-7}\ \text{m}^3$$

El trabajo realizado sobre la barra de cobre es

$$W = -P\,\Delta V = -(1.013 \times 10^5\ \text{N/m}^2)(1.7 \times 10^{-7}\ \text{m}^3)$$
$$= \mathbf{-1.7 \times 10^{-2}\ J}$$

Como este trabajo es negativo, el trabajo es realizado *por* la barra de cobre sobre la atmósfera.

(B) ¿Qué cantidad de energía se transfiere por calor a la barra de cobre?

Solución Tomando el calor específico del cobre de la tabla 20.1 y con la ecuación 20.4, encontramos que la energía transferida por calor es

$$Q = mc\,\Delta T = (1.0\ \text{kg})(387\ \text{J/kg}\cdot°\text{C})(30°\text{C})$$
$$= \mathbf{1.2 \times 10^4\ J}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

(C) ¿Cuál es el aumento en energía interna de la barra de cobre?

Solución De la primera ley de la termodinámica, tenemos

$$\Delta E_{int} = Q + W = 1.2 \times 10^4\,\text{J} + (-1.7 \times 10^{-2}\,\text{J})$$

$$= 1.2 \times 10^4\,\text{J}$$

Nótese que casi toda la energía transferida por calor hacia el sistema se va a aumentar la energía interna de la barra de cobre. La fracción de energía empleada para realizar trabajo sobre la atmósfera circundante es de sólo 10^{-6}. En consecuencia, cuando se analiza la expansión térmica de un sólido o un líquido, la pequeña cantidad de trabajo realizado sobre o por el sistema suele pasarse por alto.

20.7 Mecanismos de transferencia de energía

En el capítulo 7, introdujimos un método general para abordar el análisis de energía de procesos físicos por medio de la ecuación 7.17, $\Delta E_{sistema} = \Sigma T$, donde T representa transferencia de energía. Ya antes en este capítulo vimos dos de los términos del lado derecho de esta ecuación, trabajo y calor. En esta sección, exploramos más detalles acerca del calor como medio de transferencia de energía y consideramos otros dos métodos de transferencia de energía que con frecuencia están relacionados con cambios de temperatura, es decir, convección (una forma de transferencia de materia) y radiación electromagnética.

Conducción térmica

El proceso de transferencia de energía por calor también se puede llamar **conducción** o **conducción térmica.** En este proceso, la transferencia se puede representar a escala atómica como un intercambio de energía cinética entre partículas microscópicas, moléculas, átomos y electrones libres, en las que las partículas con menos energía ganan energía en colisiones con partículas con más energía. Por ejemplo, si se sostiene un extremo de una barra metálica larga y se inserta el otro extremo en una flama, se encuentra que pronto aumenta la temperatura del metal junto a la mano. La energía llega a la mano por medio de conducción. Podemos entender el proceso de conducción si examinamos lo que ocurre a las partículas microscópicas del metal. Inicialmente, antes que la barra se inserte en la flama, las partículas microscópicas están vibrando alrededor de sus posiciones de equilibrio. Cuando la flama calienta la barra, las partículas cerca de la flama empiezan a vibrar con amplitudes cada vez mayores. Estas partículas, a su vez, chocan con sus vecinas y les transfieren parte de su energía en las colisiones. Lentamente, las amplitudes de vibración de átomos y electrones metálicos que están más y más lejos de la flama aumentan hasta que, por último, son afectados los del metal cerca de la mano. Esta vibración aumentada es detectada por un aumento de la temperatura del metal y de la mano potencialmente quemada.

Recipiente de agua en ebullición puesto sobre el quemador de una estufa. Por conducción térmica, entra energía al agua por el fondo del recipiente.

La rapidez de conducción térmica depende de las propiedades de la sustancia que se esté calentando. Por ejemplo, es posible sostener indefinidamente una pieza de asbesto en una flama. Esto implica que muy poca energía se conduce por el asbesto. En general, los metales son buenos conductores térmicos, y materiales como el asbesto, corcho, papel y fibra de vidrio son malos conductores. Los gases también son malos conductores debido a la gran distancia que separa las partículas. Los metales son buenos conductores térmicos, porque contienen grandes números de electrones que están relativamente libres de moverse por el metal, y, por lo tanto, pueden transportar energía a grandes distancias. Por lo tanto, en un buen conductor, por ejemplo el cobre, la conducción tiene lugar por medio de vibración de átomos y movimiento de electrones libres.

La conducción ocurre sólo si hay una diferencia en temperatura entre dos partes del medio conductor. Considere una placa de material de grosor Δx y área A de sección transversal. Una cara de la placa está a una temperatura T_c, y la otra cara está a una temperatura $T_h > T_c$ (figura 20.10). Experimentalmente, se encuentra que la energía Q se transfiere en un intervalo de tiempo Δt de la cara más caliente a la más fría. La rapidez $\mathcal{P} = Q/\Delta t$ a la que ocurre esta transferencia de energía se encuentra que es proporcional al área de la sección transversal y la diferencia de temperatura $\Delta T = T_h - T_c$, e inversamente proporcional al grosor:

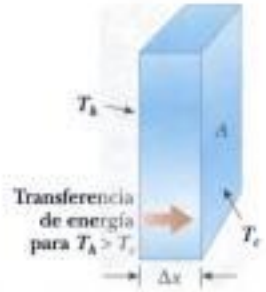


Figura 20.10 Transferencia de energía a través de una placa conductora con área A de sección transversal y grosor Δx. Las caras opuestas están a diferentes temperaturas T_c y T_h.

Materiał chroniony prawem autorskim

¿Qué pasaría si? Suponga que usted construye un recipiente aislado con dos capas de aislamiento y la rapidez de transferencia de energía determinada por la ecuación (4) resulta ser demasiado alta. Usted tiene espacio suficiente para aumentar el grosor de una de las dos capas en un 20%. ¿Cómo determinaría cuál capa seleccionar?

Respuesta Para reducir la potencia tanto como sea posible, debe aumentar el denominador de la ecuación (4) tanto como sea posible. Cualquier grosor que seleccione aumentar, L_1 o L_2, aumentará en 20% el correspondiente término L/k del denominador. Para que este porcentaje cambie para representar el cambio absoluto más grande, se desea tomar 20% del término más grande. Así, se debe aumentar el grosor de la capa que tenga el valor más grande de L/k.

Pregunta rápida 20.7 Un cubo de hielo envuelto en una tela de lana, ¿permanecerá congelado: (a) un tiempo más corto, (b) el mismo tiempo, (c) un tiempo más largo que un cubo de hielo idéntico expuesto al aire a temperatura ambiente?

Pregunta rápida 20.8 Se tienen dos barras de la misma longitud y diámetro, pero están formadas de materiales diferentes. Las barras se usarán para conectar dos regiones de diferente temperatura tal que se transfiere energía a través de las barras por medio de calor. Se pueden conectar en serie, como en la figura 20.13a, o en paralelo, como en la figura 20.13b. ¿En qué caso es mayor la rapidez de transferencia de energía por medio de calor?: (a) cuando las barras están en serie, (b) cuando las barras están en paralelo, (c) la rapidez es igual en ambos casos.

Figura 20.13 (Pregunta rápida 20.8) ¿En cuál caso es mayor la rapidez de transferencia de energía

Cortesía del Dr. Albert A. Bartlett, Universidad de Colorado, Boulder

Se conduce energía del interior al exterior más rápidamente en la parte del techo donde se ha derretido nieve. El dormitorio parece haber sido agregado y aislado. El techo principal no parece estar aislado.

Aislamiento de casas

En ingeniería práctica, el término L/k para una sustancia particular se conoce como el **valor *R*** del material. Así, la ecuación 20.16 se reduce a

$$\mathcal{P} = \frac{A(T_h - T_c)}{\sum_i R_i} \tag{20.17}$$

donde $R_i = L_i/k_i$. Los valores R para unos cuantos materiales de construcción comunes se dan en la tabla 20.4. En Estados Unidos, las propiedades aislantes de materiales empleados en construcciones suelen expresarse en unidades convencionales, no en unidades del SI. Por lo tanto, en la tabla 20.4, las mediciones de valores R se dan como combinación de unidades térmicas británicas, pies, horas y grados Fahrenheit.

En cualquier superficie vertical abierta al aire, una muy delgada capa de aire estancado se adhiere a la superficie. Uno debe considerar esta capa cuando se determine el valor R para una pared. El grosor de esta capa estancada sobre una pared lateral depende de la rapidez del viento. La pérdida de energía de una casa en un día ventoso es mayor que la pérdida en un día cuando el aire está en calma. Un valor R representativo para esta capa estancada de aire se da en la tabla 20.4.

Materiał chroniony prawem autorskim

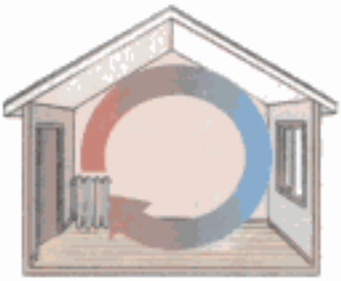


Figura 20.15 Se establecen corrientes de convección en un cuarto calentado por un radiador.

está calentado y se expande. Como resultado de ello, la densidad de este aire disminuye y el aire sube. Este aire caliente calienta las manos de la persona cuando se mueve. **Se dice que la energía transferida por el movimiento de una sustancia caliente ha sido transferida por convección.** Cuando el movimiento resulta de diferencias en densidad, como es el caso del aire alrededor de una flama, se denomina *convección natural*. El aire que circula en una playa es un ejemplo de convección natural, como lo es la mezcla que se presenta en la superficie del agua de un lago y que se hunde (sección 19.4). Cuando la sustancia calentada es forzada a moverse por un ventilador o bomba, como en algunos sistemas de calefacción de aire caliente y agua caliente, el proceso se llama *convección forzada*.

Si no fuera por corrientes de convección, sería muy difícil hervir agua. Cuando se calienta agua en una tetera, las capas inferiores están más calientes al principio. Esta agua se dilata y sube a la parte superior porque su densidad disminuye. Al mismo tiempo, el agua fría más densa de la superficie se hunde hasta el fondo de la tetera y es calentada.

El mismo proceso ocurre cuando un cuarto es calentado por un radiador. Éste calienta el aire de las regiones más bajas del cuarto. El aire caliente se dilata y sube al techo debido a su menor densidad. El aire más fresco y más denso de la parte superior desciende y se establece la forma de corriente de aire continua que se ilustra en la figura 20.15.

Radiación

El tercer medio de transferencia de energía que estudiaremos es la **radiación**. Todos los cuerpos irradian energía continuamente en forma de ondas electromagnéticas (véase el capítulo 12 del volumen II) producidas por vibraciones térmicas de las moléculas. Es probable que el lector esté familiarizado con radiación electromagnética en forma del brillo anaranjado del quemador de una estufa eléctrica, y de un calentador eléctrico, o las bobinas de un tostador.

La rapidez con la que un cuerpo irradia energía es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta. Esto se conoce como la **ley de Stefan** y se expresa en forma de ecuación como

Ley de Stefan

$$\mathcal{P} = \sigma A e T^4 \tag{20.18}$$

donde $\mathcal{P}$ es la potencia en watts irradiada desde la superficie del cuerpo, σ es una constante igual a $5.669\,6 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2 \cdot K^4}$, A es el área superficial del cuerpo en metros cuadrados, e es la **emisividad**, y T es la temperatura superficial en kelvin. El valor de e puede variar entre cero y la unidad, dependiendo de las propiedades de la superficie del cuerpo. La emisividad es igual a la **absorbencia**, que es la fracción de la radiación entrante que absorbe la superficie.

Cada segundo, aproximadamente 1 340 J de radiación electromagnética del Sol pasan perpendicularmente a través de cada 1 $\mathrm{m^2}$ en la parte superior de la atmósfera terrestre. Esta radiación es básicamente luz visible e infrarroja acompañada por una cantidad importante de radiación ultravioleta. Estudiaremos estos tipos de radiación en detalle en el capítulo 12 del volumen II). Parte de esta energía se refleja de nuevo hacia el espacio, y parte es absorbida por la atmósfera. No obstante, a la superficie terrestre llega diariamente suficiente energía para abastecer todas nuestras necesidades de energía cientos de veces, si sólo pudiéramos captarla y emplearla de manera eficiente. El crecimiento en el número de casas que cuentan con energía solar en este país refleja los crecientes esfuerzos que se hacen para usar esta abundante energía. La energía radiante del sol afecta en varias formas nuestra existencia día a día. Por ejemplo, influye en la temperatura promedio de la Tierra, las corrientes oceánicas, agricultura y formas de lluvia.

Lo que ocurre a la temperatura atmosférica por las noches es otro ejemplo de los efectos de transferencia de energía por radiación. Si hay una capa de nubes sobre nuestro planeta, el vapor de agua de las nubes absorbe parte de la radiación infrarroja emitida por la Tierra y la regresa a la superficie. En consecuencia, los niveles de temperatura en la superficie permanecen moderados. En ausencia de esta capa de nubes, no hay forma de evitar que esta radiación escape hacia el espacio; por lo tanto, la temperatura disminuye más en una noche despejada que en una con presencia de nubes.

Materiał chroniony prawem autorskim

Cuando un cuerpo irradia energía en una cantidad dada por la ecuación 20.18, también absorbe radiación electromagnética. Si no se presenta este último proceso, un cuerpo irradiaría finalmente toda su energía, y su temperatura llegaría al cero absoluto. La energía que un cuerpo absorbe proviene de su entorno, que está formado por otros cuerpos que irradian energía. Si un cuerpo está a una temperatura T y su entorno está a una temperatura promedio T_0, entonces la cantidad neta de energía ganada o perdida por el cuerpo como resultado de la radiación es

$$\mathcal{P}_{\text{neta}} = \sigma A e(T^4 - T_0^4) \tag{20.19}$$

Cuando un cuerpo está en equilibrio con su entorno, irradia y absorbe energía al mismo ritmo, y su temperatura permanece constante. Cuando un cuerpo está más caliente que su entorno, irradia más energía de la que absorbe, y su temperatura disminuye.

Un **absorbedor ideal** se define como un cuerpo que absorbe toda la energía que incida sobre él, y para ese cuerpo, $e = 1$. Un cuerpo para el cual $e = 1$ se conoce a veces como **cuerpo negro.** En el capítulo 18 del volumen II, investigaremos métodos experimentales y teóricos para abordar la radiación proveniente de un cuerpo negro. Un absorbedor ideal es también un radiador ideal de energía. En contraste, un cuerpo para el cual $e = 0$ no absorbe nada de la energía que incida sobre él. Un cuerpo así refleja toda la energía incidente, y por lo tanto, es un **reflector ideal.**

El frasco de Dewar

El *frasco de Dewar*[7] es un recipiente diseñado para reducir al mínimo las pérdidas de energía por conducción, convección y radiación. Este recipiente se emplea para almacenar líquidos fríos o calientes durante largos periodos. (Un termo es un equivalente de uso doméstico de un frasco de Dewar.) La construcción estándar (figura 20.16) está formada por un recipiente de vidrio Pyrex de doble pared con paredes plateadas. El espacio entre las paredes está al vacío para reducir al mínimo la transferencia de energía por conducción y convección. Las superficies plateadas reducen al mínimo la transferencia por radiación porque la plata es muy buen reflector y tiene muy baja emisividad. Se obtiene una reducción adicional en pérdida de energía al reducir el tamaño del cuello. Los frascos de Dewar se utilizan por lo general para almacenar nitrógeno líquido (punto de ebullición: 77 K) y oxígeno líquido (punto de ebullición: 90 K).

Para confinar helio líquido (punto de ebullición: 4.2 K), que tiene un muy bajo calor de vaporización, con frecuencia es necesario usar un doble sistema de Dewar, en el que el frasco de Dewar que contenga el líquido está rodeado por un segundo frasco de Dewar. El espacio entre los dos frascos se llena con nitrógeno líquido.

Los últimos diseños de recipientes para almacenar emplean "super aislamiento" que consta de varias capas de material reflector separadas por fibra de vidrio. Todo esto está al vacío, y no se necesita nitrógeno líquido con este diseño.

Figura 20.16 Vista en corte de un frasco de Dewar, que se emplea para almacenar sustancias calientes o frías.

Ejemplo 20.11 ¿Quién le bajó al termostato?

Un estudiante está tratando de decidir qué ponerse. El entorno (su recámara) está a 20.0°C. Si la temperatura de la piel del estudiante sin ropas es de 35°C, ¿cuál es la pérdida neta de energía de su cuerpo en 10.0 minutos por radiación? Suponga que la emisividad de la piel es 0.900 y que el área superficial del estudiante es 1.50 m².

Solución Con la ecuación 20.19, encontramos que la cantidad neta de pérdida de energía de su piel es

$$\mathcal{P}_{\text{neta}} = \sigma A e(T^4 - T_0^4)$$

$$= (5.67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2\cdot\text{K}^4)(1.50\ \text{m}^2) \times (0.900)[(308\ \text{K})^4 - (293\ \text{K})^4] = 125\ \text{W}$$

A este ritmo, la energía total perdida por la piel en 10 minutos es

$$Q = \mathcal{P}_{\text{neta}}\,\Delta t = (125\ \text{W})(600\ \text{s}) = \mathbf{7.5 \times 10^4\ J}$$

Nótese que la energía irradiada por el estudiante es casi equivalente a la producida por dos bombillas eléctricas de 60 W.

7 Inventado por Sir James Dewar (1842-1923).

Materiał chroniony prawem autorskim

La energía puede ser transformada por trabajo, que mencionamos en el capítulo 7, y por conducción, convección, o radiación. La **conducción** se puede ver como intercambio de energía cinética entre moléculas o electrones en colisión. La rapidez de transferencia de energía por conducción a través de una placa de área A es

$$\mathcal{P} = kA\left|\frac{dT}{dx}\right| \tag{20.14}$$

donde k es la **conductividad térmica** del material del cual está hecha la placa y $|dT/dx|$ es el **gradiente de temperatura.** Esta ecuación se puede usar en muchas situaciones en las que la rapidez de transferencia de energía por el material es importante.

En **convección,** una sustancia caliente transfiere energía de un lugar a otro.

Todos los cuerpos emiten **radiación** en la forma de ondas electromagnéticas a razón de

$$\mathcal{P} = \sigma A e T^4 \tag{20.18}$$

Un cuerpo que es más caliente que su entorno irradia más energía de la que absorbe, mientras que un cuerpo que es más frío que su entorno absorbe más energía de la que irradia.

PREGUNTAS

1. Distinga claramente entre temperatura, calor y energía interna.
2. El alcohol etílico tiene casi la mitad del calor específico del agua. Si muestras de igual masa de alcohol y agua en vasos separados reciben la misma cantidad de energía, compare los aumentos de temperatura de los dos líquidos.
3. Un pequeño crisol metálico es sacado de un horno a 200°C y sumergido en una tina de baño llena de agua a temperatura ambiente (este proceso se conoce a veces como *templado*). ¿Cuál es la temperatura de equilibrio final aproximada?
4. ¿Cuál es el principal problema que aparece al medir calores específicos si una muestra con una temperatura arriba de 100°C se coloca en agua?
5. En una valiente demostración en clase, un maestro mete sus dedos húmedos en plomo derretido (327°C) y los saca rápidamente, sin quemarse. ¿Cómo es esto posible? (Éste es un experimento peligroso, que usted *NO DEBE* realizar).
6. ¿Qué está erróneo en el siguiente enunciado? "Dados cualesquier dos cuerpos, el de temperatura más alta contiene más calor".
7. ¿Por qué es una persona capaz de sacar un trozo de papel aluminio seco de un horno caliente con los dedos desnudos, mientras que se quema si hay humedad en el papel aluminio?
8. La temperatura del aire en zonas costeras resulta muy afectada por el elevado calor específico del agua. Una razón es que la energía liberada cuando 1 m^3 de agua se enfría 1°C hará que suba la temperatura de un volumen mucho mayor de aire en 1°C. Encuentre este volumen de aire. El calor específico del aire es aproximadamente 1 kJ/kg · °C. Tome la densidad del aire como 1.3 kg/m^3.
9. El concreto tiene un calor específico mucho mayor que el suelo. Use este dato para explicar (parcialmente) por qué las ciudades tienen una temperatura más alta en promedio durante la noche que el campo circundante. Si una ciudad es más calurosa que el campo circundante, ¿se siente que soplan brisas de la ciudad al campo, o del campo a la ciudad? Explique.
10. Con el uso de la primera ley de la termodinámica, explique por qué la energía *total* de un sistema aislado es siempre constante.
11. Cuando se agita un termo sellado y lleno de café caliente, ¿cuáles son los cambios, si los hay, en (a) la temperatura del café (b) la energía interna del café?
12. Es posible convertir energía interna en energía mecánica? Explique con ejemplos.
13. Una moneda de un centavo (US) se hacía antes principalmente de cobre y ahora es de zinc recubierto de cobre. ¿Puede diseñarse un experimento calorimétrico para probar el contenido metálico en un grupo de monedas de un centavo? Si es así, describa el procedimiento que usted usaría.
14. La figura Q20.14 muestra una figura formada por nieve en el techo de un granero. ¿Qué hace que se formen figuras alternas de techo cubierto de nieve y techo sin nieve?

Cortesía de Dr. Albert A. Bartlett, University of Colorado, Boulder, CO

Figura Q.20.14 Figuras alternadas en un techo cubierto de nieve.

15. Un techo de losetas en un baño puede sentirse incómodamente frío a los pies descalzos, pero un piso con tapete en un cuarto adyacente a la misma temperatura se sentirá cálido. ¿Por qué?

Materiał chroniony prawem autorskim

ratura del agua después que los bloques caen una distancia de 3.00 m?

Sección 20.2 Calor específico y calorimetría

3. La temperatura de una barra de plata sube 10.0°C cuando absorbe 1.23 kJ de energía por calor. La masa de la barra es de 525 g. Determine el calor específico de la plata.

4. Una muestra de 50.0 g de cobre está a 25.0°C. Si 200 J de energía se le agregan por calor, ¿cuál es la temperatura final del cobre?

5. El uso sistemático de energía solar puede dar un gran ahorro en el costo de calefacción de espacios en invierno para una casa típica de la región norte central de Estados Unidos. Si la casa tiene buen aislamiento, es posible modelarla como que pierde energía por calor de manera continua a razón de 6 000 W en un día de abril, cuando la temperatura promedio exterior es de 4°C, y cuando el sistema de calefacción convencional no se usa en absoluto. El colector pasivo de energía solar puede estar formado simplemente por ventanas muy grandes en una alcoba que mire hacia el sur. La luz solar que brille durante el día es absorbida por el piso, paredes interiores y otros objetos del cuarto, elevándose así su temperatura a 38°C. Cuando baja el sol, las cortinas o persianas aislantes se cierran sobre las ventanas. Durante el periodo entre las 5:00 p.m. y las 7:00 a.m. la temperatura de la casa bajará, y se necesita una "masa térmica" suficientemente grande para evitar que baje demasiado. La masa térmica puede ser una gran cantidad de piedra (con calor específico de 850 J/kg·°C) en el piso y las paredes interiores expuestas a la luz solar. ¿Qué masa de piedra se necesita si la temperatura no debe descender por abajo de 18°C durante la noche?

6. El láser *Nova* del Laboratorio Nacional Lawrence Livermore, en California, se usa en estudios para iniciar una fusión nuclear controlada (sección 23.4 del volumen II). Puede entregar una potencia de 1.60×10^{13} W durante un intervalo de tiempo de 2.50 ns. Compare su energía de salida en uno de estos intervalos con la energía necesaria para hacer que se caliente una olla de té de 0.800 kg de agua de 20.0°C a 100°C.

7. Una herradura de hierro de 1.50 kg inicialmente a 600°C se deja caer en una cubeta que contiene 20.0 kg de agua a 25.0°C. ¿Cuál es la temperatura final? (Pase por alto la capacidad calorífica del recipiente, y suponga que la insignificante cantidad de agua se hierve.)

8. Una taza de aluminio de 200 g de masa contiene 800 g de agua en equilibrio térmico a 80.0°C. La combinación de taza y agua se enfría uniformemente de modo que la temperatura desciende en 1.50°C por minuto. ¿A qué ritmo se remueve energía por calor? Exprese su respuesta en watts.

9. Un calorímetro de aluminio con masa de 100 g contiene 250 g de agua. El calorímetro y el agua están en equilibrio térmico a 10.0°C. Dos bloques metálicos se ponen en el agua. Uno es una pieza de cobre de 50.0 g a 80.0°C. El otro bloque tiene una masa de 70.0 g y está originalmente a una temperatura de 100°C. Todo el sistema se estabiliza a una temperatura final de 20.0°C. (a) Determine el calor específico de la muestra desconocida. (b) Calcule el material desconocido, usando los datos de la tabla 20.1.

10. Una moneda de cobre de 3.00 g a 25.0°C se deja caer 50.0 m al suelo. (a) Suponiendo que 60.0% del cambio en energía potencial del sistema formado por el centavo y nuestro planeta se va a aumentar la energía interna del centavo, determine su temperatura final. (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Este resultado depende de la masa del centavo? Explique.

11. Una combinación de 0.250 kg de agua a 20.0°C, 0.400 kg de aluminio a 26.0°C, y 0.100 kg de cobre a 100°C se mezclan en un recipiente aislado al que se deja llegar al equilibrio térmico. Soslaye cualquier transferencia de energía hacia o desde el recipiente y determine la temperatura final de la mezcla.

12. Si se vierte agua con una masa m_h a una temperatura T_h en una taza de aluminio de masa m_{Al} que contiene una masa m_c de agua a T_c, donde $T_h > T_c$, ¿cuál es la temperatura de equilibrio del sistema?

13. Un calentador de agua se opera con energía solar. Si el colector solar tiene un área de 6.00 m^2 y la intensidad entregada por la luz solar es de 550 W/m^2, ¿cuánto tarda en aumentar la temperatura de 1.00 m^3 de agua de 20.0°C a 60.0°C?

14. Dos recipientes térmicamente aislados están conectados por un estrecho tubo equipado con una válvula que inicialmente está cerrada. Uno de los recipientes, de 16.8 L de volumen, contiene oxígeno a una temperatura de 300 K y una presión de 1.75 atm. El otro, de 22.4 L de volumen, contiene oxígeno a una temperatura de 450 K y una presión de 2.25 atm. Cuando la válvula se abre, los gases de los dos recipientes se mezclan, y la temperatura y presión se hacen uniformes en todo el sistema. (a) ¿Cuál es la temperatura final? (b) ¿Cuál es la presión final?

Sección 20.3 Calor latente

15. ¿Cuánta energía se requiere para cambiar un cubo de hielo de 40.0 g de hielo a −10.0°C a vapor a 110°C?

16. Un calorímetro de cobre de 50.0 g contiene 250 g de agua a 20.0°C. ¿Cuánto vapor debe condensarse en el agua si la temperatura final del sistema debe llegar a 50.0°C?

17. Una bala de plomo de 3.00 g a 30.0°C es disparada a una rapidez de 240 m/s en un gran bloque de hielo a 0°C, en el que queda incrustada. ¿Qué cantidad de hielo se derrite?

18. Vapor a 100°C se agrega a hielo a 0°C. (a) Encuentre la cantidad de hielo derretido y la temperatura final cuando la masa del vapor sea 10.0 g y la masa del hielo sea 50.0 g. (b) **¿Qué pasaría si?** Repita cuando la masa del vapor sea 1.00 g y la masa del hielo sea 50.0 g.

19. Un bloque de 1.00 kg de cobre a 20.0°C se pone en un gran recipiente de nitrógeno líquido a 77.3 K. ¿Cuántos kilogramos de nitrógeno hierven para cuando el cobre llega a 77.3K? (El calor específico del cobre es 0.092 0 cal/g·°C. El calor latente de vaporización del nitrógeno es 48.0 gal/g.)

20. Suponga que un granizo a 0°C cae en aire a una temperatura uniforme de 0°C y cae sobre una banqueta que también está a esta temperatura. ¿De qué altura inicial debe caer el granizo para que se derrita por completo al impacto?

21. En un recipiente aislado, 250 g de hielo a 0°C se agregan a 600 g de agua a 18.0°C. (a) ¿Cuál es la temperatura final del sistema? (b) ¿Cuánto hielo resta cuando el sistema llega al equilibrio?

Materiał chroniony prawem autorskim

22. Problema de repaso. Dos veloces balas de plomo, cada una de 5.00 g de masa y a una temperatura de 20.0°C, chocan de frente a una rapidez de 500 m/s cada una. Si se supone una colisión perfectamente inelástica y no hay pérdida de energía por calor a la atmósfera, describa el estado final del sistema formado por las dos balas.

Sección 20.4 Trabajo y calor en procesos termodinámicos

23. Una muestra de gas ideal se expande al doble de su volumen original de 1.00 m^3 en un proceso cuasiestático para el cual $P = \alpha V^2$, con $\alpha = 5.00$ atm/m^6, como se ve en la figura P20.23. ¿Cuánto trabajo es realizado sobre el gas en expansión?

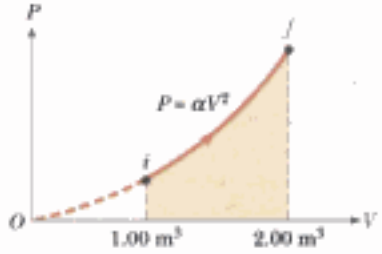


Figura P20.23

24. (a) Determine el trabajo realizado sobre un fluido que se expande de i a f como se indica en la figura P20.24. (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuánto trabajo es realizado sobre el fluido si se comprime de f a i a lo largo de la misma trayectoria?

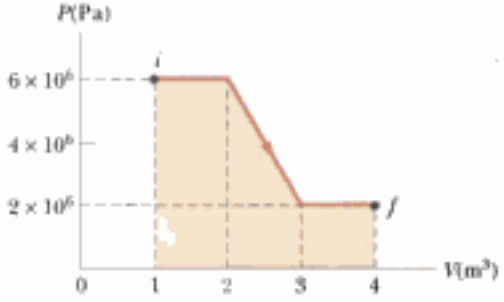


Figura P20.24

25. Un gas ideal está encerrado en un cilindro con un émbolo movible sobre él. El émbolo tiene una masa de 8 000 g y un área de 5.00 cm^2 y está libre para subir y bajar, manteniendo constante la presión del gas. ¿Cuánto trabajo se realiza sobre el gas cuando la temperatura de 0.200 mol del gas se eleva de 20.0°C a 300°C?

26. Un gas ideal está encerrado en un cilindro que tiene un émbolo sobre él. El émbolo tiene una masa m y un área A y está libre para subir y bajar, manteniendo constante la presión del gas. ¿Cuánto trabajo se realiza sobre el gas cuando la temperatura de n moles del gas se eleva de T_1 a T_2?

27. Un mol de un gas ideal se calienta lentamente de modo que pasa del estado PV (P_i, V_i) a ($3P_i$,$3V_i$) en forma tal que la presión es directamente proporcional al volumen. (a) ¿Cuánto trabajo se realiza sobre el gas en el proceso? (b) ¿Cómo está relacionada la temperatura del gas con su volumen durante este proceso?

Sección 20.5 Primera ley de la termodinámica

28. Un gas se comprime a una presión constante de 0.800 atm de 9.00 L a 2.00 L. En el proceso, 400 J de energía salen del gas por calor. (a) ¿Cuál es el trabajo realizado sobre el gas? (b) ¿Cuál es el cambio en su energía interna?

29. Un sistema termodinámico experimenta un proceso en el que su energía interna disminuye en 500 J. Al mismo tiempo, 220 J de trabajo se realizan sobre el sistema. Encuentre la energía transferida hacia o desde él por calor.

30. Un gas es llevado a través del proceso cíclico descrito en la figura P20.30. (a) Encuentre la energía neta transferida al sistema por calor durante un ciclo completo. (b) **¿Qué pasaría si?** Si el ciclo se invierte, es decir, el proceso sigue la trayectoria $ACBA$, ¿cuál es la energía neta de entrada por ciclo por calor?

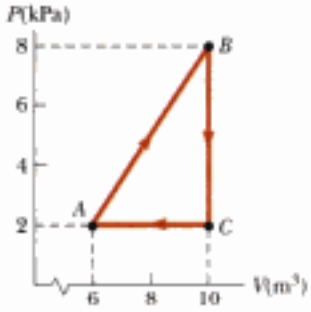


Figura P20.23 Problemas 30 y 31.

31. Considere el proceso cíclico descrito en la figura P20.30. Si Q es negativo para el proceso BC y ΔE_{int} es negativo para el proceso CA, ¿cuáles son los signos de Q, W y ΔE_{int} que están asociados con cada proceso?

32. Una muestra de un gas ideal pasa por el proceso que se muestra en la figura P20.32. De A a B, el proceso es adiabático; de B a C, es isobárico con 100 kJ de energía entrando al sistema por calor. De C a D, el proceso es isotérmico; de D a A, es isobárico con 150 kJ de energía saliendo del sistema por calor. Determine la diferencia en energía interna $E_{int,B} - E_{int,A}$.

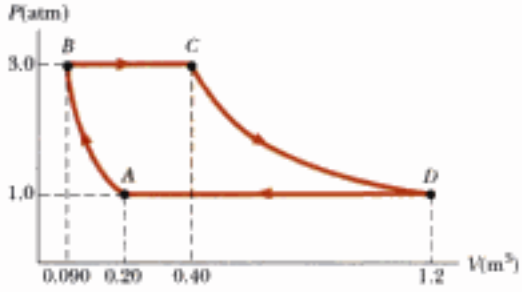


Figura P20.32

Materiał chroniony prawem autorskim

33. Una muestra de un gas ideal está en un cilindro vertical equipado con un émbolo. Cuando 5.79 kJ de energía se transfieren al gas por calor para elevar su temperatura, el peso sobre el émbolo se ajusta de modo que el estado del gas cambia del punto A al punto B a lo largo del semicírculo que se ilustra en la figura P20.33. Encuentre el cambio en energía interna del gas.

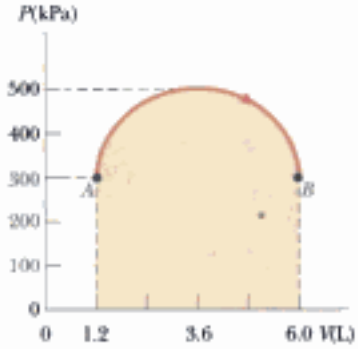


Figura P20.33

Sección 20.6 Algunas aplicaciones de la primera ley de la termodinámica

34. Un mol de un gas ideal realiza 3 000 J de trabajo sobre su entorno cuando se expande de manera isotérmica a una presión final de 1.00 atm y volumen de 25.0 L. Determine (a) el volumen inicial y (b) la temperatura del gas.

35. Un gas ideal inicialmente a 300 K experimenta una expansión isobárica a 2.50 kPa. Si el volumen aumenta de 1.00 m^3 a 3.00 m^3 y 12.5 kJ se transfieren al gas por calor, ¿cuáles son (a) el cambio en su energía interna y (b) su temperatura final?

36. Un bloque de 1.00 kg de aluminio se caliente a presión atmosférica de modo que su temperatura aumenta de 22.0°C a 40.0°C. Encuentre (a) el trabajo realizado sobre el aluminio, (b) la energía agregada a él por calor, y (c) el cambio en su energía interna.

37. ¿Cuánto trabajo se realiza sobre el vapor cuando 1.00 mol de agua a 100°C hierve y se convierte en 1.00 mol de vapor a 100°C a 1.00 atm de presión? Suponiendo que el vapor se comporta como gas ideal, determine el cambio en energía interna del material cuando se vaporiza.

38. Un gas ideal inicialmente a P_i, V_i y T_i se lleva por un ciclo como se ve en la figura P20.38. (a) Encuentre el trabajo neto realizado sobre el gas por ciclo. (b) ¿Cuál es la energía neta agregada por calor al sistema por ciclo? (c) Obtenga un valor numérico para el trabajo neto realizado por ciclo para 1.00 mol de gas inicialmente a 0°C.

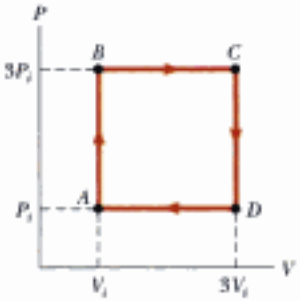


Figura P20.38

39. Una muestra de 2.00 moles de helio inicialmente a 300 K y 0.400 atm se comprime de manera isotérmica a 1.20 atm. Observando que el helio se comporta como gas ideal, encuentre (a) el volumen final del gas, (b) el trabajo realizado sobre el gas, y (c) la energía transferida por calor.

40. En la figura P20.40, el cambio en energía interna de un gas que se lleva de A a C es +800 J. El trabajo realizado sobre el gas a lo largo de la trayectoria ABC es −500 J. (a) ¿Cuánta energía debe agregarse al sistema por calor cuando pasa de A a B a C? (b) Si la presión en el punto A es cinco veces la del punto C, ¿cuál es el trabajo realizado sobre el sistema al pasar de C a D? (c) ¿Cuál es el intercambio de energía con el entorno por calor cuando el ciclo pasa de C a A a lo largo de la trayectoria verde? (d) Si el cambio en energía interna al pasar del punto D al punto A es +500 J, ¿cuánta energía debe agregarse al sistema por calor cuando pasa del punto C al punto D?

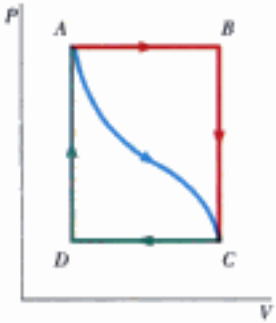


Figura P20.40

Sección 20.7 Mecanismos de transferencia de energía

41. Una caja con un área superficial total de 1.20 m^2 y un grosor de pared de 4.00 cm está hecha de un material aislante. Un calentador eléctrico de 10.0 W dentro de la caja mantiene la temperatura interior a 15.0°C sobre la temperatura exterior. Encuentre la conductividad térmica k del material aislante.

42. Una ventana de hojas de vidrio tiene un área de 3.00 m^2 y un grosor de 0.600 cm. Si la diferencia de temperatura entre sus caras es 25.0°C, ¿cuál es la rapidez de transferencia de energía por conducción a través de la ventana?

43. Una barra de oro está térmicamente en contacto con una barra de plata de la misma longitud y área (figura P20.43). Un extremo de la barra combinada se mantiene a 80.0°C mientras que el extremo opuesto está a 30.0°C. Cuando la transferencia de energía llega a un estado estable, ¿cuál es la temperatura en la unión?

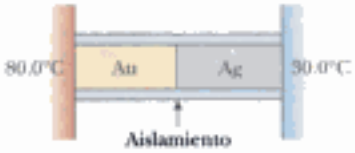


Figura P20.43

44. Una ventana térmica con un área de 6.00 m^2 está hecha de dos capas de vidrio, cada una de 4.00 mm de grosor, y separadas una de otra por un espacio de aire de 5.00 mm. Si la superficie interior

Materiał chroniony prawem autorskim

no. Tan pronto como la esfera y el anillo alcanzan el equilibrio térmico, la esfera apenas pasa por el anillo. Encuentre (a) la temperatura de equilibrio, y (b) la temperatura inicial de la esfera.

57. Un *calorímetro de flujo* es un aparato que se emplea para medir el calor específico de un líquido. La técnica de calorimetría de flujo comprende medir la diferencia de temperatura, entre los puntos de entrada y salida de una corriente del líquido que fluye, mientras se agrega energía por medio de calor a una rapidez conocida. Un líquido de densidad ρ circula por el calorímetro con una rapidez de flujo de volumen R. En estado estable, se establece una diferencia de temperatura ΔT entre los puntos de entrada y salida cuando se proporciona energía a razón de $\mathcal{P}$. ¿Cuál es el calor específico del líquido?

58. Un mol de un gas ideal está contenido en un cilindro con un émbolo móvil. La presión, volumen y temperatura iniciales son P_i, V_i y T_i, respectivamente. Encuentre el trabajo realizado sobre el gas para los siguientes procesos y muestre cada proceso en un diagrama PV: (a) Una compresión isobárica en la que el volumen final es la mitad del volumen inicial. (b) Una compresión isotérmica en la que la presión final es cuatro veces la presión inicial. (c) Un proceso isométrico en el que la presión final es tres veces la presión inicial.

59. Un mol de un gas ideal, inicialmente a 300 K, se enfría a volumen constante de modo que la presión final es un cuarto de la presión inicial. Entonces el gas se expande a presión constante hasta que alcanza la temperatura inicial. Determine el trabajo realizado sobre el gas.

60. **Problema de repaso.** Continúe el análisis del problema 60 del capítulo 19. Después de una colisión entre una nave espacial grande y un asteroide, un disco de cobre de 28.0 m de radio y 1.20 m de grueso, a una temperatura de 850°C, flota en el espacio, girando alrededor de su eje con una rapidez angular de 25.0 rad/s. Debido a que el disco irradia luz infrarroja, su temperatura baja a 20.0°C. No actúa par de torsión externo sobre el disco. (a) Encuentre el cambio en energía cinética del disco. (b) Encuentre el cambio en energía interna del disco. (b) Encuentre la cantidad de energía que irradia.

61. **Problema de repaso.** Resulta que un meteorito de 670 kg está compuesto de aluminio. Cuando está lejos de la Tierra, su temperatura es −15°C y se mueve con una rapidez de 14.0 km/s con respecto a la Tierra. Cuando choca con el planeta, suponga que la energía interna adicional resultante es compartida igualmente entre el meteoro y el planeta, y que todo el material del meteoro sube momentáneamente a la misma temperatura final. Encuentre esta temperatura. Suponga que el calor específico del aluminio líquido y gaseoso es de 1 170 J/kg·°C.

62. Una placa de hierro se mantiene contra una rueda de hierro de modo que una fuerza de fricción cinética de 50.0 N actúa entre las dos piezas de metal. La rapidez relativa a la que las dos superficies se deslizan una sobre la otra es 40.0 m/s. (a) Calcule la rapidez a la que la energía mecánica se convierte en energía interna. (b) La placa y la rueda tienen cada una de ellas una masa de 5.00 kg y cada una recibe 50.0% de la energía interna. Si el sistema funciona durante 10.0 s como se describe y cada objeto se deja que alcance una temperatura interna uniforme, ¿cuál es el aumento resultante de temperatura?

63. Una estufa solar está hecha de una superficie curva reflectora que concentra luz solar sobre el objeto a calentar (figura P20.63). La potencia solar por unidad de área que llega a la superficie de la Tierra en ese lugar es de 600 W/m². La estufa apunta hacia el Sol y tiene un diámetro de 0.600 m. Suponga que 40.0% de la energía incidente se transfiere a 0.500 L de agua en un recipiente abierto, que inicialmente está a 20.0°C. ¿Cuánto tarda en hervir completamente el agua? (Pase por alto la capacidad calorífica del recipiente.)

Figura **P20.63**

64. En una tetera eléctrica está hirviendo agua. La potencia absorbida por el agua es 1.00 kW. Si se supone que la presión de vapor de la tetera es igual a la presión atmosférica, determine la rapidez de efusión de vapor del pico de la tetera, si ese pico tiene un área de sección transversal de 2.00 cm².

65. Un recipiente para cocinar sobre un quemador lento contiene 10.0 kg de agua y una masa desconocida de hielo en equilibrio a 0°C en el tiempo $t = 0$. La temperatura de la mezcla se mide en tiempos varios, y el resultado se grafica en la figura P20.65. Durante los primeros 50.0 minutos, la mezcla permanece a 0°C. De 50.0 minutos a 60.0 minutos, la temperatura aumenta a 2.00°C. Sin hacer caso de la capacidad calorífica del recipiente, determine la masa de hielo inicial.

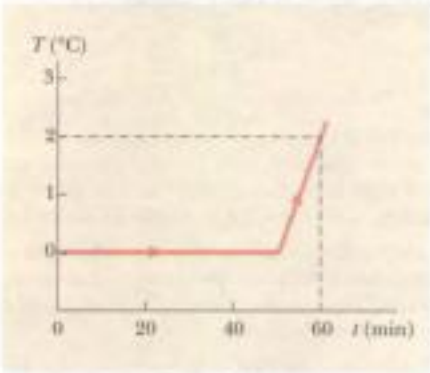


Figura P20.65

Materiał chroniony prawem autorskim

66. (a) En aire a 0°C, un bloque de cobre de 1.60 kg a 0°C se hace deslizar a 2.50 m/s sobre una lámina de hielo a 0°C. La fricción hace que el bloque se detenga. Encuentre la masa del hielo que se derrite. Para describir el proceso de enfrenamiento, identifique la energía de entrada Q, el trabajo de entrada W, el cambio en energía interna ΔE_{int}, y el cambio en energía mecánica ΔK para el bloque y también para el hielo. (b) Un bloque de 1.60 kg de hielo a 0°C se hace deslizar a 2.50 m/s sobre una lámina de cobre a 0°C. La fricción hace que el bloque se detenga. Encuentre la masa del hielo que se derrite. Identifique Q, W, ΔE_{int}, y ΔK para el bloque y para la lámina metálica durante el proceso. (c) Una delgada placa de cobre de 1.60 kg a 20°C se hace deslizar a 2.50 m/s sobre una placa estacionaria idéntica a la misma temperatura. La fricción detiene rápidamente el movimiento. Si no se pierde energía al entorno por medio de calor, encuentre el cambio en temperatura de ambos cuerpos. Identifique Q, W, ΔE_{int}, y ΔK para cada objeto durante el proceso.

67. La conductividad térmica promedio de las paredes (incluyendo las ventanas) y techo de la casa descrita en la figura P20.67 es 0.480 W/m·°C, y su grosor promedio es 21.0 cm. La casa se calienta con gas natural que tiene un calor de combustión (esto es, la energía proporcionada por metro cúbico de gas quemado) de 9 300 kcal/m³. ¿Cuántos metros cúbicos de gas deben quemarse cada día para mantener una temperatura interior de 25.0°C, si la temperatura exterior es de 0.0°C? Haga caso omiso de la radiación y la energía perdida por calor a través del suelo.

Figura P20.67

68. Una charca de agua a 0°C está cubierta con una capa de hielo de 4.00 cm de grueso. Si la temperatura del aire permanece constante a −10.0°C, ¿cuánto tiempo tarda el grueso del hielo en aumentar a 8.00 cm? *Sugerencia:* Utilice la ecuación 20.15 en la forma

$$\frac{dQ}{dt} = kA\frac{\Delta T}{x}$$

y observe que la energía incremental dQ extraída del agua a través del grosor x de hielo es la cantidad necesaria para congelar un grosor dx de hielo. Esto es, $dQ = L\rho\, A\, dx$, donde ρ es la densidad del hielo, A es el área, y L es el calor latente de fusión.

69. Un gas ideal es llevado por un ciclo termodinámico que consiste en dos procesos isobáricos y dos isotérmicos, como se ve en la figura P20.69. Muestre que el trabajo neto realizado sobre el gas en todo el ciclo está dado por

$$W_{neto} = -P_1(V_2 - V_1)\ln\frac{P_2}{P_1}$$

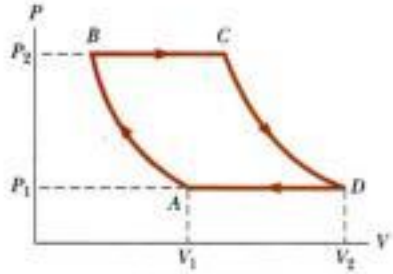


Figura P20.69

70. El interior de un cilindro hueco se mantiene a una temperatura T_a mientras que el exterior está a una temperatura más baja, T_b (figura P20.70). La pared del cilindro tiene una conductividad k. Si se desprecian los efectos en los extremos, demuestre que la rapidez de conducción de energía de la superficie interior a la exterior en la dirección radial es

$$\frac{dQ}{dt} = 2\pi Lk\left[\frac{T_a - T_b}{\ln(b/a)}\right]$$

(*Sugerencia:* El gradiente de temperatura es dT/dx. Nótese que una corriente de energía radial pasa por un cilindro concéntrico de área $2\pi rL$.)

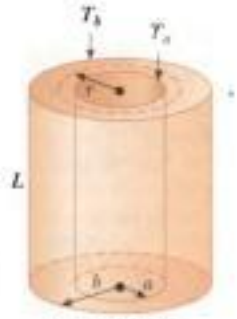


Figura P20.70

71. La sección de pasajeros de un avión a reacción tiene la forma de un tubo cilíndrico con longitud de 35.0 m y un radio interior de 2.50 m. Sus paredes están forradas con material aislante de 6.00 cm de grueso y tienen una conductividad de 4.00×10^{-5} cal/s·cm·°C. Un calentador debe mantener la temperatura interior a 25.0°C mientras la temperatura exterior es −35.0°C. ¿Qué potencia debe suministrarse al calentador? (Utilice el resultado del problema 70.)

72. Un estudiante obtiene los siguientes datos en un experimento de calorimetría diseñado para medir el calor específico del aluminio:

Temperatura inicial del agua y calorímetro:	70°C
Masa de agua:	0.400 kg
Masa de calorímetro:	0.040 kg
Calor específico del calorímetro:	0.63 kJ/kg·°C
Temperatura inicial de aluminio:	27°C
Masa de aluminio:	0.200 kg
Temperatura final de mezcla:	66.3°C

Materiał chroniony prawem autorskim

Utilice estos datos para determinar el calor específico del aluminio. Su resultado debe estar a no más de 15% del valor que se ve en la tabla 20.1.

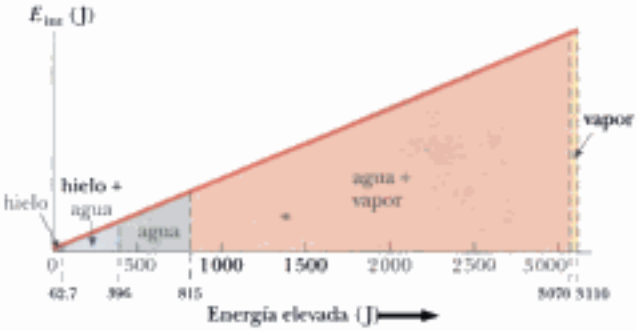
73. Durante períodos de alta actividad, el Sol tiene más manchas solares que de ordinario. Las manchas solares son más frías que el resto de la capa luminosa de la atmósfera del Sol (la fotósfera). Paradójicamente, la potencia total de salida del Sol no es menor que el promedio, sino que es igual o ligeramente más alta que el promedio. Resuelva los detalles del siguiente modelo de este fenómeno. Considere un parche de la fotósfera con área de 5.10×10^{14} m^2. Su emisividad es 0.965. (a) Encuentre la potencia que irradia si su temperatura está uniformemente a 5 800 K, correspondientes al Sol en calma. (b) Para representar una mancha solar, suponga que 10.0% del área está a 4 800 K y el otro 90% está a 5 890 K. Esto es, una sección con el área superficial de la Tierra es 1 000 K más fría que antes y una sección nueve veces mayor es 90 K más caliente. Encuentre la potencia de salida del parche. Compárela con la respuesta a la parte (a). (El máximo de las siguientes manchas solares se espera hacia el año 2012.)

Respuestas a las *preguntas rápidas*

20.1 Agua, vidrio, hierro. Como el agua tiene el calor específico más alto (4 186 J/kg·°C), tiene el cambio más pequeño en temperatura. El vidrio es el siguiente (837 J/kg·°C), y el hierro es último (448 J/kg·°C).

20.2 Hierro, vidrio, agua. Para un aumento dado de temperatura, la transferencia de energía por calor es proporcional al calor específico.

20.3 La figura siguiente muestra una representación gráfica de la energía interna del hielo en las partes A a la E como función de la energía agregada. Nótese que esta gráfica se ve muy diferente a la figura 20.2; no tiene las porciones planas durante los cambios de fase. Cualquiera que sea la forma en que varía la temperatura en la figura 20.2, la energía interna del sistema simplemente aumenta en forma lineal con la energía de entrada



20.4 C, A, E. La pendiente es la razón entre el cambio de temperatura y la cantidad de energía de entrada. Por lo tanto, la pendiente es proporcional al recíproco del calor específico. El agua, que tiene el calor específico más alto, tiene la pendiente más baja.

20.5

Situación	Sistema	Q	W	ΔE_{int}
(a) Bombear rápidamente una bicicleta	Aire en la bomba	0	+	+
(b) Sartén con agua a temperatura ambiente sobre una estufa caliente	Agua en la sartén	+	0	+
(c) Aire se fuga rápidamente de un globo	Aire originalmente en el globo	0	−	−

(a) Debido a que el bombeo es rápido, no entra ni sale energía del sistema por calor. Como $W > 0$ cuando se realiza trabajo *sobre* el sistema, aquí es positivo. Por lo tanto, vemos que $\Delta E_{int} = Q + W$ debe ser positivo. El aire en la bomba es más caliente. (b) No hay trabajo realizado ya sea sobre o por el sistema, pero se transfiere energía en el agua por calor desde el quemador caliente, haciendo positivas Q y ΔE_{int}. (c) De nuevo, no se transfiere energía hacia o desde el sistema por calor, pero las moléculas de aire que escapan del globo realizan trabajo sobre las moléculas de aire circundante cuando las empujan apartándolas. En esta forma, W es negativo y ΔE_{int} es negativo. La disminución en energía interna está evidenciada por el hecho de que el aire que escapa se hace más frío.

20.6 A es isométrica, B es adiabática, C es isotérmica, y D es isobárica.

20.7 (c). La frazada actúa como aislador térmico, reduciendo así la transferencia de energía por calor desde el aire hacia el cubo.

20.8 (b). En paralelo, las varillas presentan una mayor área a través de la cual se puede transferir energía y una menor longitud.

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 21

Teoría cinética de los gases

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

21.1 Modelo molecular de un gas ideal

21.2 Calor específico molar de un gas ideal

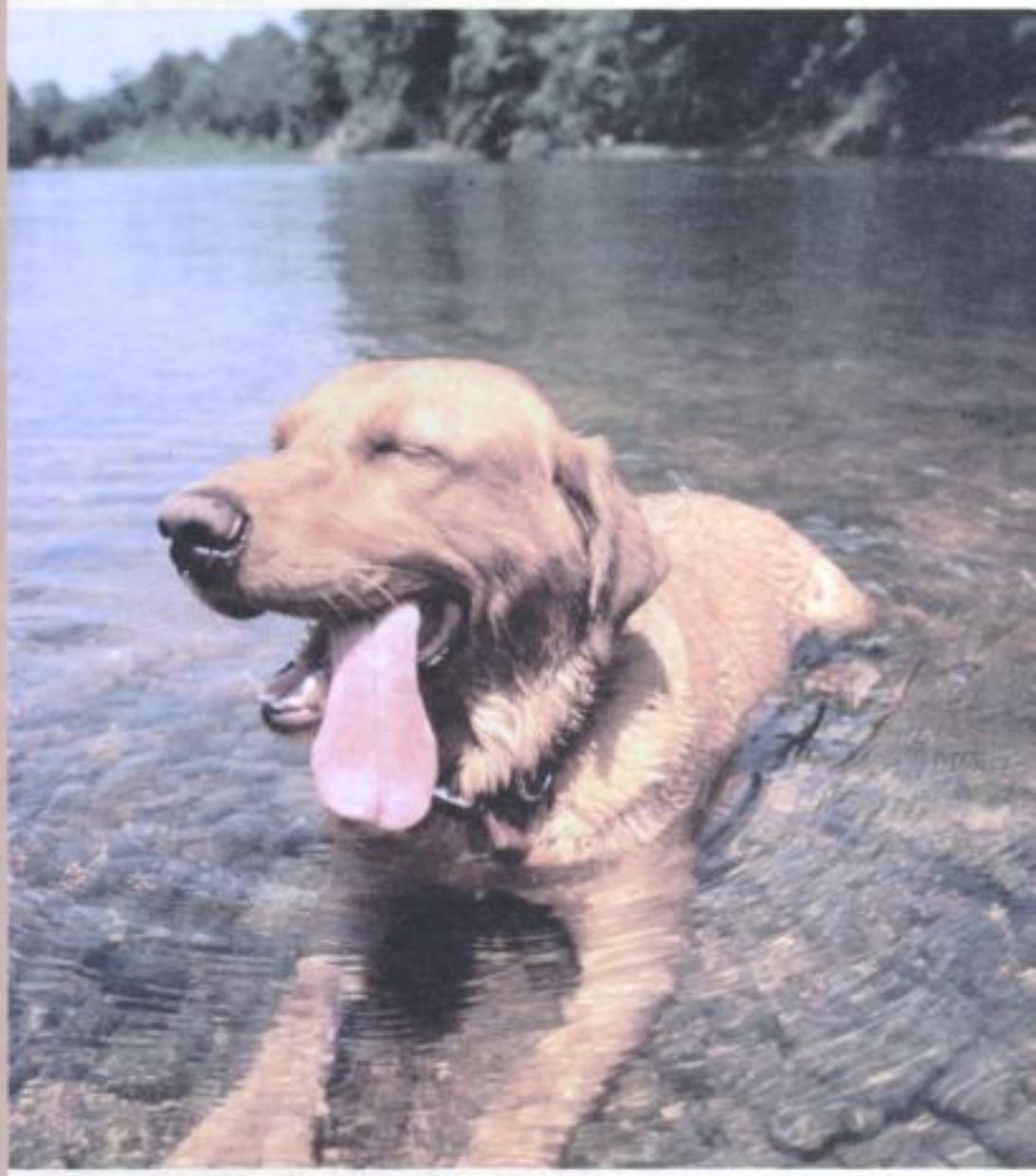
21.3 Procesos adiabáticos para un gas ideal

21.4 La equipartición de la energía

21.5 Ley de distribución de Boltzmann

21.6 Distribución de la rapidez molecular

21.7 Trayectoria libre media



▲ *Los perros no tienen glándulas sudoríparas como los seres humanos. En climas calurosos, los perros jadean para mejorar su evaporación desde la lengua. En este capítulo, demostramos que la evaporación es un proceso de enfriamiento basado en la remoción de moléculas con alta energía cinética desde un líquido. (Frank Oberle/Getty Images)*

Materiał chroniony prawem autorskim

En el capítulo 19, estudiamos las propiedades de un gas ideal, usando para ello variables macroscópicas como la presión, volumen y temperatura. Aquí mostraremos que estas propiedades a gran escala pueden estar relacionadas con una descripción a escala microscópica, en donde la materia se trata como un conjunto de moléculas. Las leyes de Newton del movimiento aplicadas de un modo estadístico a un conjunto de partículas, dan una descripción razonable de procesos termodinámicos. Para mantener un nivel relativamente sencillo de matemáticas, consideraremos en esencia el comportamiento de gases, porque en gases las interacciones entre moléculas son mucho más débiles de lo que son en líquidos o sólidos. En nuestro modelo de comportamiento, llamado **teoría cinética**, moléculas de gas se mueven en forma aleatoria, chocando con las paredes de su recipiente y entre ellas mismas. La teoría cinética nos da una base física para entender el concepto de temperatura.

21.1 Modelo molecular de un gas ideal

Iniciamos este capítulo por crear un modelo microscópico de un gas ideal. El modelo muestra que la presión que un gas ejerce sobre las paredes de su recipiente, es una consecuencia de las colisiones de las moléculas de gas con las paredes, y es consistente con la descripción macroscópica del capítulo 19. Al crear este modelo, hacemos las siguientes suposiciones:

Suposiciones del modelo molecular de un gas ideal

1. **El número de moléculas en el gas es grande, y el promedio de separación entre ellas es grande en comparación con sus dimensiones.** Esto significa que las moléculas ocupan un volumen insignificante en el recipiente. Esto es consistente con el modelo de un gas ideal, en el que imaginamos que las moléculas son como puntos.
2. **Las moléculas obedecen las leyes de Newton del movimiento, pero en su conjunto se mueven aleatoriamente.** Por aleatoriamente entendemos que cualquier molécula se puede mover en cualquier dirección con cualquier rapidez. En cualquier momento dado, cierto porcentaje de moléculas se mueven con alta rapidez, y cierto porcentaje se mueve a baja rapidez.
3. **Las moléculas interactúan sólo por fuerzas de corto alcance durante colisiones elásticas.** Esto es consistente con el modelo de un gas ideal, en el que las moléculas no ejercen fuerzas de largo alcance entre ellas.
4. **Las moléculas hacen colisiones elásticas con las paredes.**
5. **El gas bajo consideración es una sustancia pura; esto es, todas las moléculas son idénticas.**

Aun cuando con frecuencia describimos un gas ideal como formado por átomos individuales, podemos suponer que el comportamiento de gases moleculares se aproxima al de gases ideales, más que a presiones muy bajas. Las rotaciones o vibraciones moleculares no tienen efecto, en promedio, en los movimientos que consideramos aquí.

Para nuestra primera aplicación de teoría cinética, deduzcamos una expresión para hallar la presión de N moléculas de un gas ideal en un recipiente de volumen V en términos de cantidades microscópicas. El recipiente es un cubo con lados de longitud d (figura 21.1). Primero concentraremos nuestra atención en una de estas moléculas de masa m, y supon-

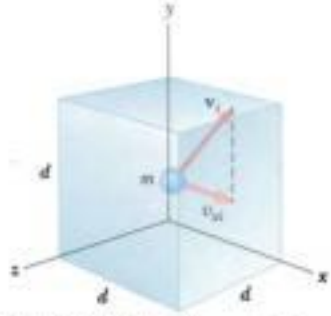


Figura 21.1 Caja cúbica con lados de longitud d que contiene un gas ideal. La molécula mostrada se mueve con velocidad $\mathbf{v}_x$.

Materiał chroniony prawem autorskim

un número muy grande de moléculas, sin embargo, como el número de Avogadro, estas variaciones en fuerza se suavizan, de modo que la fuerza promedio dada antes es igual en *cualquier* intervalo de tiempo. Por lo tanto, la fuerza *F constante* sobre la pared debida a las colisiones moleculares es

$$F = \frac{m}{d} \sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2$$

Para continuar, consideremos cómo expresar el valor promedio del cuadrado del componente x de la velocidad para N moléculas. El promedio tradicional de un conjunto de valores es la suma de los valores sobre el número de valores:

$$\overline{v_x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2}{N}$$

El numerador de esta expresión está contenido en el lado derecho de la ecuación precedente. Por lo tanto, combinando las dos ecuaciones, la fuerza total sobre la pared se puede escribir como

$$F = \frac{m}{d} N\overline{v_x^2} \tag{21.1}$$

Ahora concentremos nuestra atención de nuevo en una molécula con componentes de velocidad v_{xi}, v_{yi}, y v_{zi}. El teorema de Pitágoras relaciona el cuadrado de la rapidez de la molécula con los cuadrados de los componentes de velocidad:

$$v_i^2 = v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2$$

En consecuencia, el valor promedio de v^2 para todas las moléculas en el recipiente está relacionado con los valores promedio de v_x^2, v_y^2, y v_z^2 según la expresión

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

Debido a que el movimiento es completamente aleatorio (suposición 2), los valores promedio $\overline{v_x^2}$, $\overline{v_y^2}$, y $\overline{v_z^2}$ son iguales entre sí. Usando este dato y la ecuación precedente, encontramos que

$$\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2}$$

Por lo tanto, de la ecuación 21.1, la fuerza total ejercida sobre la pared es

$$F = \frac{N}{3}\left(\frac{m\overline{v^2}}{d}\right)$$

Usando esta expresión, podemos hallar la presión total ejercida sobre la pared:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{F}{d^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{N}{d^3}\, m\overline{v^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{N}{V}\right) m\overline{v^2}$$

$$P = \frac{2}{3}\left(\frac{N}{V}\right)\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right) \tag{21.2}$$

Relación entre presión y energía cinética molecular

Este resultado indica que **la presión de un gas es proporcional al número de moléculas por unidad de volumen y al promedio de la energía cinética de traslación de las moléculas, $\frac{1}{2}m\overline{v^2}$.** Al analizar este modelo simplificado de un gas ideal, obtenemos un importante resultado que relaciona la cantidad macroscópica de presión con la cantidad microscópica, es decir, el valor promedio del cuadrado de la rapidez molecular. Por lo tanto, hemos establecido un vínculo clave entre el mundo molecular y el mundo a gran escala.

El lector debe observar que la ecuación 21.2 verifica algunas características de presión con las que es probable esté familiarizado. Una forma de aumentar la presión dentro de un recipiente es aumentar el número de moléculas por unidad de volumen N/V del recipiente. Esto es lo que se hace cuando se pone aire a una llanta. La presión en la llanta también puede aumentarse al aumentar la energía cinética promedio de traslación de las moléculas

Materiał chroniony prawem autorskim

Pregunta rápida 21.2 Considere de nuevo la situación de la Pregunta rápida 21.1. La energía interna del gas del recipiente B es (a) el doble que la del recipiente A (b) igual que la del recipiente A (c) la mitad que la del recipiente A (d) imposible de determinar.

Pregunta rápida 21.3 Considere de nuevo la situación de la Pregunta rápida 21.1. La rapidez rms de las moléculas en el recipiente B es (a) el doble que la del recipiente A (b) igual que la del recipiente A (c) la mitad que la del recipiente A (d) imposible de determinar.

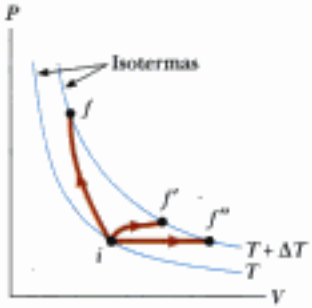


Figura 21.3 Un gas ideal es llevado de una isoterma a temperatura T a otra a temperatura $T + \Delta T$ a lo largo de tres trayectorias diferentes.

21.2 Calor específico molar de un gas ideal

Considere un gas ideal que experimenta varios procesos, de modo que el cambio en temperatura es $\Delta T = T_f - T_i$ para todos los procesos. El cambio de temperatura se puede lograr si se toman varias trayectorias de una isoterma a otra, como se ve en la figura 21.3. Como ΔT es igual para cada trayectoria, el cambio en energía interna ΔE_{int} es igual para todas las trayectorias. No obstante, sabemos de la primera ley, $Q = \Delta E_{int} - W$, que el calor Q es diferente para cada trayectoria, porque W (el negativo del área bajo las curvas) es diferente para cada trayectoria. Por lo tanto, el calor asociado con un cambio dado en la temperatura *no tiene* un valor único.

Podemos resolver esta dificultad si definimos calores específicos para dos procesos que ocurren con frecuencia: cambios a volumen constante y cambios a presión constante. Como el número de moles es una medida cómoda de la cantidad de gas, definimos los **calores específicos molares** asociados con estos procesos con las siguientes ecuaciones:

$$Q = nC_V \Delta T \qquad \text{(volumen constante)} \tag{21.8}$$

$$Q = nC_P \Delta T \qquad \text{(presión constante)} \tag{21.9}$$

donde C_V es el **calor específico molar a volumen constante.** Cuando agregamos energía a un gas por calor a presión constante, no sólo aumenta la energía interna del gas, sino que se realiza trabajo sobre el gas debido al cambio en volumen. Por lo tanto, el calor $Q_{\text{constante } P}$ debe explicar el aumento en energía interna y la transferencia de energía fuera del sistema por trabajo. Por esta razón, $Q_{\text{constante } P}$ es mayor que $Q_{\text{constante } V}$ para valores dados de n y ΔT. Por lo tanto, C_P es mayor que C_V.

En la sección previa, encontramos que la temperatura de un gas es una medida de la energía cinética promedio de traslación de las moléculas de gas. Esta energía cinética está asociada con el movimiento del centro de masa de cada molécula. No incluye la energía asociada con el movimiento interno de la molécula, es decir, vibraciones y rotaciones alrededor del centro de masa. Esto no debe sorprender, porque el modelo sencillo de la teoría cinética supone una molécula sin estructura.

En vista de esto, primero consideremos el caso más sencillo de un gas ideal monoatómico, es decir, un gas que contiene un átomo por molécula, por ejemplo el helio, neón, o argón. Cuando se agrega energía a un gas monoatómico en un recipiente de volumen fijo, toda la energía agregada se va en aumentar la energía cinética de traslación de los átomos. No hay otra forma de almacenar energía en un gas monoatómico. En consecuencia, de la ecuación 21.6, vemos que la energía interna E_{int} de N moléculas (o n mol) de un gas ideal monoatómico es

Energía interna de un gas ideal monoatómico

$$E_{int} = K_{\text{tot trans}} = \tfrac{3}{2}Nk_BT = \tfrac{3}{2}nRT \tag{21.10}$$

Nótese que para un gas ideal monoatómico, E_{int} es una función sólo de T, y la relación funcional está dada por la ecuación 21.10. En general, la energía interna de un gas ideal es una función sólo de T, y la relación exacta depende del tipo de gas.

Materiał chroniony prawem autorskim

Si se transfiere energía por calor a un sistema a *volumen constante*, entonces no se realiza trabajo sobre el sistema. Esto es, $W = -\int P dV = 0$ para un proceso a volumen constante. Entonces, de la primera ley de la termodinámica vemos que

$$Q = \Delta E_{int} \tag{21.11}$$

En otras palabras, toda la energía transferida por calor se va a aumentar la energía interna del sistema. En la figura 21.4 se describe un proceso a volumen constante de i a f para un gas ideal, donde ΔT es la diferencia de temperatura entre las dos isotermas. Si sustituimos la expresión de Q dada por la ecuación 21.8 en la ecuación 21.11, obtenemos

$$\Delta E_{int} = nC_V \Delta T \tag{21.12}$$

Si el calor específico molar es constante, podemos expresar la energía interna de un gas como

$$E_{int} = nC_V T$$

Esta ecuación se aplica a todos los gases ideales a gases que —tienen más de un átomo por molécula— así como a gases ideales monoatómicos. En el límite de cambios infinitesimales, podemos usar la ecuación 21.12 para expresar el calor específico molar a volumen constante como

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{dE_{int}}{dT} \tag{21.13}$$

Apliquemos ahora los resultados de este análisis al gas monoatómico que hemos estado estudiando. Si sustituimos la energía interna de la ecuación 21.10 en la ecuación 21.13, encontramos que

$$C_V = \tfrac{3}{2}R \tag{21.14}$$

Esta expresión pronostica un valor de $C_V = \frac{3}{2}R = 12.5\ \mathrm{J/mol \cdot K}$ para *todos* los gases monoatómicos. Este pronóstico está en excelente acuerdo con valores medidos de calores específicos molares para gases como el helio, neón, argón y xenón, en una amplia gama de temperaturas (tabla 21.2). Pequeñas variaciones en la tabla 21.2 a partir de valores pronosti-

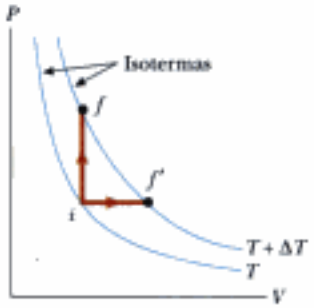


Figura activa 21.4 Se transfiere energía por calor a un gas ideal en dos formas. Para la trayectoria a volumen constante $i \rightarrow f$, toda la energía se va en aumentar la energía interna del gas, porque no se realiza trabajo. A lo largo de la trayectoria a presión constante $i \rightarrow f'$, parte de la energía transferida entrando como calor es transferida como trabajo de salida.

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, usted podrá seleccionar temperaturas inicial y final, para un mol de un gas ideal que experimente procesos a volumen constante y presión constante, y medir Q, W, ΔE_{int}, C_V, y C_P.

Tabla 21.2

Calores específicos molares de varios gases

	Calor específico molar (J/mol·K)[a]			
Gas	C_P	C_V	$C_P - C_V$	$\gamma = C_P/C_V$
Gases monoatómicos				
He	20.8	12.5	8.33	1.67
Ar	20.8	12.5	8.33	1.67
Ne	20.8	12.7	8.12	1.64
Kr	20.8	12.3	8.49	1.69
Gases diatómicos				
H_2	28.8	20.4	8.35	1.41
N_2	29.1	20.8	8.33	1.40
O_2	29.4	21.1	8.33	1.40
CO	29.3	21.0	8.33	1.40
Cl_2	34.7	25.7	8.96	1.35
Gases poliatómicos				
CO_2	37.0	28.5	8.50	1.30
SO_2	40.4	31.4	9.00	1.29
H_2O	35.4	27.0	8.37	1.30
CH_4	35.5	27.1	8.41	1.31

[a] Todos los valores excepto el del agua se obtuvieron a 300 K.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 21.2 Calentamiento de un cilindro de helio

Un cilindro contiene 3.00 moles de helio a una temperatura de 300 K.

(A) Si el gas se calienta a volumen constante, ¿cuánta energía debe ser transferida por calor al gas para que su temperatura aumente a 500 K?

Solución Para el proceso a volumen constante, tenemos

$$Q_1 = nC_V \Delta T$$

Como $C_V = 12.5$ J/mol·K para helio y $\Delta T = 200$ K, obtenemos

$$Q_1 = (3.00 \text{ mol})(12.5 \text{ J/mol·K})(200 \text{ K})$$
$$= \mathbf{7.50 \times 10^3 \text{ J}}$$

(B) ¿Cuánta energía debe ser transferida por calor al gas a presión constante para elevar la temperatura a 500?

Solución Haciendo uso de la tabla 21.2, obtenemos

$$Q_2 = nC_P \Delta T$$
$$= (3.00 \text{ mol})(20.8 \text{ J/mol·K})(200 \text{ K})$$
$$= \mathbf{12.5 \times 10^3 \text{ J}}$$

Nótese que esto es más que Q_1, debido a la transferencia de energía fuera del gas por trabajo en el proceso a presión constante.

21.3 Procesos adiabáticos para un gas ideal

Como ya vimos en la sección 20.6, un **proceso adiabático** es aquél en el que no se transfiere energía por calor entre un sistema y su entorno. Por ejemplo, si un gas se comprime (o se expande) muy rápidamente, muy poca energía se transfiere fuera (o hacia dentro) del sistema por calor, y por lo tanto, el proceso es casi adiabático. Estos procesos se presentan en el ciclo de un motor de gasolina, que estudiaremos en detalle en el siguiente capítulo. Otro ejemplo de un proceso adiabático es la expansión muy lenta de un gas que está térmicamente aislado de su entorno.

Suponga que un gas ideal experimenta una expansión adiabática. En cualquier momento durante el proceso, suponemos que el gas está en estado de equilibrio, de modo que la ecuación de estado $PV = nRT$ es válida. Como a continuación mostramos, la presión y el volumen de un gas ideal en cualquier tiempo durante un proceso adiabático están relacionados por la expresión

$$PV^\gamma = \text{constante} \tag{21.18}$$

Relación entre P y V para un proceso adiabático donde interviene un gas ideal

donde $\gamma = C_P/C_V$ se supone constante durante el proceso. Así, vemos que las tres variables en la ley de gases ideales —P, V y T— cambian durante un proceso adiabático.

Prueba que PV^γ = constante para un proceso adiabático

Cuando un gas se comprime en forma adiabática en un cilindro térmicamente aislado, no se transfiere energía por calor entre el gas y su entorno; así, $Q = 0$. Imaginemos un cambio infinitesimal en volumen dV y un consecuente cambio infinitesimal en temperatura dT. El trabajo realizado sobre el gas es $-P\,dV$. Como la energía interna de un gas ideal depende sólo de la temperatura, el cambio en la energía interna en un proceso adiabático es igual para un proceso isométrico entre las mismas temperaturas, $dE_{int} = nC_V\,dT$ (ecuación 21.12). Por lo tanto, la primera ley de la termodinámica, $\Delta E_{int} = Q + W$, con $Q = 0$, se convierte en

$$dE_{int} = nC_V\,dT = -P\,dV$$

Si se toma el diferencial total de la ecuación de estado de un gas ideal, $PV = nRT$, vemos que

$$P\,dV + V\,dP = nR\,dT$$

Al eliminar dT de estas dos ecuaciones, encontramos que

$$P\,dV + V\,dP = -\frac{R}{C_V}P\,dV$$

Materiał chroniony prawem autorskim

Para aclarar las variaciones en C_V y C_P en gases más complejos que los gases monoatómicos, exploremos más el origen del calor específico molar. Hasta este punto, hemos supuesto que la única aportación a la energía interna de un gas es la energía cinética de traslación de las moléculas. No obstante, la energía interna de un gas comprende aportaciones provenientes de movimiento de traslación, de vibración y de rotación de las moléculas. Los movimientos de rotación y de vibración de moléculas se pueden activar por colisiones y, por lo tanto, están "acoplados" al movimiento de traslación de las moléculas. La rama de la física conocida como *mecánica estadística*, ha demostrado que, para un gran número de partículas que obedecen las leyes de la mecánica de Newton, la energía disponible es, en promedio, compartida igualmente por cada grado de libertad independiente. Recordemos de la sección 21.1 que el teorema de equipartición indica que, en equilibrio, cada grado de libertad aporta $\frac{1}{2}k_BT$ de energía por molécula.

Consideremos un gas diatómico cuyas moléculas tienen la forma de una mancuerna con pesas (figura 21.6). En este modelo, el centro de masa de la molécula puede trasladarse en las direcciones x, y y z (figura 21.6a). Además, la molécula puede girar alrededor de tres ejes mutuamente perpendiculares (figura 21.6b). Podemos despreciar la rotación alrededor del eje y porque el momento de inercia I_y de la molécula y su energía rotacional $\frac{1}{2}I_y\omega^2$ alrededor de este eje son insignificantes en comparación con los asociados con los ejes x y z. (Si los dos átomos se toman como masas puntuales, entonces I_y es idénticamente cero). Por lo tanto, hay cinco grados de libertad para traslación y rotación: tres asociados con el movimiento de traslación y dos asociados con el movimiento de rotación. Como cada grado de libertad aporta, en promedio, $\frac{1}{2}k_BT$ de energía por molécula, la energía interna para un sistema de N moléculas, despreciando por ahora la vibración, es

$$E_{int} = 3N(\tfrac{1}{2}k_BT) + 2N(\tfrac{1}{2}k_BT) = \tfrac{5}{2}Nk_BT = \tfrac{5}{2}nRT$$

Podemos usar este resultado en la ecuación 21.13 para hallar el calor específico molar a volumen constante:

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{dE_{int}}{dT} = \frac{1}{n}\frac{d}{dT}(\tfrac{5}{2}nRT) = \tfrac{5}{2}R \qquad (21.21)$$

De las ecuaciones 21.16 y 21.17, encontramos que

$$C_P = C_V + R = \tfrac{7}{2}R$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} = 1.40 .$$

Estos resultados concuerdan muy bien con la mayor parte de la información para moléculas diatómicas dada en la tabla 21.2. Esto es más bien sorprendente, porque todavía no hemos considerado las posibles variaciones de la molécula.

En el modelo para vibración, los dos átomos están unidos por un resorte imaginario (véase la figura 21.6c). El movimiento de vibración agrega dos grados de libertad más, que corresponden a la energía cinética y la energía potencial asociada con vibraciones a lo largo de la molécula. Por lo tanto, la física clásica y el teorema de equipartición en un modelo que incluye los tres tipos de movimiento, predicen un total de energía interna de

$$E_{int} = 3N(\tfrac{1}{2}k_BT) + 2N(\tfrac{1}{2}k_BT) + 2N(\tfrac{1}{2}k_BT) = \tfrac{7}{2}Nk_BT = \tfrac{7}{2}nRT$$

y un calor específico molar a volumen constante de

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{dE_{int}}{dT} = \frac{1}{n}\frac{d}{dT}(\tfrac{7}{2}nRT) = \tfrac{7}{2}R \qquad (21.22)$$

Este valor es inconsistente con datos experimentales para moléculas como el H_2 y N_2 (véase la tabla 21.2), y sugiere una ruptura de nuestro modelo basado en física clásica.

Podría parecer que nuestro modelo es un fracaso para predecir calores específicos molares para gases diatómicos. Podemos expresar nuestro éxito para este modelo, no obstante, si las mediciones de calor específico molar se hacen en una amplia gama de temperatura,

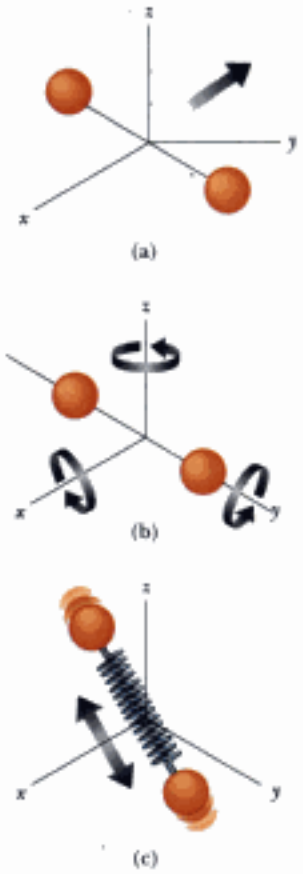


Figura 21.6 Posibles movimientos de una molécula diatómica: (a) movimiento de traslación del centro de masa, (b) movimiento de rotación alrededor de los diversos ejes y (c) movimiento de vibración a lo largo del eje molecular.

Materiał chroniony prawem autorskim

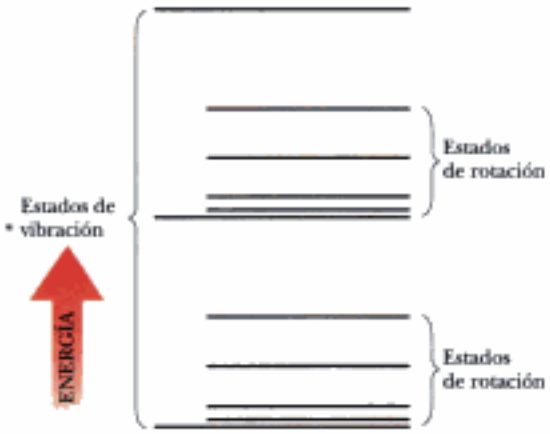


Figura 21.8 Diagrama de niveles de energía para estados de vibración y rotación de una molécula diatómica. Nótese que los estados de rotación están más cercanos entre sí en energía que los estados de vibración.

A bajas temperaturas, la energía que una molécula gana en colisiones con sus vecinas es por lo general no suficientemente grande para elevarla al primer estado excitado de rotación o de vibración. Por lo tanto, aun cuando la rotación y vibración se permiten clásicamente, no se presentan a bajas temperaturas. Todas las moléculas están en el estado base para rotación y vibración. Por lo tanto, la única aportación de la energía promedio de las moléculas es por traslación, y el calor específico es el pronosticado por la ecuación 21.14.

Cuado sube la temperatura, aumenta la energía promedio de las moléculas. En algunas colisiones, una molécula puede tener suficiente energía transferida a ella desde otra molécula como para excitarla al primer estado de rotación. Cuando la temperatura aumenta todavía más, más moléculas pueden estar excitadas en este estado. El resultado es que la rotación empieza a contribuir en la energía interna y sube el calor específico molar. Alrededor de la temperatura ambiente de la figura 21.7, la segunda superficie plana se ha alcanzado y la rotación contribuye por completo al calor específico molar. El calor específico molar es ahora igual al valor pronosticado por la ecuación 21.21.

No hay aportación a temperatura ambiente por la vibración, porque las moléculas están todavía en el estado base de vibración. La temperatura debe elevarse más para excitarlas al primer estado de vibración. Esto ocurre en la figura 21.7 entre 1 000 K y 10 000 K. A 10 000 K en el lado derecho de la figura, la vibración está contribuyendo por completo a la energía interna y el calor específico molar tiene el valor pronosticado por la ecuación 21.22.

Las predicciones de este modelo apoyan el teorema de equipartición de la energía. Además, la inclusión en el modelo de cuantización de la energía de la física cuántica permite entender por completo la figura 21.7.

Pregunta rápida 21.6 El calor específico molar de un gas diatómico se mide a volumen constante y se encuentra que es 29.1 J/mol · K. Los tipos de energía que están contribuyendo al calor específico molar son (a) sólo traslación (b) sólo traslación y rotación (c) sólo traslación y vibración (d) traslación, rotación y vibración.

Pregunta rápida 21.7 El calor específico molar de un gas se mide a volumen constante y se encuentra que es $11R/2$. Es muy probable que el gas sea (a) monoatómico (b) diatómico (c) poliatómico.

El calor específico molar de sólidos

Los calores específicos molares de sólidos también demuestran una marcada dependencia con la temperatura. Los sólidos tienen calores específicos molares que generalmente disminuyen en forma no lineal con la temperatura decreciente, y se aproximan a cero cuando la

Materiał chroniony prawem autorskim

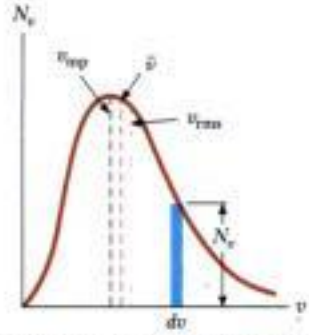


Figura activa 21.11 Distribución de velocidades de moléculas de gas a alguna temperatura. El número de moléculas que tienen rapidez en el intervalo de v a $v + dv$ es igual al área del rectángulo sombreado, $N_v dv$. La función N_v se aproxima a cero cuando v se aproxima al infinito.

En el vínculo **Active Figures** *en* http://www.pse6.com, *usted podrá mover el triángulo azul y medir el número de moléculas con rapidez dentro de un pequeño intervalo.*

Consideremos un recipiente de gas cuyas moléculas tienen alguna distribución de rapidez. Suponga que deseamos determinar cuántas moléculas de gas tienen una rapidez en el intervalo de, por ejemplo, 400 a 410 m/s. Intuitivamente, esperamos que la distribución de rapidez dependa de la temperatura. Además, esperamos que la distribución presente un pico en la cercanía de v_{rms}. Esto es, se espera que pocas moléculas tengan rapidez mucho menores o mucho mayores que v_{rms} porque esta rapidez resulta sólo de una poco probable cadena de colisiones.

La distribución observada de rapidez de moléculas de gas en equilibrio térmico se muestra en la figura 21.11. La cantidad N_v, llamada **función de distribución de rapidez de Maxwell-Boltzmann,** se define como sigue. Si N es el número total de moléculas, entonces el número de moléculas con rapidez entre v y $v + dv$ es $dN = N_v\, dv$. Este número también es igual al área del rectángulo sombreado de la figura 21.11. Además, la fracción de moléculas con rapidez entre v y $v + dv$ es $(N_v\, dv)/N$. Esta fracción también es igual a la probabilidad de que una molécula tenga una rapidez en el intervalo entre v y $v + dv$.

La expresión fundamental que describe la distribución de rapidez de N moléculas de gas es

$$N_v = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_B T} \tag{21.26}$$

donde m es la masa de una molécula de gas, k_B es la constante de Boltzmann, y T es la temperatura absoluta.[2] Observe el aspecto del factor de Boltzmann $e^{-E/k_B T}$ con $E = \frac{1}{2}mv^2$.

Como se indica en la figura 21.11, la rapidez promedio es un poco más lenta que la rapidez rms. La *rapidez* v_{mp} *más probable* es la rapidez a la que la curva de distribución alcanza un pico. Con el uso de la ecuación 21.26, encontramos que

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = 1.73\sqrt{\frac{k_B T}{m}} \tag{21.27}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} = 1.60\sqrt{\frac{k_B T}{m}} \tag{21.28}$$

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} = 1.41\sqrt{\frac{k_B T}{m}} \tag{21.29}$$

La ecuación 21.27 ha aparecido previamente como ecuación 21.7. Los detalles de las deducciones de estas ecuaciones a partir de la ecuación 21.26 se dejan para el estudiante (véanse problemas 39 y 65). De estas ecuaciones, vemos que

$$v_{rms} > \bar{v} > v_{mp}$$

La figura 21.12 representa curvas de distribución de rapidez para el nitrógeno, N_2. Las curvas se obtuvieron con el uso de la ecuación 21.26 para evaluar la función de distribución a diferente rapidez y a dos temperaturas. Nótese que el pico de la curva se mueve a la derecha cuando T aumenta, lo que indica que aumenta la rapidez promedio con una temperatura creciente, como es de esperarse. La forma asimétrica de las curvas se debe al hecho de que la rapidez más baja posible es cero, mientras que el límite clásico superior de la rapidez es infinito. (En el capítulo 17 del volumen II, demostraremos que el límite superior real es la rapidez de la luz.)

La ecuación 21.26 muestra que la distribución de rapidez molecular en un gas depende de la masa y de la temperatura. A una temperatura dada, la fracción de moléculas con rapidez que excedan de un valor fijo, aumenta cuando disminuye la masa. Esto explica por qué moléculas más ligeras, como el H_2 y He, escapan con más rapidez de la atmósfera de la Tierra que moléculas más pesadas como las de N_2 y O_2. (Véase el estudio de la rapidez de escape en el capítulo 13. Las moléculas de gas escapan incluso más fácilmente de la superficie de la Luna que de la terrestre, porque la rapidez de escape en la Luna es más baja que la de la Tierra.)

Las curvas de distribución de rapidez para moléculas en un líquido, son semejantes a las que se ven en la figura 21.12. Podemos comprender el fenómeno de evaporación de un líquido a partir de esta distribución en rapidez, usando el hecho de que algunas mo-

Ludwig Boltzmann
Físico austriaco (1844-1906)

Boltzmann hizo muchas aportaciones importantes al perfeccionamiento de la teoría cinética de los gases, electromagnetismo y termodinámica. Su innovadora obra en el campo de la teoría cinética, condujo a la rama de la física que se conoce como mecánica estadística. *(Cortesía de AIP Niels Bohr Library, Lande Collection).*

[2] Para la deducción de esta expresión, véase un texto avanzado sobre termodinámica, como el escrito por R. P. Bauman, *Modern Thermodynamics with Statistical Mechanics*, New York, Macmillan Publishing Co., 1992.

Material chroniony prawem autorskim

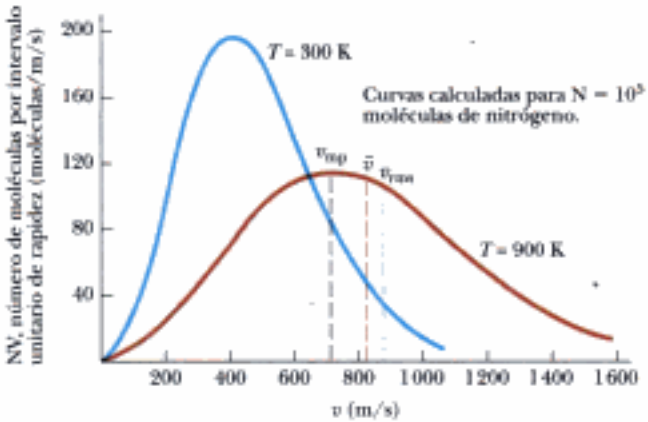


Figura activa 21.12 Función de distribución de rapidez para 10^5 moléculas de nitrógeno a 300 K y 900 K. El área total bajo cualquiera de las curvas es igual al número total de moléculas, que en este caso es igual a 10^5. Nótese que $v_{rms} > \bar{v} > v_{mp}$.

En el vínculo **Active Figures** *en* **http://www.pse6.com**, *usted podrá establecer la temperatura deseada y ver el efecto sobre la curva de distribución.*

léculas del líquido son más energéticas que otras. Algunas de las moléculas de rápido movimiento del líquido penetran la superficie y salen del líquido incluso a temperaturas bien por abajo del punto de ebullición. Las moléculas que escapan del líquido por evaporación, son las que tienen suficiente energía para vencer las fuerzas de atracción de las moléculas en la fase líquida. En consecuencia, las moléculas que quedan atrás en la fase líquida tienen una menor energía cinética promedio; como resultado de esto, disminuye la temperatura del líquido. Por lo tanto, la evaporación es un proceso de enfriamiento. Por ejemplo, a veces se pone una tela humedecida en alcohol en la cabeza, a un paciente para enfriarla y confortarla.

Pregunta rápida 21.8 Considere las formas cualitativas de las dos curvas de la figura 21.12, sin considerar los valores numéricos ni marcas en la gráfica. Suponga que usted tiene dos recipientes de gas *a la misma temperatura*. El recipiente A tiene 10^5 moléculas de nitrógeno y el recipiente B tiene 10^5 moléculas de hidrógeno. La comparación cualitativa correcta entre los recipientes y las dos curvas de la figura 21.12 es (a) el recipiente A corresponde a la curva azul y el recipiente B a la curva café (b) el recipiente B corresponde a la curva azul y el recipiente A a la curva café (c) ambos recipientes corresponde a la misma curva.

Ejemplo 21.5 Un sistema de nueve partículas

Nueve partículas tienen rapidez de 5.00, 8.00, 12.00, 12.00, 12.0, 14.0, 14.00, 17.0 y 20.0 m/s.

(A) Hállese la rapidez promedio de las partículas.

Solución La rapidez promedio de las partículas es la suma de la rapidez de cada una, dividida entre el número total de partículas:

$$\bar{v} = \frac{(5.00 + 8.00 + 12.0 + 12.0 + 12.0 + 14.0 + 14.0 + 17.0 + 20.0)\ \text{m/s}}{9}$$

$$= \mathbf{12.7\ m/s}$$

(B) ¿Cuál es la rapidez rms de las partículas?

Solución El valor promedio del cuadrado de la rapidez es

$$\overline{v^2} = \frac{(5.00^2 + 8.00^2 + 12.0^2 + 12.0^2 + 12.0^2 + 14.0^2 + 14.0^2 + 17.0^2 + 20.0^2)\ \text{m}^2/\text{s}^2}{9}$$

$$= 178\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

Por lo tanto, la rapidez rms de las partículas es

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{178\ \text{m}^2/\text{s}^2} = \mathbf{13.3\ m/s}$$

(C) ¿Cuál es la rapidez más probable de las partículas?

Solución Tres de las partículas tienen una rapidez de 12.0 m/s, dos tienen una rapidez de 14.0 m/s y el resto tienen diferente rapidez. Por lo tanto, vemos que la rapidez más probable v_{mp} es 12.0 m/s.

12.0 m/s.

Materiał chroniony prawem autorskim

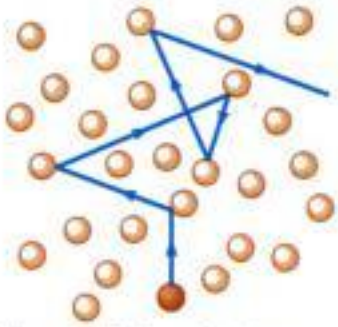


Figura 21.13 Una molécula que se mueve en un gas choca aleatoriamente con otras moléculas. Este comportamiento se conoce a veces como *proceso de camino aleatorio*. La trayectoria libre media aumenta cuando disminuye el número de moléculas por volumen unitario. Nótese que el movimiento no está limitado al plano del papel.

21.7 Trayectoria libre media

La mayoría de nosotros estamos familiarizados con el hecho de que el fuerte olor asociado con un gas como el amoniaco puede tomar una fracción de minuto en difundirse en un cuarto. No obstante, como el promedio de rapidez molecular suele ser de varios cientos de metros por segundo a temperatura ambiente, podríamos esperar un tiempo de difusión mucho menor a un segundo. La razón de esta diferencia es que las moléculas chocan unas con otras porque no son puntos geométricos. Por lo tanto, no se desplazan de un lado de un cuarto al otro en línea recta. Entre colisiones, las moléculas se mueven con rapidez constante a lo largo de líneas rectas. La distancia promedio entre colisiones se llama **trayectoria libre media.** La trayectoria de una molécula individual es aleatoria y se asemeja a la que se ilustra en la figura 21.13. Como esperaríamos por esta descripción, la trayectoria libre media está relacionada con el diámetro de las moléculas y la densidad del gas.

Ahora describimos la forma de estimar la trayectoria libre media de una molécula de gas. Para este cálculo, suponemos que las moléculas son esferas de diámetro d. Vemos de la figura 21.14a que no hay dos moléculas que choquen a menos que sus trayectorias, que se suponen perpendiculares a la página en la figura 21.14a, están separadas menos de una distancia d cuando las moléculas se aproximan entre sí. Una forma equivalente de describir las colisiones es imaginar que una de las moléculas tiene un diámetro $2d$ y que el resto son puntos geométricos (figura 21.14b). Seleccionemos que la molécula grande es una que se mueve con rapidez promedio $\bar{v}$. En un intervalo Δt, esta molécula se desplaza una distancia $\bar{v}\,\Delta t$. En este intervalo, la molécula recorre un cilindro que tiene área de sección πd^2 y una longitud $\bar{v}\,\Delta t$ (figura 21.15). En consecuencia, el volumen del cilindro es $\pi d^2 \bar{v}\,\Delta t$. Si n_V es el número de moléculas por volumen unitario, entonces el número de moléculas de tamaño puntual del cilindro es $(\pi d^2 \bar{v}\,\Delta t)\,n_V$. La molécula de diámetro equivalente $2d$ choca con toda molécula de este cilindro en el intervalo Δt. Por lo tanto, el número de colisiones en el intervalo Δt es igual al número de moléculas del cilindro $(\pi d^2 \bar{v}\,\Delta t)\,n_V$.

La trayectoria libre media ℓ es igual a la distancia promedio $\bar{v}\,\Delta t$ recorrida en un intervalo Δt dividida entre el número de colisiones que ocurren en ese intervalo:

$$\ell = \frac{\bar{v}\,\Delta t}{(\pi d^2 \bar{v}\,\Delta t)\,n_V} = \frac{1}{\pi d^2 n_V}$$

Como el número de colisiones en un intervalo Δt es $(\pi d^2 \bar{v}\,\Delta t)\,n_V$, el número de colisiones por intervalo unitario, o **frecuencia de colisión f,** es

$$f = \pi d^2 \bar{v} n_V$$

El inverso de la frecuencia de colisión es el intervalo de tiempo promedio entre colisiones, conocido como **tiempo libre medio.**

Nuestro análisis ha supuesto que las moléculas del cilindro están estacionarias. Cuando el movimiento de estas moléculas se incluye en el cálculo, los resultados correctos son

Trayectoria libre media

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d^2 n_V} \tag{21.30}$$

Frecuencia de colisión

$$f = \sqrt{2}\,\pi d^2 \bar{v} n_V = \frac{\bar{v}}{\ell} \tag{21.31}$$

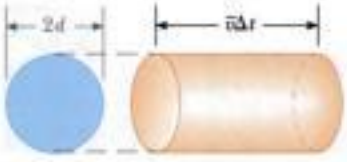


Figura 21.15 En un intervalo Δt, una molécula de diámetro efectivo $2d$ y que se mueve a la derecha recorre un cilindro de longitud $\bar{v}\Delta t$ donde $\bar{v}$ es su rapidez promedio En este intervalo, choca con toda molécula puntual dentro de este cilindro.

Figura 21.14 (a) Dos moléculas esféricas, cada una de diámetro d y que se mueven a lo largo de trayectorias perpendiculares a la página, chocan si sus trayectorias están a no más de una distancia d una de otra. (b) La colisión entre las dos moléculas es equivalente a una molécula puntual que choca con una molécula que tiene un diámetro efectivo de $2d$.

Materiał chroniony prawem autorskim

Ejemplo 21.6 Rebotes en el aire

Considere el lector que el aire que le rodea es un conjunto de moléculas de nitrógeno, cada una con diámetro de 2.00×10^{-10} m.

(A) ¿A qué distancia se aleja una molécula típica antes que choque con otra molécula?

Solución Si se supone que el gas es ideal, podemos usar la ecuación $PV = Nk_BT$ para obtener el número de moléculas por volumen unitario bajo condiciones de un cuarto típicas:

$$n_V = \frac{N}{V} = \frac{P}{k_BT} = \frac{1.01 \times 10^5\ \text{N/m}^2}{(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(293\ \text{K})}$$
$$= 2.50 \times 10^{25}\ \text{moléculas/m}^3$$

Por lo tanto, la trayectoria libre media es

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_V}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}\pi(2.00 \times 10^{-10}\ \text{m})^2(2.50 \times 10^{25}\ \text{moléculas/m}^3)}$$
$$= \mathbf{2.25 \times 10^{-7}\ m}$$

Este valor es aproximadamente 10^3 veces mayor que el diámetro molecular.

(B) En promedio, ¿con qué frecuencia choca una molécula con otra?

Solución Como la rapidez rms de una molécula de nitrógeno a 20.0°C es 511 m/s (véase la tabla 21.1), sabemos de las ecuaciones 21.27 y 21.28 que $\bar{v} = (1.60/1.73)(511\ \text{m/s}) = 473\ \text{m/s}$. Por lo tanto, la frecuencia de colisión es

$$f = \frac{\bar{v}}{\ell} = \frac{473\ \text{m/s}}{2.25 \times 10^{-7}\ \text{m}} = \mathbf{2.10 \times 10^9/s}$$

La molécula choca con otras moléculas a razón promedio de unos 2 mil millones de veces por segundo.

La trayectoria libre media ℓ *no es* la misma que la separación promedio entre partículas. De hecho, la separación promedio d entre partículas es aproximadamente $n_V^{-1/3}$. En este ejemplo, la separación promedio molecular es

$$d = \frac{1}{n_V^{1/3}} = \frac{1}{(2.5 \times 10^{25})^{1/3}} = 3.4 \times 10^{-9}\ \text{m}$$

RESUMEN

La presión de N moléculas de un gas ideal contenido en un volumen V es

$$P = \frac{2}{3}\frac{N}{V}\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right) \tag{21.2}$$

La energía cinética promedio de traslación por molécula de un gas, $\frac{1}{2}m\overline{v^2}$, está relacionada con la temperatura T del gas por medio de la expresión

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_BT \tag{21.4}$$

donde k_B es la constante de Boltzmann. Cada grado de libertad de traslación (x, y o z) tiene $\frac{1}{2}k_BT$ de energía asociada con él.

El **teorema de equipartición de la energía** expresa que la energía de un sistema en equilibrio térmico está igualmente dividida entre todos los grados de libertad.

La energía térmica de N moléculas (o n moles) de un gas monoatómico ideal es

$$E_{int} = \frac{3}{2}Nk_BT = \frac{3}{2}nRT \tag{21.10}$$

El cambio en energía interna para n moles de cualquier gas ideal que experimenten un cambio en la temperatura ΔT es

$$\Delta E_{int} = nC_V\Delta T \tag{21.12}$$

donde C_V es el calor específico molar a volumen constante.

El calor específico molar de un gas monoatómico ideal a volumen constante es $C_V = \frac{3}{2}R$; el calor específico molar a presión constante es $C_P = \frac{5}{2}R$. La razón entre calores específico está dada por $\gamma = C_P/C_V = \frac{5}{3}$.

Si un gas ideal experimenta una expansión o compresión adiabática, la primera ley de la termodinámica, junto con la ecuación de estado, muestra que

$$PV^\gamma = \text{constante} \tag{21.18}$$

Materiał chroniony prawem autorskim

La **ley de distribución de Boltzmann** describe la distribución de partículas entre estados de energía disponibles. El número relativo de partículas que tienen energía entre E y $E + dE$ es $n_V(E)\ dE$, donde

$$n_V(E) = n_0 e^{-E/k_B T} \tag{21.25}$$

La **función de distribución de rapidez de Maxwell-Boltzmann** describe la distribución de rapidez de moléculas en un gas:

$$N_v = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_B T} \tag{21.26}$$

Esta expresión hace posible que calculemos la **rapidez cuadrática media,** el **promedio de rapidez,** y la **rapidez más probable:**

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = 1.73\sqrt{\frac{k_B T}{m}} \tag{21.27}$$

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} = 1.60\sqrt{\frac{k_B T}{m}} \tag{21.28}$$

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} = 1.41\sqrt{\frac{k_B T}{m}} \tag{21.29}$$

PREGUNTAS

1. La ley de Dalton de presiones parciales expresa que la presión total de una mezcla de gases es igual a la suma de las presiones parciales de los gases que formen la mezcla. Dé un argumento convincente para esta ley con base en la teoría cinética de los gases.
2. Un recipiente está lleno con helio y otro con argón. Si ambos recipientes están a la misma temperatura, ¿cuáles moléculas tienen la rapidez rms más alta? Explique.
3. Un gas está formado por una mezcla de moléculas de He y N_2. ¿Se mueven con más rapidez las moléculas de He que las moléculas de N_2? Explique.
4. Aun cuando la rapidez promedio de las moléculas de gas en equilibrio térmico a alguna temperatura es mayor a cero, la velocidad promedio es cero. Explique por qué este enunciado debe ser verdadero.
5. Cuando se frota alcohol en el cuerpo, baja la temperatura de la piel. Explique este efecto.
6. Un líquido llena parcialmente un recipiente. Explique por qué la temperatura del líquido disminuye si al recipiente se le hace vacío parcial. (Con el uso de esta técnica, es posible congelar agua a temperaturas arriba de 0°C).
7. Se enfría un recipiente que contiene un volumen fijo de gas. ¿La trayectoria libre media de las moléculas aumenta, disminuye o sigue constante en el proceso de enfriamiento? ¿Qué pasa con la frecuencia de colisión?
8. Un gas se comprime a una temperatura constante. ¿Qué ocurre a la trayectoria libre media de las moléculas en este proceso?
9. Si un globo inicialmente lleno de helio a temperatura ambiente se pone en un congelador, ¿su volumen aumenta, disminuye o sigue igual?
10. ¿Cuál es más denso, el aire seco o el aire saturado de vapor de agua? Explique.
11. ¿Qué sucede a un globo lleno de helio que se suelte al aire? ¿Se expande o se contrae? ¿Dejará de subir a cierta altura?
12. ¿Por qué un gas diatómico tiene mayor contenido de energía por mol que un gas monoatómico a la misma temperatura?
13. Un gas ideal está contenido en un recipiente a 300 K. Si la temperatura se aumenta a 900 K, ¿en qué factor cambia cada uno de lo siguiente? (a) La energía cinética promedio de las moléculas. (b) La rapidez molecular rms. (c) El cambio en la cantidad de movimiento promedio de una molécula en una colisión con una pared. (d) La frecuencia de colisiones de moléculas con paredes. (e) La presión del gas.
14. Un recipiente está lleno con gas a alguna presión y temperatura de equilibrio. ¿Pueden todas las moléculas del recipiente tener la misma rapidez?
15. En nuestro modelo de la teoría cinética de gases, las moléculas se ven como esferas duras que chocan elásticamente con las paredes del recipiente. ¿Es realista este modelo?
16. En vista del hecho que el aire caliente sube, ¿por qué generalmente se enfría cuando subimos a una montaña? (Nótese que el aire tiene baja conductividad térmica).
17. Al inspeccionar las magnitudes de C_V y C_P para gases diatómicos y monoatómicos en la Tabla 21.2, encontramos que los valores aumentan con una masa molecular creciente. Dé una explicación cualitativa de esta observación.

Materiał chroniony prawem autorskim

21. Una muestra de 1.00 mol de un gas monoatómico ideal, está a una temperatura inicial de 300 K. El gas experimenta un proceso isométrico adquiriendo 500 J de energía por calor. A continuación experimenta un proceso isobárico perdiendo esta misma cantidad de energía por calor. Determine (a) la nueva temperatura del gas y (b) el trabajo realizado sobre el gas.

22. Un cilindro vertical con un émbolo movible contiene 1.00 mol de un gas diatómico ideal. El volumen del gas es V_i, y su temperatura es T_i. Entonces el cilindro se pone sobre una estufa, y se ponen pesos adicionales sobre el émbolo cuando se mueve hacia arriba, en forma tal que la presión es proporcional al volumen, y el volumen final es $2V_i$. (a) ¿Cuál es la temperatura? (b) ¿Cuánta energía se transfiere al gas por calor?

23. Un recipiente tiene una mezcla de dos gases: n_1 mol del gas 1 que tiene calor específico molar C_1 y n_2 moles del gas 2 de calor específico molar C_2. (a) Encuentre el calor específico molar de la mezcla. (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es el calor específico molar si la mezcla tiene m gases en las cantidades $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_m$, con calores específicos molares $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_m$, respectivamente?

Sección 21.3 Procesos adiabáticos para un gas ideal

24. Durante la carrera de compresión de cierto motor de gasolina, la presión aumenta de 1.00 atm a 20.0 atm. Si el proceso es adiabático y la mezcla de aire y combustible se comporta como un gas diatómico ideal, (a) ¿en qué factor cambia el volumen y (b) en qué factor cambia la temperatura? (c) Si se supone que la compresión se inicia con 0.016 0 mol de gas a 27.0°C, encuentre los valores de Q, W y ΔE_{int} que caracterizan el proceso.

25. Una muestra de 2.00 moles de un gas diatómico ideal se expande adiabática y lentamente de una presión de 5.00 atm y un volumen de 12.0 L a un volumen final de 30.0 L. (a) ¿Cuál es la presión final del gás? (b) ¿Cuáles son las temperaturas inicial y final? (c) Encuentre Q, W y ΔE_{int}.

26. Aire (un gas diatómico ideal) a 27.0°C y presión atmosférica se introduce en una bomba de bicicleta que tiene un cilindro con diámetro interior de 2.50 cm y longitud de 50.0 cm. La carrera hacia abajo comprime aire en forma adiabática, que alcanza una presión manométrica de 800 kPa antes de entrar a la llanta (figura P21.26). Determine (a) el volumen del aire comprimido y (b) la temperatura del aire comprimido. (c) **¿Qué pasaría si?** La bomba está hecha de acero y tiene una pared interior de 2.00 mm de grueso. Suponga que 4.00 cm de la longitud del cilindro se dejan llegar a equilibrio térmico con el aire. ¿Cuál será el aumento en la temperatura de la pared?

27. El aire de una nube de tormenta se expande cuando sube. Si su temperatura inicial es de 300 K y no se pierde energía por conducción térmica en la expansión, ¿cuál es la temperatura cuando se ha duplicado el volumen inicial?

28. La botella más grande que se ha fabricado al soplar aire tiene un volumen de unos 0.720 m³. Imagine que esta botella se llena de aire que se comporta como gas diatómico ideal. La botella se mantiene con su abertura en el fondo y rápidamente se sumerge en el océano. No escapa aire ni se mezcla con el agua. No se intercambia energía con el océano por calor. (a) Si el volumen final del aire es de 0.240 m³, ¿en qué factor aumenta la energía interna del aire? (b) Si la botella se sumerge de modo que se duplica la temperatura del aire, ¿cuánto volumen es ocupado por el aire?

George Semple

Figura P21.26

29. Una muestra de 4.00 L de un gas diatómico ideal con una razón de calor específico de 1.40, confinado en un cilindro, es llevado por un ciclo cerrado. El gas está inicialmente a 1.00 atm y a 300 K. Primero, su presión se triplica bajo volumen constante. Luego, se expande de modo adiabático a su presión original. Finalmente, el gas se comprime isobáricamente a su volumen original. (a) Trace un diagrama PV de este ciclo. (b) Determine el volumen del gas al término de la expansión adiabática. (c) Encuentre la temperatura del gas al inicio de la expansión adiabática. (d) Encuentre la temperatura al final del ciclo. (e) ¿Cuál es el trabajo neto realizado sobre el gas para este ciclo?

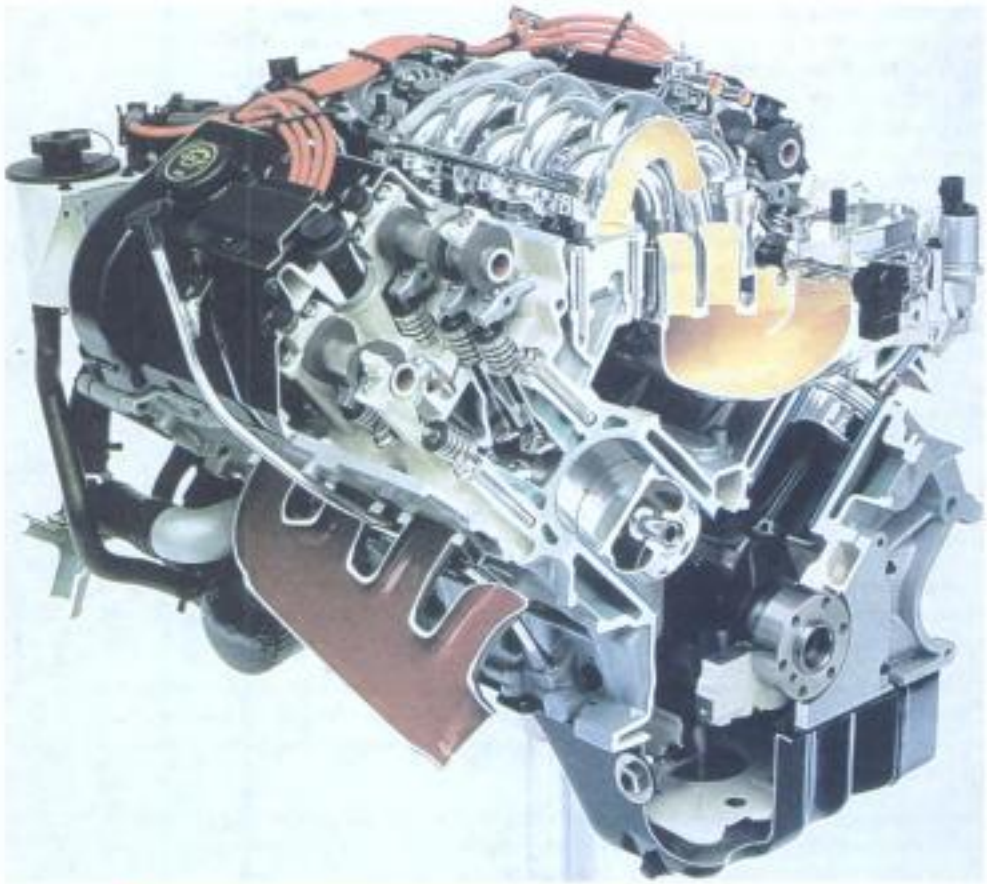
30. Un gas diatómico ideal ($\gamma = 1.40$) confinado a un cilindro se hace pasar por un ciclo cerrado. Inicialmente el gas está a P_i, V_i y T_i. Primero, su presión se triplica bajo volumen constante. Luego se expande en forma adiabática a su presión original, y por último se comprime isobáricamente a su volumen original. (a) Trace un diagrama PV de este ciclo. (b) Determine el volumen del gas al término de la expansión adiabática. Encuentre (c) la temperatura del gas al inicio de la expansión adiabática y (d) la temperatura al final del ciclo. (e) ¿Cuál es el trabajo neto realizado sobre el gas para este ciclo?

31. ¿Cuánto trabajo se necesita para comprimir 5.00 moles de aire a 20.0°C y 1.00 atm a un décimo del volumen original (a) por un proceso isotérmico (b) por un proceso adiabático? (c) ¿Cuál es la presión final en cada uno de estos casos?

Materiał chroniony prawem autorskim

Capítulo 22

Máquinas térmicas, entropía y la segunda ley de la termodinámica



▲ *Esta imagen en corte de un motor de automóvil muestra dos émbolos sobre los que se ha realizado trabajo por una mezcla explosiva de aire y combustible, que en último término lleva al movimiento del automóvil. Este aparato se puede modelar como una máquina térmica, que estudiamos en este capítulo. (Cortesía de Ford Motor Company)*

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

22.1 Máquinas térmicas y la segunda ley de la termodinámica

22.2 Bombas térmicas y refrigeradores

22.3 Procesos reversibles e irreversibles

22.4 La máquina de Carnot

22.5 Motores de gasolina y diesel

22.6 Entropía

22.7 Cambios de entropía en procesos irreversibles

22.8 Entropía a escala microscópica

Materiał chroniony prawem autorskim

La primera ley de la termodinámica, que estudiamos en el capítulo 20, es un enunciado de la conservación de la energía. Esta ley expresa que un cambio en la energía interna en un sistema puede ocurrir como resultado de la transferencia de energía por calor o por trabajo, o por ambos. Como dijimos en el capítulo 20, la ley no hace distinción entre los resultados de calor y los resultados de trabajo; el calor o el trabajo pueden producir un cambio en la energía interna. No obstante, hay una distinción importante entre calor y trabajo, y ésta no es evidente desde la primera ley. Una manifestación de esta distinción es que es imposible diseñar un aparato que, operando de un modo cíclico, tome energía por calor y expulse una cantidad *igual* de energía por trabajo. Un aparato cíclico que toma energía por calor y expulsa *una fracción* de esta energía por trabajo es posible y se llama *máquina térmica*.

Aun cuando la primera ley de la termodinámica es muy importante, no hace distinción entre procesos que ocurren espontáneamente y los que no. Sin embargo, sólo ciertos tipos de procesos de conversión de energía y transferencia de energía tienen lugar realmente en la naturaleza. La *segunda ley de la termodinámica*, el tema más importante de este capítulo, establece cuáles procesos ocurren y cuáles no. Los siguientes son ejemplos de procesos que no violan el principio de la conservación de energía si se realizan en cualquier dirección, pero se observa que ocurren en sólo una dirección, gobernada por la segunda ley:

- Cuando dos cuerpos a diferentes temperaturas se ponen en contacto térmico uno con otro, la transferencia neta de energía por calor es siempre del cuerpo más caliente al menos caliente, nunca del más frío al más caliente.
- Una pelota de caucho que se deje caer el suelo, rebota varias veces y finalmente llega al reposo, pero una pelota que se encuentre en el suelo nunca reúne energía interna del suelo y empieza a botar por sí sola.
- Un péndulo oscilante finalmente llega al reposo debido a colisiones con moléculas del aire y fricción en el punto de suspensión. La energía mecánica del sistema se convierte en energía interna del aire, el péndulo y la suspensión; la conversión inversa de energía nunca ocurre.

Todos estos procesos son *irreversibles*, es decir, son procesos que ocurren de manera natural sólo en una dirección. Ningún proceso irreversible se ha observado que ocurra al contrario; si es que lo hace, violaría la segunda ley de la termodinámica.[1]

Desde el punto de vista de ingeniería, quizá la implicación más importante de la segunda ley es la eficiencia limitada de máquinas térmicas. La segunda ley indica que una máquina que opera en un ciclo, tomando energía por calor y expulsando igual cantidad de energía por trabajo, no se puede construir.

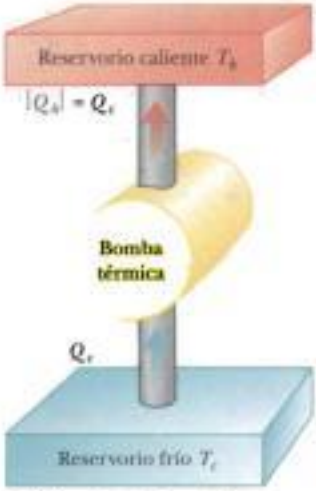
Lord Kelvin

Físico y matemático inglés (1824-1907)

Nacido como William Thomson en Belfast, Kelvin fue el primero en proponer el uso de una escala absoluta de temperatura. La escala Kelvin de temperatura recibe ese nombre en su honor. La obra de Kelvin en la termodinámica llevó a la idea de que la energía no puede pasar espontáneamente de un cuerpo más frío a uno más caliente. (J. L. Carmet/SPL/Photo Researchers, Inc.)

[1] Aun cuando nunca *se ha observado* un proceso que ocurra en sentido de tiempo invertido, *es posible* que ocurra. Como veremos más adelante en este capítulo, sin embargo, la probabilidad que ocurra este proceso es infinitesimalmente pequeña. Desde este punto de vista, decimos que ocurren procesos con probabilidad mucho mayor en una dirección que en dirección opuesta.

Materiał chroniony prawem autorskim



Bomba térmica imposible

Figura 22.6 Diagrama esquemático de una bomba térmica imposible o refrigerador, es decir, una que toma energía de un reservorio frío y expulsa una cantidad equivalente de energía a un reservorio caliente sin la entrada de energía por trabajo.

Charles D. Winters

Figura 22.7 Los serpentines de atrás de un refrigerador transfieren energía por calor al aire. La segunda ley de la termodinámica expresa que esta cantidad de energía debe ser mayor que la cantidad de energía removida del contenido del refrigerador, debido a la entrada de energía por trabajo.

Es imposible construir una máquina cíclica cuyo único efecto sea transferir energía continuamente por calor, de un objeto a otro objeto a una temperatura más alta, sin la entrada de energía por trabajo.

En términos más sencillos, **la energía no se transfiere espontáneamente de un objeto frío a uno caliente.** Esta dirección de transferencia de energía requiere una entrada de energía a una bomba térmica, que con frecuencia es alimentada por medio de electricidad.

Los enunciados de Clausius y Kelvin-Planck de la segunda ley de la termodinámica parecen no estar relacionados, a primera vista, pero de hecho son equivalentes en todos aspectos. Aun cuando no lo demostramos aquí, si uno cualquiera de estos enunciados fuera falso, entonces también lo es el otro.[4]

Las bombas térmicas se han utilizado durante mucho tiempo para enfriar casas y edificios, y en la actualidad también se están haciendo de preferencia generalizada para calentarlos. La bomba térmica contiene dos juegos de serpentines metálicos que pueden intercambiar energía por calor con el entorno: un juego en el exterior del edificio, en contacto con el aire o enterrado en el suelo, y el otro en el interior del edificio. En el modo de calefacción, un fluido en movimiento que circula por los serpentines absorbe energía del exterior y lo libera en el interior del edificio desde los serpentines interiores. El fluido es frío y a baja presión cuando está en los serpentinès exteriores, donde absorbe energía por calor ya sea del aire o del suelo. El resultante fluido caliente se comprime entonces y entra a los serpentines interiores como fluido caliente y de alta presión, donde libera su energía almacenada al aire interior.

Un aire acondicionado es simplemente una bomba térmica con sus serpentines exterior e interior intercambiados, de modo que opera en el modo de enfriamiento. Se absorbe energía entrando en el fluido circulante en los serpentines interiores; luego, después de comprimir el fluido, sale energía del fluido por medio de los serpentines exteriores. El aire acondicionado debe tener una forma de liberar energía al exterior. De otro modo, el trabajo realizado sobre el aire acondicionado representaría energía agregada al aire dentro de la casa, y la temperatura aumentaría. En la misma forma, un refrigerador no puede enfriar la cocina si la puerta del refrigerador se deja abierta. La cantidad de energía que sale de los serpentines exteriores (figura 22.7) detrás o abajo del refrigerador, es mayor que la cantidad de energía retirada de los alimentos. La diferencia entre la energía que sale y la energía que entra es el trabajo realizado por la electricidad suministrada al refrigerador.

La efectividad de una bomba térmica está descrita en términos de un número llamado **coeficiente de operación** (COP). En el modo de calefacción, el COP se define como la razón entre la energía transferida al reservorio caliente y el trabajo necesario para transferir esa energía:

$$\text{Modo de calefacción} = \frac{\text{energía transferida a alta temperatura}}{\text{trabajo realizado por la bomba térmica}} = \frac{|Q_h|}{W} \qquad (22.3)$$

Nótese que el COP es similar a la eficiencia térmica para una máquina térmica en que es una razón entre lo que se gana (energía entregada al interior del edificio) y lo que se pierde (entrada de trabajo). Debido a que $|Q_h|$ es generalmente mayor que W, valores típicos para el COP son mayores a la unidad. Es deseable para el COP ser tan alto como sea posible, igual que como es deseable para la eficiencia térmica de una máquina ser tan alta como sea posible.

Si la temperatura exterior es de 25°F (−4°C) o más alta, un valor típico del COP para una bomba térmica es alrededor de 4. Esto es, la cantidad de energía transferida al edificio es aproximadamente cuatro veces mayor que el trabajo realizado por el motor en la bomba térmica. No obstante, cuando disminuye la temperatura exterior, se hace más difícil para la bomba térmica extraer suficiente energía del aire y por tanto disminuye el COP. En realidad, el COP puede bajar a menos de la unidad para temperaturas abajo de unos 15°F (−9°C). Así, el uso de bombas térmicas que extraen energía del aire, si bien son satisfactorias en climas moderados, no es apropiado en zonas donde las temperaturas invernales son muy bajas. Es posible usar bombas térmicas en regiones más frías al enterrar en el suelo los

[4] Véase, por ejemplo, la obra de R. P. Bauman, *Modern Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Nueva York, Macmillan Publishing Co., 1992.

Materiał chroniony prawem autorskim

Nueva edición de la ya conocida obra de Raymond A. Serway y John W. Jewett Jr. Además de conservar la gran capacidad didáctica que la ha caracterizado, ahora cuenta con la visión y la experiencia de Thomson Learning, y con el soporte de herramientas tecnológicas únicas, que la compañía ha desarrollado. A continuación presentamos algunas características específicas de este volumen:

- En el capítulo 2 permanece la sección sobre la estrategia para resolver problemas.
- A lo largo de los capítulos 3 a 5 se utiliza explícitamente dicha estrategia, para que el alumno aprenda a emplearla.
- Edición a color.
- El capítulo sobre movimiento oscilatorio (antes 13, ahora 15) se cambió de posición a fin de presentar una sólida segunda parte de este volumen I acerca de oscilaciones y ondas.
- El material fue minuciosamente revisado y actualizado por los autores.
- Se añadió la sección ¿Qué pasaría si?, a los ejemplos resueltos, para ofrecer una variación al ejemplo que estimule la capacidad de razonamiento del estudiante.

THOMSON

MÉXICO Y AMÉRICA CENTRAL
Tel. [illegible]
Fax [illegible]
[illegible]
México, D.F., MÉXICO

AMÉRICA DEL SUR
Tels. (5411) 4833-[illegible]
Fax (5411) 4831-[illegible]
[illegible]
Buenos Aires, ARGENTINA

EL CARIBE
Tel. (787) 758-7580
Fax (787) 758-7573
[illegible]
Hato Rey, PUERTO RICO

PACTO ANDINO
Tel. [illegible] 340-9470
Fax [illegible] 340-9475
[illegible]
Bogotá, COLOMBIA

ESPAÑA
Tel. (3491) 446-3350
Fax (3491) 445-6218
[illegible]
Madrid, ESPAÑA

ISBN 970-686-423-7
9 789706 864239